A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVIII. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1968

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

INDEX

FROM THE FOREIGHN LITERATURE

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVIII. KÖTET 1. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1968

// A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XVIII. kötet 1. szám.

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

NOVOBÁTZKY KÁROLY
1884—1967

1967 december 20-án elhunyt NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikus, Kossuth díjjal kétszeresen kitüntetett egyetemi tanár, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetének vezetője, tudományos életünk kimagasló egyénisége. Életének és munkásságának méltatására lapunk következő számában térünk rá.

Szerkesztőbizottság

KORLÁTOZOTT HOZZÁRENDELÉSI PROBLÉMA ÉS MEZŐGAZDASÁGI ALKALMAZÁSA

Írta: KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA*
és NAGYKÁLNAI ENDRE**

A hozzárendelési probléma megoldása — melyen a jelen dolgozat alapszik — H. W. KUHN amerikai matematikus nevéhez fűződik, aki ezt az eredményt a [7] dolgozatában tette közzé. Felhasználta EGERVÁRY JENŐ [2] és KÖNIG DÉNES [5] dolgozatának eredményeit, ezért módszerét „magyar módszer"-nek nevezte. Később a módszert EGERVÁRY JENŐ tovább fejlesztette [3] dolgozatában és így alkalmassá vált szállítási feladatok megoldására is.

Jelen dolgozat témája egy olyan hozzárendelési probléma megoldása, amelyben nem minden permutációs összeg választható, hanem csak azok közül kell megtalálni a minimálisat, amelyek bizonyos korlátozó feltételeknek eleget tesznek. A feladat egy mezőgazdasági probléma vizsgálata során merült fel, amelynek rövid leírása az 1. pontban található. A matematikai megfogalmazást tartalmazza a 2. pont. Így egy 0—1 egészértékű programozási feladathoz jutunk, amely elvben megoldható a GOMORY-féle algoritmussal (lásd pl. [4]-et), azonban az egészértékű változók nagy száma miatt — $n \times n$-es mátrix esetén n^2 — ez az út gyakorlatilag járhatatlan.

A feladatot átfogalmaztuk egy olyan hozzárendelési problémára, amelyben a permutációs összegek közül csak azok jönnek számításba, amelyeknek megfelelő permutációs összeg egy másik mátrixban egy adott korlát alatt marad.

Az így kapott feladat egy kielégítő megoldását kapjuk meg az 5. pontban leírt mátrix-keverési eljárással. A következő pontban a megoldás pontosságának becslése, valamint az eljárás végességének bizonyítása található.

Végül a dolgozat utolsó három pontja a konkrét felhasználás előkészítését, valamint egy megoldott feladat mezőgazdasági elemzését tartalmazza.

1. Egy mezőgazdasági probléma

A mezőgazdasági üzemek többsége meghatározott termelési feladatokat lát el, így egy-egy termelési ciklusban a termelendő növények fajtái és vetésterülete rögzített.

Az üzemek vezetői többnyire tisztában vannak az egyes növényeknek a különböző táblákon (ez természetesen különböző földminőséget, szállítási távolságot, ráfordítás igényt stb. jelent) való termeléséhez szükséges erőforrásokkal, valamint az ezúton elérhető termelési értékkel és jövedelemmel.

* *MTA Matematikai Kutató Intézet.*
** *FM Agrárgazdasági Kutató Intézet.*

Egyes táblákon a növények többsége egyaránt kiváló eredménnyel termelhető, míg másokon ugyanezek a növények rendkívül silány eredményt adnak. Ez a tény a mezőgazdasági tudomány jelenlegi módszerei szerint gyakorlatilag lehetetlenné teszi a növénytermelés olyan területi elhelyezését, amely számol a különféle termelési kapacitások (kézi munkaerő, gépimunka, fogatmunka, műtrágya, szervestrágya stb.) korlátaival és a jövedelemoptimumot megközelíti.

A gyakorlat által felvetett esetek többségében elégséges egyetlen termelési kapacitással mint korlátozó tényezővel számolni, mivel a legritkább eset, hogy két erőforrás is adott időszakban tényleges korlátozást jelentsen. Számításainkban mi a kézi munkaerőt tekintettük korlátozó tényezőnek.

A probléma egyszerűbb megfogalmazása érdekében a növénytermelés tábláit azonos méretűeknek (pl. 1 kataszteri holdasáknak) tételezhetjük fel, mivel az egységes méretet megfelelően kicsire választva minden, konkrét üzemben előforduló táblanagyság többszörözéssel előállítható. A konkrét számítások elvégzésénél ezt a felosztást már nem szükséges elvégeznünk (l. 7. pont).

2. A feladat megfogalmazása egészértékű programozásként

Számozzuk meg az egyes növényeket ($i = 1, 2, \ldots, n$), ill. „táblákat" ($j = 1, 2, \ldots, n$). Lehetséges, hogy némelyik növény több számot is kap. (Ezeket nagyobb területen vetjük, mint a számítási egységül választott táblaméret.) A föld egyenlő területű részekre van felosztva. A következő jelöléseket használjuk:

- a_{ij} az i-edik növénynek a j-edik táblán való termesztéséből származó tiszta jövedelem.
- b_{ij} az i-edik növénynek a j-edik táblán való termesztéséhez szükséges munkaerő. (Ezt esetleg csak munkacsúcsban végzett munkára számoljuk.)
- k a számítási időszakban rendelkezésre álló munkaerő a b_{ij}-kel azonos mértékegységben.
- x_{ij} változó: értéke 1, ha az i-edik növényt a j-edik táblán termesztjük és 0, ha másutt.

Az egyenleteket annak alapján írhatjuk fel, hogy mindegyik növényt egy és csak egy táblán termeljük:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{2.1}$$

továbbá minden táblán termelünk egyféle növényt, de csak egyet:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots n). \tag{2.2}$$

A következő feltételt a munkaerő-korlát szolgáltatja:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_{ij} = k. \tag{2.3}$$

És végül a cél: a fenti feltételek mellett keresendő

(2. 4) $$\max \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij},$$

ahol

(2. 5) $$x_{ij} = 0 \quad \text{vagy } 1 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

A (2. 1)—(2. 5) feladat egy tiszta egészértékű 0—1 lineáris programozási feladat. Ennek hagyományos módszerekkel történő megoldása azonban (pl. GOMORY-féle algoritmus) a változók nagy számára való tekintettel már $n = 10$ esetén reménytelen. Ezért a dolgozat további részében megadunk egy, a hozzárendelési probléma megoldó algoritmusát felhasználó módszert, amely feladatunknak egy közelítő megoldását szolgáltatja. A megoldásnak az optimumtól való maximális eltérését is közöljük.

Először rövid áttekintést adunk a hozzárendelési probléma megoldásáról. Erről bővebb ismertetés található a [2], [3], [7], [I]—[V] művekben.

3. A hozzárendelési probléma és megoldása

A (2. 3) feltétel elhagyásával nyert (2. 1), (2. 2), (2. 4), (2. 5) feladatot hozzárendelési problémának nevezzük és az áttekinthetőség kedvéért egy átfogalmazását is megadjuk. Adott egy

(3. 1) $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix. Ezen mátrix egy permutációs összegének az

(3. 2) $$a_{1p_1} + a_{2p_2} + \ldots + a_{np_n}$$

összeget nevezzük, ahol a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ számok az $1, 2, \ldots, n$ számoknak egy tetszőleges permutációját jelentik. Más szóval egy permutációs összeget úgy kapunk, hogy kiválasztunk az A mátrixból n elemet úgy, hogy minden sorból és minden oszlopból pontosan egyet választunk, és ezeket összeadjuk. Jelöljük a $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ vektort $\mathbf{p}$-vel, és az $1, 2, \ldots, n$ összes permutációinak halmazát P_n-nel. Azt a tényt, hogy $\mathbf{p}$ az $1, 2, \ldots, n$ elemek egy permutációja, úgy fejezhetjük ki, hogy $\mathbf{p} \in P_n$. Jelölje továbbá az A mátrix egy permutációs összegét

(3. 3) $$A(\mathbf{p}) = a_{1p_1} + a_{2p_2} + \ldots + a_{np_n}.$$

A hozzárendelési probléma az, hogy keresendő egy adott mátrix minimális permutációs összege. (Ha a maximális permutációs összeget keressük, akkor elegendő a $-A$ mátrix minimális permutációs összegét megtalálni.)

1. MEGJEGYZÉS. Könnyen belátható, hogy ha az A mátrix bármelyik sorának vagy oszlopának minden eleméhez ugyanazt a (pozitív vagy negatív) számot adjuk, akkor a permutációs összegek nagyság szerinti sorrendje nem változik, így a minimális permutációs összegnek megfelelő elemek összege az új mátrixban továbbra is minimális marad, mivel minden permutációs összeg ugyanannyival nőtt vagy csökkent.

2. MEGJEGYZÉS. Ugyancsak könnyű belátni, hogy egy mátrixot egy tetszőleges pozitív számmal beszorozva a permutációs összegek nagyság szerinti sorrendje változatlan marad.

A hozzárendelési probléma megoldására szolgáló „magyar módszer" rövid leírása

A fenti első megjegyzés alapján feltehetjük, hogy az A mátrix elemei nemnegatívak. Ellenkező esetben egy elég nagy számot hozzáadva minden elemhez, ilyen mátrixot kapunk. A továbbiakban minden lépésnél ügyelni fogunk arra, hogy az A mátrix ezen tulajdonsága megmaradjon. Először is a mátrix minden sorából, majd az így kapott mátrix minden oszlopából levonjuk az ottani legkisebb elemet. Így minden sorban és minden oszlopban szerepel legalább egy zérus. Ha ki tudunk választani n darab független nullát (azaz n darab olyan nullát, amelyből bármely kettő nincs egy oszlopban és nincs egy sorban), akkor ezek összege minimális permutációs összeg lesz, mert a mátrix elemei nemnegatívok. A fenti 1. MEGJEGYZÉS értelmében ezzel az eredeti mátrixban is megkaptuk a minimális permutációs összeget.

Ha zérus permutációs összeg még nincsen, akkor a KÖNIG—EGERVÁRY tétel (l.: [2], [5]) segítségével folytathatjuk az eljárást. Ez a tétel azt mondja ki, hogy bármely mátrixban az összes zérusokat lefedő vonalak minimális száma megegyezik a független nullák maximális számával. (Vonalon sort vagy oszlopot értünk.)[1]

Így, ha még csak $r<n$ független nulla van a mátrixban, akkor r vonallal (sorral és oszloppal) lefedhetjük azokat. Kiválasztjuk a le nem fedett elemek közül a legkisebbet. (Ez természetesen nagyobb, mint zérus, hiszen az összes zérust lefedtük.) Ezután a mátrix minden eleméből levonjuk ezt a számot, majd, hogy a negatív elemeket eltüntessük, minden lefedő vonal mentén minden elemhez hozzáadjuk ezt a számot. Így végeredményben a le nem fedett elemekből kivontuk, a kétszer lefedettekhez egyszer hozzáadtuk a fenti számot, az egyszer lefedetteket pedig változatlanul hagytuk. Ismét megnézzük, hogy van-e már n független zérus. Ha van, megkaptuk a megoldást, mert a 2. MEGJEGYZÉS értelmében „megengedett" változtatásokat végeztünk. Ha nincs, megismételjük az utolsó lépést. Belátható, hogy amennyiben az A mátrix elemei tetszőleges racionális számok, akkor a lefedési algoritmus véges sokszor való alkalmazásával megkapjuk a minimális permutációs összeget, azaz véges sok lépés után egy olyan mátrixhoz jutunk, melyben már található n számú független zérus. A feladat optimális megoldását kapjuk, ha a független zéróknak megfelelő változókat 1-nek, a többit 0-nak választjuk.

[1] A maximális számú független zérus, ill. a minimális számú lefedővonal megtalálására egy egyszerű, elektronikus számítógépre is alkalmazható algoritmust ad a [III] dolgozat.

PÉLDA.

Keressük meg a következő mátrixban a minimális permutációs összeget szolgáltató elemeket:

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 6 & 12 & 5 & 9 \\ 7 & 14 & 10 & 14 \\ 12 & 9 & 11 & 4 \\ 8 & 10 & 2 & 7 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} -5 \\ -7 \\ -4 \\ -2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 7 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 5 \\ \hline \end{array} \\ -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & & & +1 & & \\ \hline -1 & \boxed{1} & 2 & 0 & 4 & \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 7 & +1 \\ -1 & 8 & 0 & 7 & 0 & +1 \\ -1 & 6 & 3 & 0 & 5 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc|c} & +1 & & +1 & & \\ \hline -1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 3 & \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 7 & \\ -1 & 8 & 0 & 8 & 0 & +1 \\ -1 & 5 & 2 & 0 & 4 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 0 & \boxed{0} & 0 & 2 \\ \boxed{0} & 1 & 4 & 6 \\ 9 & 0 & 9 & \boxed{0} \\ 5 & 1 & \boxed{0} & 3 \\ \hline \end{array}$$

Így a megoldás: $x_{12}=x_{21}=x_{34}=x_{43}=1$, a többi zérus. A megoldáshoz tartozó célfüggvény érték (a minimalizálandó függvény értéke az optimumnál):

$$a_{12}+a_{22}+a_{34}+a_{43} = 12+7+4+2 = 25.$$

3. MEGJEGYZÉS. Az elmondottakból az is kiderül, hogy az utolsó mátrixból valamennyi optimális megoldást megkaphatjuk, ha minden lehetséges módon kiválasztunk n számú független zérust. (A példában nincs alternatív optimum.)

4. A korlátozott hozzárendelési probléma és közelítő megoldása

A (2. 1)—(2. 5) feladatot átfogalmazhatjuk a következőképpen:
Adott két mátrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Keresendő az A mátrixban egy maximális permutációs összeg azok közül a permutációk közül, amelyeknél a megfelelő elemek összege a B mátrixban egy adott k korlát alatt marad, azaz keresendő

$$\max_{(p_1 \dots p_n)} (a_{1p_1}+a_{2p_2}+\dots+a_{np_n}), \tag{4. 1}$$

ahol a $p_1, p_2, \dots, p_n$ az $1, 2, \dots, n$ számoknak egy olyan permutációja, amelyre

$$b_{1p_1}+b_{2p_2}+\dots+b_{np_n} \leqq k. \tag{4. 2}$$

A feladatot átfogalmazzuk minimalizálási feladatra a

$$C=(c_{ij})=(-a_{ij}+r_i) \tag{4. 3}$$

mátrix bevezetésével, ahol r_i olyan pozitív számot jelent, melyre $-a_{ij}+r_i \geqq 0$ minden j-re. Hasonlóan a $b_{ij} \geqq 0$ egyenlőtlenségeket is feltehetjük, ellenkező esetben ugyanis a B mátrix elemeihez hozzáadhatunk egy elég nagy M pozitív számot. (Ekkor természetesen a k korlátot is meg kell növelni nM-mel, hiszen minden permutációs összeg ennyivel növekszik.)

(3. 3) szerint $C(\mathbf{p})$, ill. $B(\mathbf{p})$ ($\mathbf{p} \in P_n$) jelöli a C, ill. a B mátrix egy-egy — ugyanazon permutációkból álló, azaz egymásnak megfelelő — permutációs összegét. Ekkor a feladat így fogalmazható:

Keresendő a

(4. 4)
$$\min_{\substack{B(\mathbf{p}) \leqq k \\ \mathbf{p} \in P_n}} C(\mathbf{p}).$$

5. A mátrixok keverése és egy közelítő megoldás megadása

A továbbiakban vizsgálni fogjuk a

(5. 1)
$$C+\lambda B \qquad (0 \leqq \lambda \leqq \infty, \lambda \text{ racionális})$$

alakú mátrixokat, ahol a $\lambda=\infty$ esetben az (5. 1) kifejezés a B mátrixot jelenti. A 2. MEGJEGYZÉS értelmében ugyanis a $C+\lambda_n B\,(\lambda_n \to \infty)$ mátrix minimális összegű permutációja megegyezik a $\frac{1}{\lambda_n} C+B$ minimális összegű permutációjával. Ez utóbbi azonban $\lambda_n \to \infty$ esetén tart a B mátrixhoz.

A (4. 1)—(4. 2), ill. az átfogalmazott (4. 4) feladat egy közelítő megoldásához jutunk az alábbi eljárás segítségével. Az (5. 1) mátrix minimális permutációs összegét keressük meg különböző λ-k esetén. Jelöljük (C_i, B_i)-vel a λ_i esetén kapott minimális permutációs összeget, azaz:

(5. 2a)
$$C_i+\lambda_i B_i = \min_{\mathbf{p} \in P_n} C(\mathbf{p})+\lambda_i B(\mathbf{p}).$$

A λ_i sorozatot a következőképpen definiáljuk:

Az (5. 2a) egyenlőség annak kifejezésére szolgál, hogy a jobboldali kifejezés a minimumát $\mathbf{p}=\mathbf{p}^i$-re éri el és a

(5. 2b)
$$C(\mathbf{p}^i) = C_i \quad B(\mathbf{p}^i) = B_i$$

rövid jelölést alkalmazzuk.

$\lambda_1=0$. Azaz megkeressük a C mátrix minimális permutációs összegét, ill. összegeit, megoldva a hozzárendelési problémát a C mátrixszal. Amennyiben több alternatív optimális megoldás van, akkor ezek közül meghatározzuk azt, amelyhez tartozó permutációs összeg a B mátrixban minimális a következő módon:

A 3. pontban található 3. MEGJEGYZÉS szerint a megoldás során kapott utolsó mátrix tartalmazza az összes optimális megoldást, minden lehetséges módon kiválasztva n számú független zérust (és csak ezek az optimális megoldások). Írjuk be tehát az említett végső mátrixba a zérusok helyére a B mátrix megfelelő elemeit (az ugyanazon pozícióban levőket), minden más helyre pedig ∞-t. (Gépi számítás esetén egy elegendően nagy számot, pl. a B mátrix elemei összegének kétszeresét.) Az így kapott mátrixra ismét oldjuk meg a hozzárendelési problémát és az eredményül kapott permutációhoz tartozó összegeket jelöljük (C_1, B_1)-gyel. Ha $B_1 \leqq k$, megkaptuk a (4. 1)—(4. 2) feladat optimális megoldását, ha $B_1 > k$, akkor $\lambda_2 = \infty$, azaz megkeressük a B mátrix minimális permutációs összegét. Ha $B_2 > k$, akkor a feladatnak egyáltalán nincs megoldása. Ha $B_2 = k$, akkor csak azok a permutációs összegek elégítik ki a feladat korlátozását (a (4. 2) feltételt), amelyekhez tartozó B mátrixbeli permutációs összeg minimális, azaz k. Ezek közül kell kiválasztanunk (ha egyáltalán több ilyen van) azt, amelyre nézve a C mátrixbeli permutációs összeg a legkisebb. Ezt a $\lambda_1 = 0$ esetben leírtakhoz hasonlóan végezzük. A megoldás során kapott legutolsó mátrixban a zérusok helyébe az A mátrix megfelelő elemeit, minden más helyre egy elegendően nagy számot (mint fent) teszünk. Az így kapott mátrixszal megoldjuk a hozzárendelési feladatot, melynek eredménye a (4. 1)—(4. 2) feladat optimális megoldását adja, a megfelelő permutációs összegeket (C_2, B_2)-vel jelöljük. $B_2 < k$ esetén hasonló módon határozzuk meg a minimális C_2 permutációs összeget (B-re nézve alternatív optimumok létezése esetén) azok közül, melyek a B mátrixra nézve minimális permutációnak felelnek meg. Az így kapott permutációs összeg-párt ebben az esetben is (C_2, B_2)-vel jelöljük.

Vezessük be a következő jelöléseket:

(5. 3)
$$(C_2^{\mathrm{I}}, B_2^{\mathrm{I}}) = (C_1, B_1)$$
$$(C_2^{\mathrm{II}}, B_2^{\mathrm{II}}) = (C_2, B_2).$$

Legyen továbbá

(5. 4)
$$\lambda_i = \frac{C_{i-1}^{\mathrm{II}} - C_{i-1}^{\mathrm{I}}}{B_{i-1}^{\mathrm{I}} - B_{i-1}^{\mathrm{II}}} \qquad (i = 3, 4, \ldots),$$

és

(5. 5)
$$(C_i^{\mathrm{I}}, B_i^{\mathrm{I}}) = \begin{cases} (C_i, B_i), & \text{ha} \quad B_i > k \\ (C_{i-1}^{\mathrm{I}}, B_{i-1}^{\mathrm{I}}), & \text{ha} \quad B_i < k \end{cases}$$
$$(C_i^{\mathrm{II}}, B_i^{\mathrm{II}}) = \begin{cases} (C_{i-1}^{\mathrm{II}}, B_{i-1}^{\mathrm{II}}), & \text{ha} \quad B_i > k \\ (C_i, B_i), & \text{ha} \quad B_i < k \end{cases}$$

ahol (C_i, B_i)-t az (5. 2) kifejezés szolgáltatja a λ_i ismeretében. Ha $B_i = k$, akkor a 2. Tétel *b)* pontja értelmében (C_i, B_i) az optimális megoldást szolgáltatja. Mivel λ_3 kiszámítható (5. 3) segítségével, (5. 4) és (5. 5) rekurzíven definiál egy $\lambda_i(C_i^{\mathrm{I}}, B_i^{\mathrm{I}})$, $(C_i^{\mathrm{II}}, B_i^{\mathrm{II}})$ sorozatot. Ezt a sorozatot addig számítjuk, amíg a

(5. 6)
$$C_i^{\mathrm{I}} + \lambda_{i+1} B_i^{\mathrm{I}} = C_i^{\mathrm{II}} + \lambda_{i+1} B_i^{\mathrm{II}} = C_{i+1} + \lambda_{i+1} B_{i+1}$$

egyenlőség nem teljesül. (Az első egyenlőség természetesen λ_{i+1} definíciója miatt mindig fennáll.) Ekkor a $(C_i^{\mathrm{II}}, B_i^{\mathrm{II}})$ permutációs összegpárokat, ill. a megfelelő permutációt az optimális megoldás közelítésének fogadjuk el. A gyakorlati számítások során tapasztaltuk, hogy ez az optimálishoz igen közel van, azonban a következő pontban egy számszerű becslést is adunk arra, hogy a legrosszabb esetben mennyi lehet az optimumtól való eltérés. A következő pontban ezen kívül az algoritmus végességével is foglalkozunk.

1. MEGJEGYZÉS. Amennyiben ismerünk egy λ_1' és λ_2'-t úgy, hogy a hozzátartozó (C_1', B_1') és (C_2', B_2') permutációs összegpárokra $B_1' > k$ és $B_2' < k$, akkor az algoritmust kezdhetjük a $(C_2^{\mathrm{I}}, B_2^{\mathrm{I}}) = (C_1', B_1')$, valamint a $(C_2^{\mathrm{II}}, B_2^{\mathrm{II}}) = (C_2', B_2')$ mennyiségekkel. Ekkor az alternatív optimumok problémája sem merül fel!

2. MEGJEGYZÉS. Amennyiben a megoldás pontossága nem kielégítő (a tárgyalt gyakorlati problémában 2—3%-os hiba elhanyagolható a becslések pontatlansága miatt), akkor a feladat megoldható valamilyen kombinatorikus típusú módszerrel is (lásd pl. E. BALAS [VI] és KOVÁCS L. B. [VII] munkáját). A módszer elektronikus számítógép igénye (kapacitás, idő) elég nagy. Jelen dolgozatban szereplő módszer használatával nyert eredmény hasznosítható a kombinatorikus algoritmus gyorsítására.

6. A közelítő megoldás pontosságának becslése és az eljárás végessége

Az optimális megoldást jelöljük (C^*, B^*)-gal. Ezt a

(6. 1) $$C^* = \min_{\substack{B(\mathbf{p}) \leqq k \\ \mathbf{p} \in P_n}} C(\mathbf{p})$$

egyenlőség definiálja. Az alábbiakban megbecsüljük a (C_i^{II}, B_i^{II}) megoldás hibáját, amelyre (5. 6) teljesül, és amelyet az optimális megoldás közelítéseként fogadunk el.

1. TÉTEL

a) A (C_i^{II}, B_i^{II}) *megoldás hibája*

(6. 2) $$C_i^{II} - C^* \leqq \lambda_{i+1}(k - B_i^{II});$$

b) Amennyiben az eljárás során bármely λ_i*-re (a* λ_2 *kivételével)* $B_i = k$ *adódik, akkor a hozzátartozó* C_i *a pontos optimum értékét szolgáltatja.*

Bizonyítás: Az (5. 6) egyenlőség annak figyelembevételével, hogy a minimális permutációs összeg a $C + \lambda_{i+1} B$ mátrixban $C_{i+1} + \lambda_{i+1} B_{i+1}$ a következőképpen írható:

(6. 3) $$C_i^I + \lambda_{i+1} B_i^I = C_i^{II} + \lambda_{i+1} B_i^{II} = C_{i+1} + \lambda_{i+1} B_{i+1} \leqq C^* + \lambda_{i+1} B^*$$

Innen azonnal következik $B^* = k$ miatt, hogy

(6. 4) $$C_i^{II} - C^* \leqq \lambda_{i+1}(k - B_i^{II})$$

így a tétel *a)* részét beláttuk.

Hasonlóan beláthatjuk, hogyha valamely $\lambda_i \neq \infty$ esetén $B_i = k$, akkor az így adódó permutációs összeg a korlátozott hozzárendelési probléma optimális megoldását szolgáltatja. Legyen ugyanis (C_0, B_0) egy tetszőleges összetartozó permutációs-összeg pár, melyre $B_0 \leqq k$. Ekkor, minthogy

$$\min_{\mathbf{p} \in P_n} \{C(\mathbf{p}) + \lambda_i B(\mathbf{p})\} = C_i + \lambda_i B_i,$$

fennáll a következő egyenlőtlenség:

(6. 5) $$C_i + \lambda_i k = C_i + \lambda_i B_i \leqq C_0 + \lambda_i B_0.$$

Innen azonban a $B_0 \leqq k$ feltevésből következik, hogy $C_0 \geqq C_i$, amivel a tétel *b)* részét is beláttuk. Az eljárás végességét igazoljuk az alábbiakban:

2. TÉTEL. *Az 5. pontban leírt eljárás véges sok lépés után vagy az (5. 6) eset előfordulásához, vagy a $B_i = k$ egyenlőség teljesüléséhez vezet.*

Bizonyítás: Belátjuk, hogy amennyiben a $B_i = k$ eset nem fordul elő, akkor véges sok lépés után az (5. 6) egyenlőséget kielégítő permutációs összeghez jutunk. Ehhez elegendő belátni, hogy a fenti esetben, ha (C_{i+1}, B_{i+1})-gyel még nem ért véget az eljárás, azaz

$$C_i^{\mathrm{I}} + \lambda_{i+1} B_i^{\mathrm{I}} = C_i^{\mathrm{II}} + \lambda_{i+1} B_i^{\mathrm{II}} > C_{i+1} + \lambda_{i+1} B_{i+1}, \tag{6. 6}$$

akkor a továbbiakban a (C_j, B_j) $\big(j = 1, 2, \ldots, i$, de $(C_j, B_j) \neq (C_i^{\mathrm{I}}, B_i^{\mathrm{I}})$, $(C_i^{\mathrm{II}}, B_i^{\mathrm{II}})\big)$ permutációs összeg párok egyike sem fog fellépni ismét. Ez ugyanis azt jelenti, hogy az (5. 6) egyenlőség teljesülése előtt nem fordulhat elő a permutációs összeg párok egyikének ismétlődése sem, és mivel ezek száma véges, továbbá a (6. 6) egyenlőtlenség miatt a $(C_i^{\mathrm{I}}, B_i^{\mathrm{I}})$ és $(C_i^{\mathrm{II}}, B_i^{\mathrm{II}})$ párok közül az egyik is bekerül a nem ismétlődők közé az eljárás végessége is igazolva van. Most bebizonyítjuk az átfogalmazott állítást. Jelöljük λ_i^{I}-gyel, illetve λ_i^{II}-vel azokat a λ-kat, amelyekkel a $(C_i^{\mathrm{I}}, B_i^{\mathrm{I}})$, illetve $(C_i^{\mathrm{II}}, B_i^{\mathrm{II}})$ permutációs összeg párokat kaptuk, ekkor természetesen

$$\begin{aligned} C_i^{\mathrm{I}} + \lambda_i^{\mathrm{I}} B_i^{\mathrm{I}} &< C_i^{\mathrm{II}} + \lambda_i^{\mathrm{I}} B_i^{\mathrm{II}} \\ C_i^{\mathrm{I}} + \lambda_i^{\mathrm{II}} B_i^{\mathrm{I}} &> C_i^{\mathrm{II}} + \lambda_i^{\mathrm{II}} B_i^{\mathrm{II}}. \end{aligned} \tag{6. 7}$$

Összevetve a (6. 6) és a (6. 7) kifejezéseket, mivel $B_i^{\mathrm{I}} > k > B_i^{\mathrm{II}}$, könnyen kiszámítható, hogy

$$\lambda_i^{\mathrm{I}} < \lambda_{i+1} < \lambda_i^{\mathrm{II}}. \tag{6. 8}$$

Ebből azonnal következik, hogy

$$\lambda_2^{\mathrm{I}} \leqq \lambda_3^{\mathrm{I}} \leqq \ldots \leqq \lambda_i^{\mathrm{I}} \leqq \ldots \leqq \lambda_i^{\mathrm{II}} \leqq \ldots \leqq \lambda_3^{\mathrm{II}} \leqq \lambda_2^{\mathrm{II}}, \tag{6. 9}$$

ahol az egyenlőséget azért kell megengedni, mert az egymás után következő $(C_i^{\mathrm{I}}, B_i^{\mathrm{I}})$, illetve $(C_i^{\mathrm{II}}, B_i^{\mathrm{II}})$ párok közül bizonyosak megegyeznek. Vizsgáljunk most egy tetszőleges (C_j, B_j) permutációt $\big(j = 1, 2, \ldots, i$, $(C_j, B_j) \neq (C_i^{\mathrm{I}}, B_i^{\mathrm{I}})$, $(C_i^{\mathrm{II}}, B_i^{\mathrm{II}})\big)$. Tegyük fel, hogy $B_j > k$, azaz $(C_j, B_j) = (C_f^{\mathrm{I}}, B_f^{\mathrm{I}})$, ahol $(f < i)$. Ekkor az $\lambda_f^{\mathrm{I}} < \lambda_i^{\mathrm{I}}$, valamint a

$$C_i^{\mathrm{I}} + \lambda_i^{\mathrm{I}} B_i^{\mathrm{I}} < C_f^{\mathrm{I}} + \lambda_i^{\mathrm{I}} B_f^{\mathrm{I}} \tag{6. 10}$$

$$C_i^{\mathrm{I}} + \lambda_f^{\mathrm{I}} B_i^{\mathrm{I}} > C_f^{\mathrm{I}} + \lambda_f^{\mathrm{I}} B_f^{\mathrm{I}} \tag{6. 11}$$

egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$B_i^{\mathrm{I}} < B_f^{\mathrm{I}}. \tag{6. 12}$$

Legyen λ_r egy tetszőleges későbbi λ $(r \geqq i+1)$. Ekkor $\lambda_r \geqq \lambda_i^{\mathrm{I}}$ miatt

$$(\lambda_r - \lambda_i^{\mathrm{I}}) B_i^{\mathrm{I}} \leqq (\lambda_r - \lambda_i^{\mathrm{I}}) B_f^{\mathrm{I}}. \tag{6. 13}$$

Ha a (6. 10) és (6. 13) egyenlőtlenségeket összeadjuk, a

$$C_i^{\mathrm{I}} + \lambda_r B_i^{\mathrm{I}} < C_f^{\mathrm{I}} + \lambda_r B_f^{\mathrm{I}} \tag{6. 14}$$

egyenlőtlenség adódik, ami mutatja, hogy $(C_f^{\mathrm{I}}, B_f^{\mathrm{I}})$ nem lehet semmilyen λ_r-re $(r \geqq i+1)$ minimális permutációs összeg. A $B_j < k$ eset vizsgálata teljesen hasonlóan történik, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

MEGJEGYZÉS. Természetesen nem kell az összes permutációt megvizsgálni a most leírt eljárással. Már a 2. TÉTEL bizonyításában is csak olyan (C_i, B_i) permutációs összegekhez tartozó permutációk szerepeltek, amelyekhez nincs olyan $\mathbf{p} \in P_n$ permutáció, melyre

$$(C(\mathbf{p}), B(\mathbf{p})) \neq (C_i, B_i) \quad \text{és} \quad C(\mathbf{p}) \leqq C_i,\ B(\mathbf{p}) \leqq B_i.$$

Az ilyen tulajdonságú permutációknak is csak kis hányadát vizsgáljuk, mert minden lépésnél a még számbajöhető permutációknak mintegy felét elhagyjuk.

7. Korlátozott szállítási probléma

Ismeretes, hogy a 3. pontban leírt megoldás a szállítási problémára is alkalmazható. Ennek lényege, hogy minden telephelyet annyi példányban írunk fel, amennyi az odaszállítandó vagy onnan elszállítandó mennyiség. Így egy igen nagyméretű hozzárendelési problémát kapunk. Ezt a felbontást azonban csak elvben végezzük el. Belátható ugyanis, hogy a független nullák lefedésekor amennyiben valamelyik telephelynek megfelelő sort (vagy oszlopot) lefedjük, akkor le kell fedni a többit is. Így tehát nem kell a fenti felbontást elvégezni, hanem csak a lefedő vonalat annyiszorosan számolni, amennyi az illető telephelyre, vagy onnan elszállítandó mennyiség. (Lásd [3].)

A most elmondottak lehetővé teszik, hogy különböző vetésterületek is szerepeljenek az 1. és 2. pontban leírt modellekben és azt ne kelljen azonos egységekre bontani.

8. Blokk-diagram és az algoritmus leírása

A feladat a következő: Adott két nemnegatív racionális elemekből álló $n \times n$ mátrix: C és B. Keresendő a

(8. 1) $$\min_{\substack{B(\mathbf{p}) \leqq k \\ \mathbf{p} \in P_n}} C(\mathbf{p}),$$

ahol P_n az $1, 2, \ldots, n$ számok permutációinak halmaza és

$$C(\mathbf{p}) = c_{1p_1} + c_{2p_2} + \ldots + c_{np_n}.$$

*Algoritmus a feladat megoldására.**

1a) Határozzuk meg a C mátrixban a minimális permutációs összeget a „magyar módszer"-rel, ezt jelöljük C_1-gyel.

b) Határozzuk meg az 1a) pontban nyert alternatív optimumok közül azt, amelyre a megfelelő permutációs összeg minimális a B mátrixban. Az 1a) pontban kapott végső mátrixban a zérók helyére az azonos pozícióban levő B mátrixbeli elemet tegyük, a többire pedig egy nagy számot. (Pl. a B mátrix elemei összegének kétszeresét.) Az így nyert permutációs összeget jelöljük B_1-gyel.

* Az algoritmus a blokk-diagramon is követhető. Természetesen az algoritmusban a „magyar-módszer" helyett tetszőleges más módon is megoldhatjuk a hozzárendelési feladatot.

c) Ha $B_1 \leqq k$, akkor (C_1, B_1) *optimális* permutációs-összeg pár, és az 1a)—b)-ben kapott $\mathbf{p}^1$ permutáció, melyre

(8. 2) $$(C_1, B_1) = (C(\mathbf{p}^1), B(\mathbf{p}^1))$$

az optimális permutáció, azaz a feladat optimális megoldása:

(8. 3) $$x_{1p_1^1} = x_{2p_2^1} = \ldots = x_{np_n^1} = 1, \quad x_{ij} = 0 \quad (j \neq p_i^1).$$

Ha $B_1 > k$, folytatjuk az algoritmust.

2a) Határozzuk meg a B mátrixban a minimális permutációs összeget a „magyar módszer"-rel (B_2).

b) Ha $B_2 > k$ a (8. 1) feladatnak *nincs* megoldása. Ellenkező esetben:

c) Határozzuk meg a 2a) pontban nyert alternatív minimumok közül azt, amelyre a megfelelő C permutációs összeg is minimális. (Mint 1b) pontban.)

d) Ha $B_2 = k$, akkor (C_2, B_2) optimális permutációs-összeg pár, a megfelelő optimális megoldást (8. 2)—(8. 3) mintájára nyerhetjük. Ha $B_2 < k$:

3. Legyen
$$i = 3$$
$$(C_2^{\mathrm{I}}, B_2^{\mathrm{I}}) = (C_1, B_1)$$
$$(C_2^{\mathrm{II}}, B_2^{\mathrm{II}}) = (C_2, B_2).$$

4. Legyen
$$\lambda_i = \frac{C_{i-1}^{\mathrm{II}} - C_{i-1}^{\mathrm{I}}}{B_{i-1}^{\mathrm{I}} - B_{i-1}^{\mathrm{II}}}.$$

5a) Számítsuk ki a $C + \lambda_i B$ mátrix egy minimális permutációs összegét, amely például a $\mathbf{p}^i$ permutációhoz tartozik:
$$\min_{\mathbf{p} \in P_n} \{C(\mathbf{p}) + \lambda_i B(\mathbf{p})\} = C(\mathbf{p}^i) + \lambda_i B(\mathbf{p}^i).$$
Ekkor legyen
$$C_i = C(\mathbf{p}^i) \text{ és } B_i = B(\mathbf{p}^i).$$

b) Ha $B_i = k$, akkor (C_i, B_i) *optimális* permutációs összeg pár. A megfelelő megoldást nyerhetjük, mint (8. 2)—(8. 3)-ban. Egyébként:

c) Ha $C_{i-1}^{\mathrm{II}} + \lambda_i B_{i-1}^{\mathrm{II}} = C_i + \lambda_i B_i$, akkor $(C_{i-1}^{\mathrm{II}}, B_{i-1}^{\mathrm{II}})$ a feladatunk közelítő permutációs összeg párja, a megfelelő megoldás nyerhető, mint (8. 2)—(8. 3)-ban. Ha C^* a feltételezett optimális megoldáshoz tartozó permutációs összeg, akkor a jelen megoldás maximális hibája:
$$C_i^{\mathrm{II}} - C^* \leqq \lambda_i (k - B_i^{\mathrm{II}}).$$
Ha a fenti egyenlőség nem teljesül, folytatjuk az algoritmust:

d) Ha $B_i < k$ a 6a) pontban, ha $B_i > k$ a 6b) pontban folytatjuk az algoritmust.

6a) Legyen
$$(C_i^{\mathrm{I}}, B_i^{\mathrm{I}}) = (C_{i-1}^{\mathrm{I}}, B_{i-1}^{\mathrm{I}})$$
$$(C_i^{\mathrm{II}}, B_i^{\mathrm{II}}) = (C_i, B_i).$$

Folytatás a 7. pontban.

b) Legyen

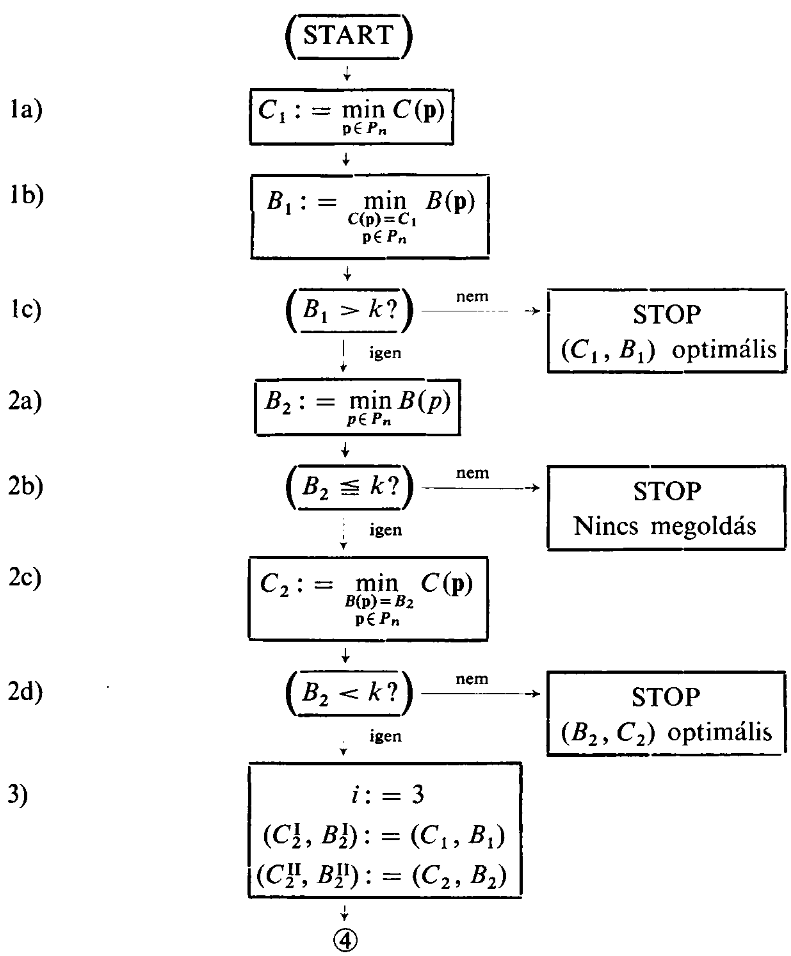
$$(C_i^{\mathrm{I}}, B_i^{\mathrm{I}}) = (C_i, B_i)$$

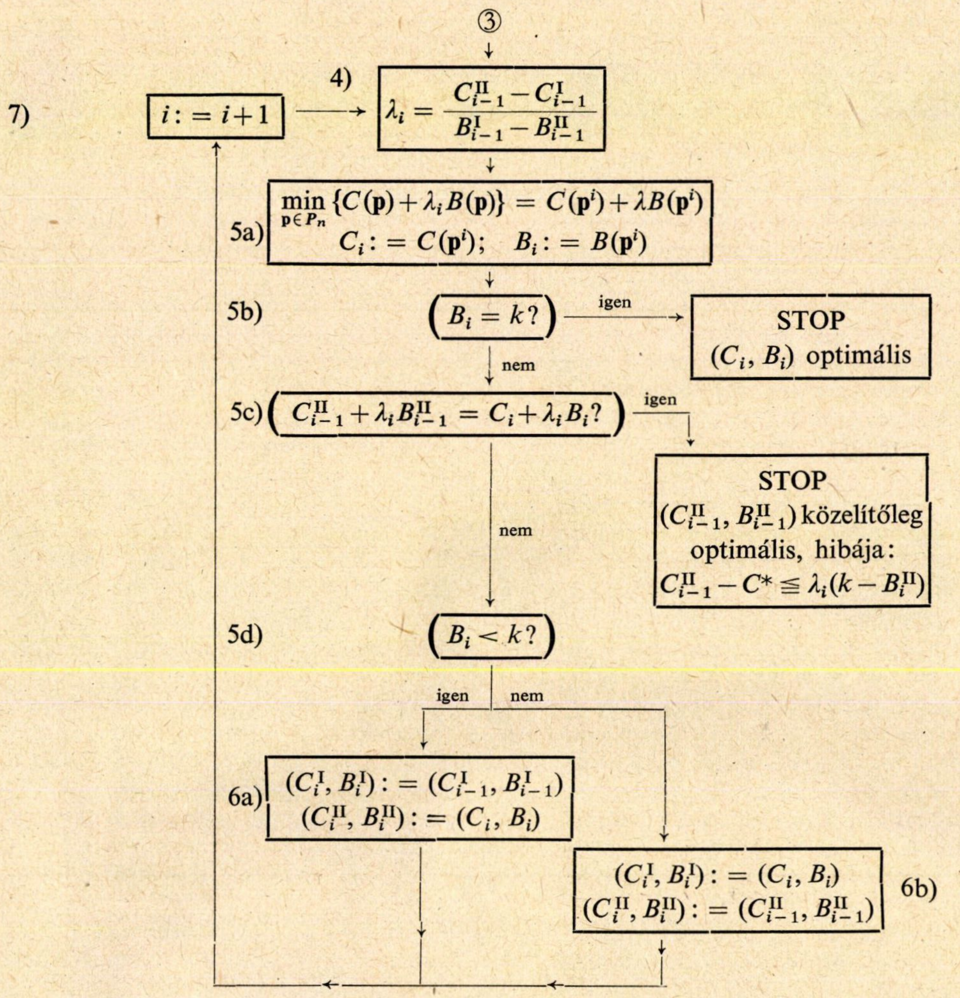
$$(C_i^{\mathrm{II}}, B_i^{\mathrm{II}}) = (C_{i-1}^{\mathrm{II}}, B_{i-1}^{\mathrm{II}}).$$

Folytatás a 7. pontban.

7. Tegyünk i helyébe $(i+1)$-et, és folytassuk az algoritmust a 4. pontban. Mint már korábban bizonyítottuk, az algoritmus véges sok lépés után véget ér: vagy nincs megoldás, vagy egy optimális megoldáshoz jutottunk, vagy egy közelítő megoldáshoz, ismert hibabecsléssel.

A (8. 1) *feladat megoldásának blokk-diagramja*





9. A konkrét alkalmazás előkészítése

A 2—7. pontban tárgyalt matrixalgebrai rendszer jó közelítését nyújtja az 1. pontban felvetett mezőgazdasági probléma megoldásának. Az alábbiakban szeretnénk néhány mezőgazdasági érdekességre rávilágítani egy hypotetikus üzem szántóföldi növénytermelése elhelyezési problémájának megoldása során. Alapfeltételezésünk a szántóföldi növénytermesztés üzemen belüli önelszámoló helyzete.

Már a fentiekben részletesen tárgyalt módszer első lépéseként olyan mélységet kell feltárni az üzem megismerése során, amely egymagában is sok érdekes és hasznos tanácsot szolgáltat az üzem vezetői számára. Történetesen a gazdaság táblabeosztásán és az egyes táblák termesztési adottságain [10] kívül feltétlenül szükségessé válik a különféle növényeknek a különféle táblákon való termesztésével elérhető hozam, ráfordítás és jövedelem ismerete. Üzemeink gyakorlatában ezek az adatok csak hézagosan lelhetők fel, hiszen képtelenség, hogy egyetlen tábláról ugyanazon feltételek mellett minden termesztésbe vont növényre vonatkozólag rendelkezésre álljanak a hozam-ráfordítás adatok. Az irodalom tanulmányozása alapján a hozambecslésnek a gyakorlat igényeit lényegében kielégítő módszerei ismeretesek [10], [11], [12], [9], ugyanakkor azonban a termeléshez szükséges ráfordítások becslése még korántsem eléggé differenciált, bár már itt is vannak eredményes próbálkozások [9], [13]. Mindezek arra késztettek bennünket, hogy részletesebben csak a ráfordítások becslésével foglalkozzunk.

Első lépésként az adott tábla termesztési adottságai alapján meghatározzuk a vizsgált növényeknél a konvencionálistól eltérő agrotechnikai műveleteket, és azok gép, fogat és kézimunka igényét, amelyeket előfordulási valószínűségükkel korrigálva az átlagosan szükséges tételekhez [13] hozzáadunk. Ezekután a talajok kötöttségének [10] megfelelően a kötöttségtől függően több vagy kevesebb ráfordítást igénylő tételeket helyesbítjük, egyúttal elvégezve a kisebb vagy nagyobb szállítási távolság következtében módosuló ráfordítások átszámítását is.

A természetes egységekben elvégzett számítások után a normálhold, kézimunkanap és lófogatnap igényt a gazdaságban kialakult önköltségekkel szorozva, majd a szorzatok összegéhez az egyéb, talajtól független ráfordítások (növényvédőszer, vetőmag, műtrágya, szervestrágya stb.) [8] értékét hozzáadva megkapjuk a ráfordítások során felmerülő költségeket, illetve azok közvetlen részét. A közvetett költségeket az üzemben kialakult részarányban történő beszámítás útján kaphatjuk meg.

Az eddigiekben elvégzett számításokat minden elhelyezést igénylő növényre, minden tábla viszonylatában elkészítjük. Leghelyesebb, ha számításaink során, mind az áttekinthetőség, mindpedig a későbbi számítások gyors elvégzése érdekében ezeket a kalkulációkat mátrixszerűen (táblázatosan) végezzük. Az eredményül kapott, 1 kataszteri holdra vonatkozó számítási anyagot mint a ráfordítások kiinduló táblázatát a következő években is felhasználhatjuk, hiszen ezeknek a tételeknek megváltoztatása csak a termelés és ráfordítás színvonalának lényeges módosítása esetén szükséges.

A táblánként és növényenként elérhető hozam még azonos ráfordítások esetén is a nem ráfordítás jellegű tényezők (pl: elővetemény) hatására évenként eltérően alakulhat. Ezért a számítás további részét, amely a hozamok kalkulációját és az elérhető jövedelem táblánkénti és növényenkénti kiszámítását célozza, évente újra kell végeznünk.

Miután az elhelyezéshez szükséges összes kiinduló adat rendelkezésre áll, a tényleges táblaméretek legnagyobb közös osztójának nagyságrendjére transzformáljuk azokat, és ilyen nagyságú egységekből álló csoportokat alakítunk ki az egyes termelendő növényekből is. (Mint a 7. pontban láttuk, ezt az egyszerű egységesítési műveletet elkerülhetjük, ha vállaljuk a valamivel bonyolultabb számítási eljárás végrehajtását). A növények összterületének természetszerűleg meg kell egyeznie a táblák összterületével. Amennyiben a növények között választhatunk (egyeseket esetleg nem szükséges termeszteni), akkor ún. fiktív táblákkal egészítjük ki a feladatot, amelyeken a ráfordítás és a jövedelem egyaránt zérus. Ekkor a kötelezően előírt növényeknek a fiktív táblán való termesztését kizárjuk igen nagy ráfordítások beírásával.

A vetésterület és szerkezet kialakításához más matematikai (pl.: lineáris programozás stb.) módszereket alkalmazhatunk, vagy egyéb spekulatív úton juthatunk (szerződhetőség, hitelfeltétel, hagyomány stb.).

Adott termelési szerkezet mellett konkrét esetben mindig adottak a termelés korlátját szolgáltató legfontosabb tényezők is. Számuk többnyire alacsony, sőt általában elegendő egyetlen tényező korlátozó szerepét figyelembe venni. Ennek a tényezőnek természetes egységben készült mátrixát a költségekhez és hozamokhoz hasonlóan szintén transzformáljuk a konkrét tábla méret legnagyobb közös osztójának megfelelően.

10. A példaanyag megfogalmazása és megoldása

Az amúgy is nagy terjedelem csökkentése érdekében csak a hypotetikus üzemben tényleges korlátot jelentő kézi munkaerőnek és a termelési célfüggvényt nyújtó bruttó jövedelemnek 70 kh-as legnagyobb közös osztóra redukált mátrixát közöljük. (Lásd 1. és 2. táblázatok.) Ezek a mátrixok magukban foglalják mindazokat az egyszerűsítéseket, amelyek a módszer megértését nem zavarják, de ugyanakkor nem terjednek ki azokra a tényezőkre, amelyek a módszer sokoldalú alkalmazhatóságát reprezentálják.

Feladat: A szántóföldön egyaránt 70 kh-as táblákon termeljük az őszibúzát, rozsot, silókukoricát, lucernát, őszi keveréket, burgonyát és cukorrépát, valamint 140 kh-on kukoricát. Helyezzük el a fenti területű növényeket 9, egyöntetűen 70 kh-asnak vett táblán, amelyek közül a talajminőség szempontjából azonos a 3-as és a 4-es, valamint az 5-ös, 6-os és a 7-es jelzésű tábla, a szállítási távolság szempontjából viszont az 1-es, a 2-es és 3-as, valamint a 4-es, 5-ös, 7-es és a 8-as tábla azonos.

A minimumra fordított (lásd 3. pont) jövedelem mátrix (C) megoldása a kézimunkanap fedezet és szükséglet figyelmen kívül hagyásával 1 616 379 Ft bruttó jövedelmet tesz elérhetővé. Ezen permutációhoz azonban a kézimunkaerő mátrixban 7092 kézimunkanap felhasználás tartozik, ami lényegesen több, mint a rendelkezésre álló 6850 kézimunkanap.

1. TÁBLA. A VÁRHATÓ BRUTTÓ JÖVEDELEM ALAKULÁSÁNAK VARIÁCIÓI

M. e.: Ft

Növény / Táblaszám	Búza	Rozs	Kukorica	Kukorica	Silókukorica	Lucerna	Őszi keverék	Burgonya	Cukorrépa
	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	105,608	51,316	212,329	212,329	193,730	150,607	84,189	547,030	447,587
2	101,241	62,455	205,461	205,461	195,097	113,623	72,797	539,750	314,953
3	21,125	79,244	139,733	139,733	126,579	72,785	16,451	127,394	282,250
4	23,217	80,616	142,047	142,047	135,153	73,520	20,631	130,034	289,524
5	11,478	87,593	144,516	144,516	141,540	95,189	52,148	278,122	140,439
6	18,353	93,279	152,914	152,914	153,180	98,703	58,986	289,224	150,855
7	17,393	92,598	151,614	151,614	148,183	98,097	55,970	287,131	148,629
8	−3,485	59,266	97,736	97,736	81,203	82,507	2,756	279,819	75,004
9	−37,106	21,888	51,909	51,909	57,168	42,931	—9,024	21,196	15,559

2. TÁBLA. A KÜLÖNFÉLE NÖVÉNYEK TÁBLÁNKÉNTI KÉZIMUNKANAP IGÉNYE

M. e.: 10 órás kézimunkanap

Növény / Táblaszám	Búza	Rozs	Kukorica	Kukorica	Silókukorica	Lucerna	Őszi keverék	Burgonya	Cukorrépa
	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	201	137	946	946	428	309	62	1618	2618
2	201	143	946	946	428	269	62	1618	2566
3	150	155	918	918	386	221	62	1276	2553
4	150	155	918	918	386	221	62	1276	2553
5	150	167	925	925	397	253	62	1413	2502
6	150	167	925	925	397	253	62	1413	2502
7	150	167	925	925	397	253	62	1413	2502
8	138	120	903	903	367	237	62	1413	2476
9	114	143	883	883	344	189	62	1173	2451

Az erőforrás mátrix B megoldása 6514 kézimunkanap végeredményhez vezet, és így bizonyítja, hogy létezik a korlátot túl nem lépő megoldás, de a hozzá tartozó bruttó jövedelem értéke csak 738 612 Ft.

Az 5. pontban leírt mátrixkeveréses módszerrel kapott megoldás: $x_{19}=x_{23}= =x_{31}=x_{44}=x_{57}=x_{65}=x_{78}=x_{82}=x_{96}=1$ és a többi változó zérus, azaz mezőgazdasági szempontból a táblák sorrendjében a következő elhelyezést adja: cukorrépa, kukorica, őszibúza, kukorica, őszi keverék, silókukorica, burgonya, rozs, lucerna, miközben a kézimunkaerő felhasználás értéke 6813 kézimunkanap, az előállítható bruttó jövedelem pedig 1 410 876 Ft lesz.

A 3. táblázat az algoritmusban leírt különböző λ_i értékeket és a hozzájuk tartozó permutációs-összeg párokat tartalmazza. Az algoritmus által szolgáltatott legjobb megoldásként kapott elhelyezés, mint láthatjuk, nem pontosan a korlátozó tényező kapacitásának megfelelő nagyságrendű felhasználást igényel, hanem annál kevesebbet, elvileg tehát lehetséges, hogy a számítottnál jobb, a kapacitást tökéletesebben kihasználó megoldás is létezik. A 6. pont szerint számítva az optimális megoldástól való eltérés legfeljebb 39 960 Ft lehet, a jövedelem 2,8 %-a. Ez azonban csak egy felső becslés, lehetséges, hogy a feladatnak nincsen a fentinél jobb megoldása.

3. TÁBLA. A MÁTRIXKEVERÉSES MEGOLDÁS RÉSZEREDMÉNYEI

i	C_i^I	B_i^I	C_i^{II}	B_i^{II}	λ_i
1	3130,054	7,092	—	—	0
2	—	—	3909,722	6,514	
3	3130,054	7,092	3559,879	6,612	1,349
4	3136,685	6,997	3559,879	6,612	895
5	3136,685	6,997	3335,448	6,813	1,099
6	3136,685	6,997	3335,448	6,813	1,080

11. Az eredmények helyességének mezőgazdasági indokolása, módosítások

Elhelyezésünk során a cukorrépa búza-cukorrépa-lucerna talajra, a kukorica búza-kukorica-vöröshere és búza-napraforgó-szegletes lednek talajra, az őszibúza búza-napraforgó-szegletes lednek talajra, az őszi keverék (rozsos-bükköny), a silókukorica és a burgonya rozs-kukorica-baltacim talajra, a rozs rozs-burgonya-somkóró és a lucerna rozs-napraforgó-szöszösbükköny talajra került. Ebben az elhelyezésben mezőgazdasági szempontból két lényegesen kifogásolható pont van, az egyik a burgonyának kukorica talajra helyezése, holott volt a választási lehetőségek között burgonya talaj is, miközben a rozsot számára kevésbé alkalmas talajra szorítja vissza, a másik váratlan eredmény a lucernának az esetünkben előforduló legrosszabb talajra való helyezése.

A burgonya a 7-es táblán nagyobb jövedelmet ad, (7312 Ft-tal), mint a 8-ason, ugyanakkor a rozs is a 7-es táblán ad nagyobb jövedelmet (33 332 Ft-tal), mint a 8-ason. A bruttó jövedelem volumenének összehasonlítása a rozs javára való döntést indokolja, de ugyanakkor a kézimunkaerő igény a burgonyánál mindkét táblán azonos, a rozsnál viszont a 8-as táblán a 7-eshez képest 47 kézimunkanappal kedvezőbb, kisebb. Ez a 47 kézimunkanap a 6850-es erőforrás kapacitás mellett már nem teljesíthető (hiszen $6813+47=6860$), és így a burgonya és rozs táblacseréje bár 26 020 Ft többletjövedelmet hozna, nem hajtható végre.

Hasonló esetben rendkívül fontos, hogy az üzem vezetői a helyi ismeretek birtokában eldöntsék, melyik megoldás adja a magasabb és biztosan elérhető jövedelmet:

— a program nyújtotta elhelyezés, vagy
— a kapacitás valamilyen módon való felemelése — a hozzá tartozó aránytalanul nagy áldozattal — a helycsere kívánta színvonalig. (Korlátnak csak az az erőforrás kapacitás nevezhető, amelyet növelni csak a növelés mértékét lényegesen meghaladó áldozattal lehet!)

Esetünkben nem kétséges a döntés, hiszen a kapcitás 10 kézimunkanappal (alkamazott, időszaki munkás munkábaállítása) való emelése még az általunk elszámolt bér (60 Ft/10 órás kézimunkanap) többszörösével kalkulálva is kifizetődik. A számított optimum nyújtotta 207,08 Ft/kézimunkanap bruttó jövedelmet a kapacitás azonos költségszinten való felemelésével egybekötött helycseréje 209,46 Ft-ra emelheti.

Végül egyetlen nyitott kérdés maradt, a lucerna elhelyezése. A legrosszabb talajon (amennyiben alapmátrixaink megfelelnek a feltételezett helyi viszonyoknak és az 1966. január elsején érvényes árakon kalkulált hozam-ráfordítás arányoknak) a lucernánál nagyobb jövedelmet csak a kukorica és a silókukorica nyújt (8978, illetve 14 237 Ft/70 kh-dal), de ugyanakkor a kézimunkanap igényük lényegesen (694, illetve 155 kézimunkanap/70 kh-dal) nagyobb, olyannyira, hogy helycsere esetén a program végrehajthatatlanná válik. A burgonya-rozs helycserénél alkalmazott mérlegelés a lucerna esetében a kapacitás korlát további növelése ellen dönt. A lucernának bármely másik növénnyel való helycseréje az egy kézimunkanapra jutó jövedelmet — a korlát felemelésével járó áldozatot nem is tekintve — rontaná. Mindezek az 1. és a 2. tábla tüzetes vizsgálatával könnyen beláthatók.

A továbbiakban felmerül annak lehetősége (amely elől természetesen nem zárkózunk el példaanyagunk esetében sem), hogy az üzemi adottságok, a ráfordítás és hozam mátrixok összeállítása során az egyes növényeknek a különféle táblákon való termesztésének kalkulációja a becsült adatok, valamint a kiindulást képező ismeretek kisebb-nagyobb mértékben téves információi folytán hibás. Már viszonylag kisebb eltérés is vezethet a fenti, mezőgazdasági szempontból érthetetlennek tűnő eredményre. A hibás, vagy részhibát tartalmazó anyagból kiinduló bármely számítás is csak hibás eredményhez vezethet. Itt kell tehát felhívnunk a figyelmet arra, hogy az alapmátrixok összeállítása során elkövetett minden pontatlanság, szubjektivitás a számítás során nem küszöbölhető ki, így a végeredményben is megmutatkozik.

Összegezve a fentieket, a mátrix keverésen alapuló közelítő megoldás a korlátozott hozzárendelési probléma gyakorlat számára kielégítő megoldását nyújtja, számítása különösebb matematikai előképzettséget nem igényel, és elektronikus rendszerekkel jól gépesíthető.

*

Köszönetet mondunk LIPTÁK TAMÁSnak a dolgozat gondos áttanulmányozásáért és hasznos tanácsaiért.

IRODALOMJEGYZÉK

Matematikai művek

[1] G. B. DANTZIG: *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey. 1963.
[2] EGERVÁRY J.: Mátrixok kombinatorikus tulajdonságairól, *Matematikai és Fizikai Lapok* **38** (1931).
[3] EGERVÁRY J.: Kombinatorikus módszer a szállítási probléma megoldására, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **4**. (1959). 15—28.
[4] R. E. GOMORY: *An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. Recent Advances in Mathematical Programming.* (Szerk.: R. L. Graves és Ph. Wolfe) McGraw-Hill Book Company, New York, London. 1963.
[5] KÖNIG, D.: Graphok és matrixok, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **38** (1931).
[6] KREKÓ, B.: *Lineáris programozás*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 1962.
[7] H. W. KUHN: The Hungarian Method for the Assignement Problem, *Naval Research Logistics Quarterly* **2** (1955) 83—97.
[I] L. S. GODDARD: *Mathematical Techniques of Operational Research*, Pergamon Press, London 1963. 75—84.
[II] KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA: Mik azok a hozzárendelési problémák? „*10 példa a matematika alkalmazására*" cikkgyűjtemény, Gondolat Kiadó, 1967. 33—54.
[III] A. YASPAN: On Finding a Maximal Assignement, *Operations Research*, **14** (1966). 646—651.
[IV] PRÉKOPA ANDRÁS: *Lineáris programozás* (A Bolyai János Matematikai Társulat Operációkutatási Tanfolyamának jegyzete, sajtó alatt.)
[V] Példa a magyar módszer felhasználására. A. KAUFMAN: *Az optimális programozás.* Műszaki Könyvkiadó, 1964. Függelék 395—397.
[VI] E. BALAS: An Additive Algorithm for Solving Linear Programs With Zero-One Variables, *Operations Research*, **13** (1965). 517—545.
[VII] KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA: *Egészértékű programozás.* (A Bolyai János Matematikai Társulat Operációkutatási Tanfolyamának jegyzete, sajtó alatt.)

Mezőgazdasági művek

[8] *A kiskőrösi járás mezőgazdaságának távlatai.* Szerk.: Csete László. Budapest, 1966. (Kiadás alatt a nagyüzemi gazdálkodás sorozatban.)
[9] CSETE LÁSZLÓ, HALÁSZ KATALIN, NAGYKÁLNAI ENDRE: *Az északbalatoni partvidék termelőszövetkezeti közös gazdaságainak távlati fejlesztése.* Budapest, 1965. (Kézirat) FM Agrárgazdasági Kut. Int. 284 p.

[10] GÉCZY GÁBOR: *Magyarország mezőgazdasági területe.* 1966. (Kiadás alatt).
[11] KÁLLAY KORNÉL: *Az öntözővíz norma. A tápanyagellátás és az öntözés többlettermésének összefüggései.* Budapest, 1965. (Kézirat) 34. p.
[12] NAGYKÁLNAI ENDRE, ZUG JÁNOSNÉ: A termelés területi elhelyezésének és a termésátlagok tervezésének fejlesztése a termelőszövetkezetekben. *Gazdálkodás,* IX. évf. 1965. 3. szám.
[13] *Üzemszervezési útmutató a nagyüzemi növénytermelési munkafolyamatok szervezéséhez.* 1959. FM ÁG-ok Főigazgatósága.

THE RESTRICTED ASSIGNEMENT PROBLEM AND ITS APPLICATION IN ARGICULTURE

by

L. B. KOVÁCS—E. NAGYKÁLNAI

Summary

In this paper an algorithm is presented for an approximating solution of the following problem.

Two matrices C and B, of size $n\times n$ and a constant k are given. It is to be found the

$$\min_{(j_1, j_2, \dots j_n)} (C_{1j_1}+C_{2j_2}+ \dots +C_{nj_n})$$

where the subscripts $j_1, j_2, \dots, j_n$ run over those permutations of the numbers $1, 2, \dots, n$ for wich the inequality

$$b_{1j_1}+b_{2j_2}+ \dots +b_{nj_n} \leqq k$$

holds. The substance of the method is the finding of a minimal assignement in the matrix $C+\lambda B$ for various λ's. The choice of λ's, the estimation of the error and the proof of the finiteness of the procedure is given in points 5 and 6.

The problem has arisen in an agricultural task of an assignement of plants on various fields with a restricted source (money, manpower or machine-power, etc.)

In our hand-solved examples the computations gave a maximal error of 2—3 percent of the total sum. The relative error is supposed to be decreasing by the increasing of the size of the matrices. The paper is completed by the agricultural analysis of an example.

(Beérkezett: 1965. XII. 27.)

A RENDEZETT MINTÁK ELMÉLETÉNEK EGY PROBLÉMAKÖRÉRŐL*

Írta: RÉNYI ALFRÉD

1. §. Bevezetés

1953-ban közölt [1] dolgozatomban több tételt bizonyítottam be az empirikus és az elméleti eloszlásfüggvény relatív eltérésére vonatkozólag. Az azóta eltelt kereken 15 év alatt e problémakörben számos újabb eredményt értek el. E dolgozat ezen vizsgálatokról nyújt áttekintést, egy új eredményt is tartalmaz (lásd 2. § 1. tétel), továbbá új, egyszerűbb bizonyítást ad egyes eredményekre, és felhívja a figyelmet néhány megoldatlan problémára, valamint kitér a szóban forgó eredmények alkalmazási lehetőségeire is.

Legyen $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ egy n elemű minta egy folytonos $F(x)$ eloszlásfüggvényű sokaságból; más szóval legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független és egyforma eloszlású valószínűségi változók. Jelölje $F_n(x)$ a $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ minta empirikus eloszlásfüggvényét, vagyis legyen

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{\xi_k < x \\ 1 \leqq k \leqq n}} 1 \tag{1.1}$$

Legyenek $\xi^*_{n,1} \leqq \xi^*_{n,2} \leqq \dots \leqq \xi^*_{n,n}$ a $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ minta elemei nagyság szerint elrendezve. Nyilvánvaló, hogy

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqq \xi^*_{n,1} \\ \dfrac{k}{n} & \text{ha} \quad \xi^*_{n,k} < x \leqq \xi^*_{n,k+1} \qquad (1 \leqq k \leqq n-1) \\ 1 & \text{ha} \quad \xi^*_{n,n} < x. \end{cases} \tag{1.2}$$

Így tehát $F_n(x)$ minden rögzített x-re egy valószínűségi változó. V. I. GLIVENKO jólismert tétele ([2]; lásd továbbá [25] 333. o.) szerint a $\sup\limits_x |F_n(x) - F(x)|$ eltérés 1 valószínűséggel 0-hoz tart, ha $n \to +\infty$; N. V. SZMIRNOV [3] és A. N. KOLMOGOROV [4] ismert tételei szerint

$$\lim_{n \to +\infty} P(\sqrt{n} \sup_x (F_n(x) - F(x)) < y) = \begin{cases} 1 - e^{-2y^2} & \text{ha} \quad y > 0 \\ 0 & \text{ha} \quad y \leqq 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

és

$$\lim_{n \to +\infty} P(\sqrt{n} \sup_x |F_n(x) - F(x)| < y) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 y^2} & \text{ha} \quad y > 0 \\ 0 & \text{ha} \quad y \leqq 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

* E dolgozat a szerzőnek a Nemzetközi Statisztikai Intézet 1967 szeptemberében Sydneyben megrendezett 36. ülésszakán tartott előadásának szövegét tartalmazza.

Azt a tényt, hogy $F_n(x)$ konvergál $F(x)$-hez, ha $n \to \infty$, kifejezhetjük úgy is, hogy az $\frac{F_n(x)}{F(x)}$ hányados 1-hez tart, ha $n \to \infty$, minden egyes olyan rögzített x-re, amelyre $F(x) > 0$. Azonban $\frac{F_n(x)}{F(x)}$ nem tart x-ben egyenletesen 1-hez, ha $n \to \infty$. Fennáll ugyanis a következő tétel:

$$P\left(\sup_{0<F(x)} \frac{F_n(x)}{F(x)} > 1+\varepsilon\right) = \frac{1}{1+\varepsilon} \quad \text{ha} \quad \varepsilon \geqq 0. \tag{1.5}$$

Az (1.5) tételt először H. E. DANIELS bizonyította be (lásd [5], (12.2) képlet) 1945-ben, fonalkötegek erősségének statisztikai elméletére vonatkozó vizsgálatai során. A feltűnően egyszerű és tetszetős (1.5) összefüggést (amelyben különösen az a meglepő, hogy a $\sup\limits_{0<F(x)} \frac{F_n(x)}{F(x)}$ mennyiség eloszlása nem függ n-től) DANIELStől függetlenül többen újra felfedezték, így H. ROBBINS [6], CHANG LI CHIEN [7], CHAPMAN [8] és DEMPSTER [22]. Az (1.5) tételre a 2. §-ban egy egyszerű új bizonyítást adunk. GLIVENKO említett tételéből nyilvánvalóan következik, hogy ha x-nek csak olyan értékeire szorítkozunk, amelyekre $F(x) \geqq a > 0$, ahol a egy rögzített (n-től nem függő) szám ($0 < a < 1$), akkor ezen intervallumon $\frac{F_n(x)}{F(x)}$ x-ben egyenletesen tart 1 valószínűséggel 1-hez. Ezen túlmenőleg, mint azt az [1] dolgozatban megmutattam, KOLMOGOROV és SZMIRNOV fent említett tételeinek következő, $F_n(x)$ és $F(x)$ *relatív* eltérésére vonatkozó analogonjai állnak fenn:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\sqrt{n} \sup_{a \leqq F(x)} \frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)} < y\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{y\sqrt{\frac{a}{1-a}}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt & \text{ha} \quad y > 0 \\ 0 & \text{ha} \quad y \leqq 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

(1.7)

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\sqrt{n} \sup_{a \leqq F(x)} \frac{|F_n(x) - F(x)|}{F(x)} < y\right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 (1-a)}{8y^2 a}}}{2k+1} & \text{ha} \quad y > 0 \\ 0 & \text{ha} \quad y \leqq 0 \end{cases}$$

hacsak $0 < a < 1$.

Az [1] dolgozatban ennél általánosabb tételek is találhatók, amelyekben az $F(x) \geqq a > 0$ feltétel helyett az $a \leqq F(x) \leqq b$ megszorítás szerepel, ahol $0 < a < b < 1$.

A módszer, amellyel [1]-ben ezen eredményeket bebizonyítottuk, az alábbi 1. lemmán alapszik:

1. LEMMA. *A* $\xi^*_{n,k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *változók előállíthatók a*

$$\xi^*_{n,k} = F^{-1}\left(\exp\left(-\sum_{j=0}^{n-k} \frac{\delta_j}{n-j}\right)\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.8}$$

alakban, ahol $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ *független,* 1 *várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, vagyis* $P(\delta_j < x) = 1 - e^{-x}$, *ha* $x \geqq 0$.

Az 1. lemma jelentősége abban áll, hogy segítségével a rendezett minták vizsgálata visszavezethető független valószínűségi változók összegeinek vizsgálatára. (A szóban forgó módszerrel kapcsolatban lásd a [9] és [18] dolgozatokat is.)

A rendezett minták elméletének egy másik egyszerű, de alapvető eredménye (lásd [10]), amelyet a következőkben ismételten használni fogunk, a következő:

2. LEMMA *Legyen* $\eta_k = F(\xi_k)$ *és* $\eta^*_{n,k} = F(\xi^*_{n,k})$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. *Akkor az* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *változók egyenletes eloszlásúak a* $(0, 1)$ *intervallumban és az* $\eta^*_{n,k+1} = c$ $(0 < c < 1)$ *feltétel mellett az* $\frac{\eta^*_{n,1}}{c}, \ldots, \frac{\eta^*_{n,k}}{c}$ *változók együttes eloszlása megegyezik egy a* $(0, 1)$ *intervallumban egyenletes eloszlásból vett* k *elemű rendezett minta eloszlásával, ha* $1 \leqq k \leqq n-1$, *míg az* $\frac{\eta^*_{n,k+2} - c}{1-c}, \ldots, \frac{\eta^*_{n,n} - c}{1-c}$ *változók együttes eloszlása megegyezik egy a* $(0, 1)$ *intervallumban egyenletes eloszlásból vett* $n-k-1$ *elemű rendezett minta eloszlásával, ha* $0 \leqq k \leqq n-2$, *és e két minta független egymástól.*

2. §. Néhány eloszlás pontos meghatározása

Először egy egyszerű bizonyítást adunk az (1. 5) összefüggésre. Ha $\eta^*_{n,1} > 0$ (ami 1 valószínűséggel teljesül), akkor nyilván

$$\sup_{0 < F(x)} \frac{F_n(x)}{F(x)} = \max_{1 \leqq k \leqq n} \frac{k}{n\eta^*_{n,k}} = \left(\min_{1 \leqq k \leqq n} \frac{n\eta^*_{n,k}}{k} \right)^{-1}. \tag{2.1}$$

Így, bevezetve a

$$G_n(t) = P\left(\sup_{0 < F(x)} \frac{F_n(x)}{F(x)} < \frac{1}{t} \right) \qquad (t > 0) \tag{2.2}$$

jelölést, azt kapjuk, hogy

$$G_n(t) = P\left(\min_{1 \leqq k \leqq n} \frac{n\eta^*_{n,k}}{k} > t \right). \tag{2.3}$$

Felhasználva a 2. lemmát, és azt, hogy $\eta^*_{n,n}$ sűrűségfüggvénye ny^{n-1} $(0 < y < 1)$, a $G_n(t)$ függvényekre a következő rekurzív összefüggést nyerjük:

$$G_n(t) = \int_t^1 G_{n-1}\left(\frac{(n-1)t}{ny} \right) ny^{n-1}\, dy. \tag{2.4}$$

Mármost nyilván fennáll, hogy

$$G_1(t) = P(\eta^*_{1,1} > t) = 1 - t \qquad (0 \leqq t \leqq 1) \tag{2.5}$$

és így (2. 4)-ből a

$$G_n(t) = 1 - t \qquad (0 \leqq t \leqq 1) \quad \text{ha} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

összefüggés teljes indukcióval következik.

Nyilvánvaló, hogy 1 valószínűséggel $\inf\limits_{F(x)>0} \frac{F_n(x)}{F(x)} = 0$; azonban, ha az $F(x)>0$ feltétel helyett az $F_n(x)>0$ feltételt vezetjük be, vagyis, ha az $\inf\limits_{F_n(x)>0} \frac{F_n(x)}{F(x)}$ mennyiséget vizsgáljuk, meg lehet mutatni, hogy e mennyiségnek nemtriviális határeloszlása van, ha $n \to \infty$, mégpedig a következő tétel érvényes (lásd [7]):

$$(2.7) \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(\inf_{F_n(x)>0} \frac{F_n(x)}{F(x)} < \frac{1}{t}\right) = e^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^{k-1}(te^{-t})^k}{k!} \quad \text{ha} \quad t>0.$$

A (2. 7) összefüggésre a következőkben egy új, egyszerű bizonyítást fogunk adni.

Nyilvánvaló, hogy 1 valószínűséggel fennáll az

$$(2.8) \qquad \inf_{F_n(x)>0} \frac{F_n(x)}{F(x)} = \left(\max_{1\le k\le n-1} \frac{n\eta^*_{n,k+1}}{k}\right)^{-1}$$

egyenlőség. Így (2. 7) a következő ekvivalens alakra hozható:

$$(2.9) \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(\max_{1\le k\le n-1} \frac{n\eta^*_{n,k+1}}{k} > t\right) = e^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^{k-1}(te^{-t})^k}{k!}$$

ha $t>0$. Könnyen be lehet látni, pl. a hatványsorok inverz függvényére vonatkozó ún. BÜRMAN—LAGRANGE képlet segítségével (lásd [21]), hogy

$$(2.10) \qquad e^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^{k-1}}{k!}(te^{-t})^k = 1, \quad \text{ha} \quad 0 \le t \le 1.$$

A (2. 7) összefüggés (2. 9) alakban való átírása felveti a következő kérdést: mi a $\max\limits_{1\le k\le n} \frac{n\cdot\eta^*_{n,k}}{k}$ mennyiség határeloszlása, ha $n \to +\infty$?

E kérdésre (amelyet tudomásunk szerint eddig nem vizsgáltak) ad választ a következő

1. TÉTEL

$$(2.11) \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(\max_{1\le k\le n} \frac{n\eta^*_{n,k}}{k} > t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k e^{-(k+1)t}(k+1)^{k-1}}{k!} \quad \text{ha} \quad t\ge 0.$$

Megjegyzendő, hogy fennáll a következő azonosság (lásd [21])

$$(2.12) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k e^{-(k+1)t}(k+1)^{k-1}}{k!} = 1 \quad \text{ha} \quad 0 \le t \le 1.$$

A

$$\sup_{a\le F(x)} \frac{F_n(x)}{F(x)} \quad \text{és} \quad \inf_{a\le F(x)} \frac{F_n(x)}{F(x)}$$

mennyiségek pontos eloszlását minden n-re GORO ISHI [11] határozta meg, többdimenziós integrálok kiszámítása útján. Ezen eloszlások meghatározására N. V. SZMIRNOV [12] egy egyszerűbb utat talált, amely a következő lemmán alapszik (lásd [17]-et is):

3. LEMMA. *Ha* $0<p<1$ *és* $n\geqq 2$, *akkor*

$$P\left(\eta^*_{n,k} \leqq p+\frac{(k-1)(1-p)}{n-1} \text{ ha } 1\leqq k\leqq n-1\right)=p\left(1+\frac{1-p}{n-1}\right)^{n-1} \tag{2.13}$$

Először a 3. lemmára adunk egy új bizonyítást. Legyen

$$P_n(p)=P\left(\eta^*_{n,k}\leqq p+\frac{(k-1)(1-p)}{n-1} \text{ ha } 1\leqq k\leqq n-1\right) \tag{2.14}$$

A 2. lemma segítségével, figyelembe véve, hogy $\eta^*_{n,1}$ sűrűségfüggvénye $n(1-y)^{n-1}$ $(0<y<1)$, nyerjük, a

$$P_n(p)=\int_0^p n(1-y)^{n-1}P_{n-1}\left(\frac{p-y+\frac{1-p}{n-1}}{1-y}\right)dy, \quad n=3,4,\dots \tag{2.15}$$

rekurziós formulát. Mivel $P_2(p)=P(\eta^*_{2,1}\leqq p)=p(1+(1-p))$, tehát a

$$P_n(p)=p\left(1+\frac{1-p}{n-1}\right)^{n-1} \tag{2.16}$$

képlet (2. 15)-ből teljes indukcióval adódik.

Felhasználva a 2. és 3. lemmát, SZMIRNOVot követve nyerjük a következő lemmát:

4. LEMMA. *Legyen*

$$P_{n,s}(a,b)=P(\eta^*_{n,k}\leqq a+(k-1)b \text{ ha } 1\leqq k\leqq s,\ \eta^*_{n,s+1}>a+sb), \tag{2.17}$$

akkor

$$P_{n,s}(a,b)=\binom{n}{s}a(a+sb)^{s-1}(1-a-sb)^{n-s} \tag{2.18}$$

ha $s=0,1,\dots,n,\ a>0,\ b>0,\ a+sb<1$.

MEGJEGYZÉS. A 4. lemma korolláriumaként adódik az alábbi — N. H. ABELtől származó — azonosság:

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}a(a+sb)^{s-1}(1-a-sb)^{n-s}=1 \tag{2.19}$$

A (2. 19) azonosság a binomiális tétel általánosításának tekinthető, mivel a $b=0$ esetben a binomiális tételre redukálódik.

Ezekután rátérhetünk (2. 9) és (2. 11) bizonyítására.

Nyilván fennáll, hogy

$$P\left(\max_{1\leqq k\leqq n}\frac{n\eta^*_{n,k}}{k}>t\right)=\sum_{s=0}^{n-1}P\left(\eta^*_{n,k}\leqq\frac{kt}{n} \text{ ha } 1\leqq k\leqq s,\quad \eta^*_{n,s+1}>\frac{(s+1)t}{n}\right),$$

ha $t>0$. Így a 4. lemmából

$$P\left(\max_{1\leqq k\leqq n}\frac{n\eta^*_{n,k}}{k}>t\right)=\sum_{s=0}^{n-1}\binom{n}{s}\left(\frac{t}{n}\right)^s(s+1)^{s-1}\left(1-\frac{(s+1)t}{n}\right)^{n-s}, \tag{2.20}$$

ha $t>0$. Elvégezve az $n\to+\infty$ határátmenetet, nyerjük (2. 11)-et. Hasonlóképpen a 4. lemmából nyerjük a

(2.21)
$$P\left(n \max_{1\le k\le n-1} \frac{\eta^*_{n,k+1}}{k} > t\right) =$$
$$= \left(1-\frac{t}{n}\right)^n + \int_0^{\frac{t}{n}} n(1-y)^{n-1}\left[\sum_{s=0}^{n-2} P_{n-1,s}\left(\frac{\frac{t}{n}-y}{1-y}, \frac{t}{n(1-y)}\right)\right] dy$$

ha $t>0$, összefüggést; elvégezve (2. 21)-ben az $n\to+\infty$ határátmenetet, kapjuk, hogy

(2.22)
$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\max_{1\le k\le n-1} \frac{n\eta^*_{n,k+1}}{k} > t\right) = e^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(te^{-t})^k (k-1)^{k-1}}{k!}, \quad \text{ha} \quad t>0.$$

Ez pedig azonos (2. 9) összefüggéssel.

E módszerrel meg lehetne határozni $\sup\limits_{F(x)>0} \dfrac{|F_n(x)-F(x)|}{F(x)}$ eloszlását is.

3. §. Különböző általánosítások

Ismeretes, hogy KOLMOGOROV és SZMIRNOV tételei általánosíthatók két minta eltérésére. A megfelelő általánosítást a *relatív* eltérésekre az egyoldalú eltéréseket illetően WANG SHOU-JEN végezte el [13], a kétoldali eltérésre nézve a feladatot CSÖRGŐ Miklós [14] oldotta meg. Az eddig tárgyalt vizsgálatokban mindvégig fel volt téve, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvény folytonos. A KOLMOGOROV—SZMIRNOV tételeket, valamint a szerző (1. 6) és (1. 7) tételeit nemfolytonos eloszlásokra P. SCHMID [15] és H. CARNAL [16] általánosították.

CSÖRGŐ Miklós az (1. 6) és (1. 7) tételek további variánsait [19], [20], [23] adta, további új bizonyítást adott az (1. 6) és (1. 7) tételekre (lásd [24]). Ezen új bizonyítás a szóban forgó tételeket GAUSS-folyamatokra vonatkozó állításokra vezeti vissza, J. L. DOOB [26] a KOLMOGOROV—SZMIRNOV tételekkel kapcsolatban felvetett gondolatát követve. E tételeknek bizonyos értelemben ez a legtermészetesebb (bár nem a legelemibb) bizonyítása. A [19] dolgozatban CSÖRGŐ megjegyzi, hogy az (1. 6) és (1. 7) tételek érvényesek maradnak akkor is, ha az $\dfrac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}$ hányados helyébe az $\dfrac{F_n(x)-F(x)}{F_n(x)}$ hányadost írjuk.

Ami (1. 6)-ot illeti, ez leolvasható az alábbi azonosságból:

$$P\left(\sqrt{n} \sup_{a\le F_n(x)} \frac{F_n(x)-F(x)}{F_n(x)} < y\right) = P\left(\sqrt{n} \sup_{a\le F_n(x)} \frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)} < \frac{y}{1-\frac{y}{\sqrt{n}}}\right).$$

Az (1. 7) tétel megfelelő módosítása hasonlóan látható be.

A [20] és [23] dolgozatokban CSÖRGŐ a következő általánosítással foglalkozik: Legyen adva ugyanabból a folytonos $F(x)$ eloszlásfüggvényű sokaságból vett

r darab független, rendre $n_1, \ldots, n_r$ elemszámú minta; legyenek $F_{n_1}(x), \ldots, F_{n_r}(x)$ e minták empirikus eloszlásfüggvényei.

Vizsgáljuk a $\sqrt{N} \cdot \sup\limits_{\alpha < F(x)} \dfrac{\prod\limits_{j=1}^{r} F_{n_j}(x) - F^r(x)}{F^r(x)}$ mennyiséget, ahol $N^{-1} = \sum\limits_{j=1}^{r} n_j^{-1}$. Ha $n_1, \ldots, n_r$ úgy tartanak egyidejűleg $+\infty$-hez, hogy a $\lim \dfrac{n_1}{n_j} = \varrho_j$ határértékek léteznek és pozitívak, akkor az említett mennyiségnek ugyanaz a határeloszlása, mint az, ami (1. 6) jobb oldalán szerepel.

4. §. Néhány további megjegyzés

Mint arra már az [1] dolgozatban rámutattam, az $\dfrac{F_n(x)}{F(x)}$ hányadoson alapuló próbák egyik előnye az $F_n(x) - F(x)$ különbségen alapuló próbákkal szemben az, hogy e próbák a relatív hibát vizsgálják az abszolút hiba helyett, a numerikus analízis általános elveinek megfelelően. Ma is nyitott kérdés azonban, hogy a relatív eltérésre vonatkozó próbák ereje hogyan viszonylik a KOLMOGOROV—SZMIRNOV-féle próbák erejéhez.

Egy másik szempont, amely a $\sup\limits_{a \leq F(x) \leq b} \dfrac{|F_n(x) - F(x)|}{F(x)}$ mennyiségen alapuló próbák használatát indokolhatja, az, hogy igen gyakran csak csonkított minta áll rendelkezésünkre, más szóval a minta igen nagy vagy igen kis elemeinek pontos értéke nem áll rendelkezésünkre. ISHII mutatott rá nyomatékosan, hogy az élettartam-eloszlás vizsgálatánál legtöbbször ez a helyzet.

Ami a CSÖRGŐ által vizsgált $\sqrt{N} \cdot \sup\limits_{a < F(x)} \dfrac{\prod\limits_{j=1}^{r} F_{n_j}(x) - F^r(x)}{F^r(x)}$ mennyiséget illeti, természetszerűleg felmerül a kérdés, hogy nem előnyösebb-e az r mintát egyetlen nagy mintává egyesíteni?

Úgy sejtem, hogy az utóbbi esetben a próba ereje általában nagyobb lesz; ennek ellenére gyakorlati szempontból előnyösebb lehet a minták egyesítésétől eltekinteni, különösen, ha ilyen módon túl nagy mintát kapnánk, ahol az elemek nagyság szerinti rendezése nagyobb munkát jelent, mint sok kis minta elemeinek nagyság szerinti rendezése. BÉKÉSSY András hívta fel a figyelmemet arra, hogy ilyen helyzet fordul elő pl. véletlen számgenerátorok minőségellenőrzésénél.

(Beérkezett: 1967. IX. 11.)

IRODALOMJEGYZÉK

[1] A. Rényi, On the theory of order statistics, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953) 191—231.

[2] V. I. Glivenko, Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita, *Giornale Ist. Ital. Attuary* **4** (1933) 92—99.

[3] N. V. Smirnov, Über die Verteilung des allgemeinen Gliedes in der Variationsreihe, *Metron*, **12** (1935) 59—81.

[4] A. N. Kolmogorov, Sulle determinazione empirica di una legge di distribuzione, *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **4** (1933) 83—91.

[5] H. E. Daniels, The statistical theory of the strength of bundles of threads, *I. Proceedings of the Royal Society, Ser. A.* **183** (1945) 405—435.

[6] H. Robbins, *Annals of Math. Stat.* **25** (1954) 409.

[7] Chang Li Chien, On the ratio of an empirical distribution function to the theoretical distribution function. (Kínai nyelven, angol kivonattal). *Acta Math. Sinica* **5** (1955) 437—368.

[8] Chapman, P. G.: On a limiting distribution due to Rényi, *Annals of Math. Stat.* **29** (1958) 1282.

[9] M. M. Rao, Theory of order statistics, *Math. Annalen* **147** (1962) 298—312.

[10] Hajós Gy.—Rényi A., Elemi bizonyítások a rendezett minták elméletének néhány alapvető összefüggésére, *MTA III. o. Közleményei.* **4** (1954) 467—472.

[11] Goro Ishii, On the exact probabilities of Rényi's tests. *Ann. Inst. Stat. Math.* **11** (1959) 17—24.

[12] N. V. Smirnov, The probability of large values of one-sided non-parametric tests of goodness of fit (oroszul), *Trudy Mat. Inst. Steklov*, **64** (1961) 185—210.

[13] Wang Shou-Jen, On the limiting distribution of the ratio of two empirical distributions. (Kínai nyelven, angol kivonattal) *Acta. Math. Sinica* **4** (1955) 253—267.

[14] M. Csörgő, Some Smirnov-type theorems of probability theory, *Annals of Math. Stat.* **36** (1965) 1113—1119.

[15] P. Schmid, On the Kolmogorov and Smirnov limit theorems for discontinuous distribution functions, *Annals of Math. Stat.* **29** (1958) 1011—1027.

[16] H. Carnal, Sur les théorèmes de Kolmogoroff et Smirnoff dans le cas d'une distribution discontinue, *Comm. Math. Helv.* **37** (1962) 19—35.

[17] W. Nef, Über die Differenz zwischen theoretischer und empirischer Verteilungsfunktion, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **3** (1964) 154—163.

[18] G. Blom, *Statistical estimates and transformed beta-variables* Wiley, New York, 1958.

[19] M. Csörgő, Some Rényi-type limit theorems for empirical distribution functions, *Annals of Math. Stat.* **36** (1965) 322—326.

[20] M. Csörgő, k-sample analogues of Rényi's Kolmogorov—Smirnov-type theorems (in print).

[21] G. Pólya—G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Springer, Berlin, 1925,Vol. I. p. 125.

[22] A. P. Dempster, *Annals of Math. Stat.* **30** (1959) 593—596.

[23] M. Csörgő, Some k-sample Kolmogorov—Smirnov—Rényi-type theorems for empirical distribution functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **17** (1966) 325—334.

[24] M. Csörgő, A new proof of some results of Rényi and the asymptotic distribution of the range of his Kolmogorov—Smirnov-type random variables, *Canadian Journal Math.* **19** (1967) 550—558.

[25] Rényi A., *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Bp., 1966.

[26] J. L. Doob, Heuristic approach to the Kolmogorov—Smirnov theorems, *Annals of Math. Stat.* **20** (1949) 393.

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE LA THÉORIE DES OBSERVATIONS ORDONNÉES

par Alfréd Rényi

Résumé

L'auteur a publié en 1953 un travail sur le quotient du fonction de répartition empirique et théorique d'un échantillon. Depuis on a obtenu des nombreux résultats dans ce domain. La note présent donne une synthese de ce developpement et des demonstrations nouvelles simples pour certaines theorèmes. Quelques problèmes encore non resolus sont mentionnées et certaines remarques sont faites sur l'application des resultats en question.

GAUSS-FÜGGVÉNY KEVERÉKEK NUMERIKUS FELBONTÁSÁRA SZOLGÁLÓ EGYIK ELJÁRÁS JAVÍTÁSÁRÓL

Írta: MEDGYESSY PÁL és VARGA LÁSZLÓ

1.

Legyen az $f(x)$ függvény

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{(x-\alpha_k)^2}{4\beta_k}}}{\sqrt{4\pi\beta_k}} \tag{1.1}$$

$(p_k > 0,\ 0 < \beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \ldots \leqq \beta_N,\ (\alpha_i, \beta_i) \neq (\alpha_l, \beta_l);\ i, l = 1, 2, \ldots, N;\ i \neq l)$ alakú. Ekkor az $f(x)$ függvényt az $\exp[-(x-\alpha_k)^2/4\beta_k]/\sqrt{4\pi\beta_k} \equiv f_k(x)$ normális sűrűségfüggvény-*komponensek* p_k *súlyokkal* vett *keverékének* nevezzük. ([1]-ben a „szuperpozíció" elnevezést használtuk.)[1]

Legyen adott $f(x)$ grafikonja. Egy olyan numerikus eljárást, mely az N, p_k, α_k, β_k paraméterek (vagy egy részük) értékének az adott grafikon segítségével történő *közelítő* meghatározására szolgál, a keverék *felbontásának* nevezünk.

A leggyakoribb ilyen eljárás a következő (vö. [1]). $f(x)$ adott értékeinek felhasználásával előállítjuk az

$$f(x; \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{(x-\alpha_k)^2}{4(\beta_k-\lambda)}}}{\sqrt{4\pi(\beta_k-\lambda)}} \qquad (0 < \lambda < \beta_1) \tag{1.2}$$

ún. *tesztfüggvény* valamilyen jó közelítésének grafikonját, vigyázva arra, hogy $0 < \lambda < \beta_1$ fennálljon. $f(x; \lambda)$ ismét normális sűrűségfüggvények keveréke, de benne az $\exp[-(x-\alpha_k)^2/4(\beta_k-\lambda)]/\sqrt{4\pi(\beta_k-\lambda)} \equiv f_k(x; \lambda)$ komponensek szórásai kisebbek, mint az $f(x)$ keverékben, így azután remélhető, hogy $f(x; \lambda)$ említett közelítésének grafikonjában az α_k helyeken csúcsok fognak mutatkozni. A különvált csúcsokból a komponensek számára, azok maximumhelyére stb. következtethetünk — és ezzel elvileg elértük $f(x)$ felbontását.

A fő feladat tehát $f(x; \lambda)$ említett közelítésének előállítása. Erre számos módszert dolgoztak ki (vö. [2]), ezek végrehajtásakor azonban belépnek az $f(x)$ függvény mérési hibái is.[2] A hibák jelentkezését úgy fogjuk fel, mintha az $f(x)$ függvényre valamilyen, tágabb értelemben stacionárius sztochasztikus folyamatnak feltételezett $\xi(x)$ *zaj* egy $z(x)$ realizációja rakódott volna rá, vagyis abból indulunk ki, hogy $f(x)$ helyett az $f(x)+z(x)$ függvény értékei állnak rendelkezésünkre (ezeket mérjük le az adott grafikonról).

[1] Megjegyezzük, hogy meggondolásaink számos más keveréktípus (pl. ún. stabilis sűrűségfüggvények keveréke) esetén is érvényesek. Szemléletesebbnek látszott azonban a gyakorlatban legfontosabb (1. 1) típuson mutatni be őket.

[2] Az itteni problémák felvethetők akkor is, ha $f(x)$ csak *közelítőleg* (1. 1) alakú, ti. az eltérés beleolvasztható az említett hibákba.

Sajnos, az említett módszerek nagyon érzékenyek a zajra, ezért szükség van olyan numerikus eljárásra, amely $f(x;\lambda)$ közelítését az $f(x)+z(x)$ értékek alapján előállítja, de a zajra kevéssé érzékeny.

Egy ilyen eljárással foglalkozunk ebben a dolgozatban.

2.

Az $f(x;\lambda)$ függvény könnyen kifejezhető $f(x)$ *Fourier*-transzformáltjával; ti. fennáll (lásd [1], 80. o.), hogy

$$\begin{aligned} f(x;\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega}e^{\lambda\omega^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega y}\,dy\right)d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega}e^{\lambda\omega^2}F(\omega)\,d\omega \qquad (0<\lambda<\beta_1), \end{aligned} \tag{2. 1}$$

ahol $F(\omega)$-val $f(x)$ *Fourier*-transzformáltját jelöltük.

Nézzük a valóságos helyzetet: a *Fourier*-transzformációt az $f(x)$ függvény helyett az $f^*(x)=f(x)+z(x)$ függvényen hajtjuk végre, vagyis — az elektronika nyelvén szólva — előállítjuk annak *spektrumát.* Míg $f(x)$ spektruma „gyorsan" csökken, a zaj spektruma hozzá képest többnyire csak lassan változik. Ha tehát egy jól megválasztott „szűrőt" alkalmazunk — az elektronikában szokásos értelemben és módon — és a (2. 1)-ben szereplő második lépést — szorzás $\exp(\lambda\omega^2)$-tel, és inverz *Fourier*-transzformáció — a megszűrt spektrumon hajtjuk végre, okvetlenül a zaj zavaró hatásának bizonyos fokú kiküszöbölésével kapjuk meg $f(x;\lambda)$ egy közelítését.

A mondottak analitikus formában a következőt jelentik:

Legyen az említett szűrő $D(\omega)$. Jelölje $f^*(x)$ *Fourier*-transzformáltját $F^*(\omega)$. Ekkor (formálisan) $F^*(\omega)=F(\omega)+Z(\omega)$, ahol $Z(\omega)$ $z(x)$ *Fourier*-transzformáltja. $f(x;\lambda)$ említett közelítése

$$f^*(x;\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega}e^{\lambda\omega^2}D(\omega)F^*(\omega)\,d\omega \qquad (0<\lambda<\beta_1). \tag{2. 2}$$

Ha az $\exp(\lambda\omega^2)\cdot D(\omega)$ szorzatnak létezik az inverz *Fourier*-transzformáltja,

$$M(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega}e^{\lambda\omega^2}D(\omega)\,d\omega, \tag{2. 3}$$

(2. 2) a következő alakban is felírható:

$$f^*(x;\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} M(x-t)f^*(t)\,dt.\ ^3 \tag{2. 4}$$

[3] Ennek egy speciális esete vázlatosan [1] 181. oldalán is megtalálható már.

(2. 4) folytán a feladat ilyen megfogalmazásban szerves kapcsolatba került a [3] dolgozat eredményeivel. Abban arról van szó, hogyan állítható elő bizonyos keverékek esetében (1. 2)-höz hasonló tulajdonságú tesztfüggvény egyetlen konvolúciós integrál alakjában, azon megkötés mellett, hogy a felbontandó keverék, illetve tesztfüggvény komponensei egyaránt *egycsúcsú sűrűségfüggvények.*

Mi most a feladatot a (2. 2) formula szerint kívánjuk megoldani, és a továbbiakban az erre alkalmas numerikus módszer, valamint a szűrő megválasztásával foglalkozunk.

3.

Legyenek az $f^*(x)$ függvény értékei ekvidisztans x_k értékeknél adottak ($x_k = x_0 + k\Delta x$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Ismeretes (lásd pl. [4]), hogy minden olyan $g(x)$-re, amelynek *Fourier*-transzformáltja, $G(\omega)$, zérus minden $|\omega| > \pi/\Delta x$ esetén, a trapézformula a $-\pi/\Delta x \leqq \omega \leqq \pi/\Delta x$ intervallumban $G(\omega)$ pontos értékét szolgáltatja, azaz

$$G(\omega) = \Delta x \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(x_k) e^{i\omega(x_0 + k\Delta x)} \qquad (-\pi/\Delta x \leqq \omega \leqq \pi/\Delta x). \tag{3. 1}$$

A mi esetünkben $F^*(\omega)$ első része, $F(\omega)$ ugyan nem tűnik el egy $-\omega_0 \leqq \omega \leqq \omega_0$ intervallumon kívül, de ω növekedésével elég rohamosan csökken, ugyanis

$$F(\omega) = \sum_{k=1}^{N} p_k e^{i\alpha_k\omega - \beta_k\omega^2} \tag{3. 2}$$

és így például $\Delta x = \sqrt{2\beta_1}$ esetén $|\omega| \leqq \pi/\Delta x$-nél az 1-es indexű komponens spektrumának első eltolásából ($k = \pm 1$) adódó járuléka kisebb, mint $\exp(-4, 9) \approx 10^{-2}$, ezért $F^*(\omega)$ kiszámítására alkalmas numerikus módszernek látszik a trapézformula. Megállapodunk abban, hogy a (2. 2) integrált is ugyanilyen trapézformulával számítjuk ki közelítőleg. Az előbbiek alapján elfogadható, hogy esetünkben a trapézformulában felhasználandó $f^*(x)$ értékeknek nem kell túl sűrűn elhelyezkedniök.

Már $F^*(\omega)$ kiszámításakor két hibaforrás fogja azt $F(\omega)$-tól különbözővé tenni. Az egyik hiba abból származik, hogy az $f^*(x)$ értékek a $z(x)$ zajjal terheltek, a másik hiba pedig abból adódik, hogy a trapézformulát csak véges tagszámmal alkalmazhatjuk. Az utóbbi hibával itt nem kívánunk külön foglalkozni. Feltételezzük, hogy az $f^*(x)$ függvény értékei abból az intervallumból valók, amelyben még a zaj nem „dominál" a függvényértékekhez viszonyítva.

Vizsgáljuk meg ezután a zaj kiszűrésének kérdését.

Mindenekelőtt nyilvánvaló, hogy minél kisebb frekvenciáknál levágó szűrőt alkalmazunk; így nagyobb részét fogjuk a zajnak kiszűrni. Viszont $f(x; \lambda)$ jó közelítéssel való előállításához — különösen ha λ megközelíti β_1-et — fel kell használni $f(x; \lambda)$ spektrumának elég nagy frekvenciák tartományába eső részét is. A helyes szűrő megválasztása tehát kompromisszum eredménye lehet csak a hasznos jel egy részének kiszűrése folytán behozott hiba és a zaj megmaradó részétől származó hiba között.

Mivel lineáris transzformációk alkalmazásáról van szó, vizsgáljuk meg az említett hibák hatását külön-külön. Vizsgáljuk meg először a szűrő hatását a hasznos jel $(f(x))$ szempontjából. Tekintsük a legegyszerűbb egyparaméteres szűrősereget:

$$D(\omega) \equiv D(\omega, \omega_0) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leqq \omega_0 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{3. 3}$$

Elég a szűrő hatását egy tetszőleges normális sűrűségfüggvény-komponens $(f_k(x))$ esetén vizsgálni, mivel a keverékben az egyes komponensekben mutatkozó hibák egyszerűen összeadódnak. Tételezzük fel, hogy az $f_k(x)$ k-adik komponens esetében alkalmazzuk a (3. 3) típusú szűrőt, vagyis tekintsük az ekkor kapott $f^*(x; \lambda)$ k-adik komponensét, az

$$\hat{f}_k(x; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} M(x-t) f_k(t)\, dt \qquad (0 < \lambda < \beta_1)$$

függvényt $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Először is megmutatjuk, hogy $D(\omega, \omega_0)$ alkalmazása esetén az $\hat{f}_k(x; \lambda)$ komponensek — a paraméterek bizonyos értékei mellett — nem maradnak (egycsúcsú) sűrűségfüggvények.

Állításunk a következőképpen látható be. $\hat{f}_k(x; \lambda)$ az alábbi függvény:

$$\begin{aligned} \hat{f}_k(x; \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{-ix\omega} e^{\lambda\omega^2} e^{i\alpha_k\omega - \beta_k\omega^2}\, d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} e^{-(\beta_k - \lambda)\omega^2} \cos(x - \alpha_k)\omega\, d\omega. \end{aligned} \tag{3. 4}$$

A (3. 4) függvény α_k körül szimmetrikus; elég vizsgálni $(\beta_k - \lambda = A_k$ jelölés mellett $)$ az

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} e^{-A_k\omega^2} \cos x\omega\, d\omega = I(x, A_k, \omega_0) \tag{3. 5}$$

integrált. Nyilvánvaló, hogy $I(0, A_k, \omega_0) > 0$. Legyen $x = 3\pi/2\omega_0$, akkor

$$\begin{aligned} I\left(\frac{3\pi}{2\omega_0}, A_k, \omega_0\right) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\omega_0}{3}} e^{-A_k\omega^2} \cos\frac{3\pi\omega}{2\omega_0}\, d\omega + \\ &+ \int_{\frac{\omega_0}{3}}^{\omega_0} e^{-A_k\omega^2} \cos\frac{3\pi\omega}{2\omega_0}\, d\omega \leqq \frac{2\omega_0}{3\pi^2} - \frac{4\omega_0 e^{-A_k\omega_0^2}}{3\pi^2} \end{aligned} \tag{3. 6}$$

és ez negatív, ha $1 - 2\exp(-A_k\omega_0^2) < 0$, vagyis az ezt az egyenlőtlenséget kielégítő (A_k, ω_0) párokra $I\left(\frac{3\pi}{2\omega_0}, A_k, \omega_0\right) < 0$. A Riemann-lemma értelmében $\lim_{x \to \infty} I(x, A_k, \omega_0) = 0$; az említett (A_k, ω_0) párok esetében a vizsgált integrál pozitív értékekből negatívba megy át és ezután tart (esetleg újabb jelváltásokkal) zérushoz.

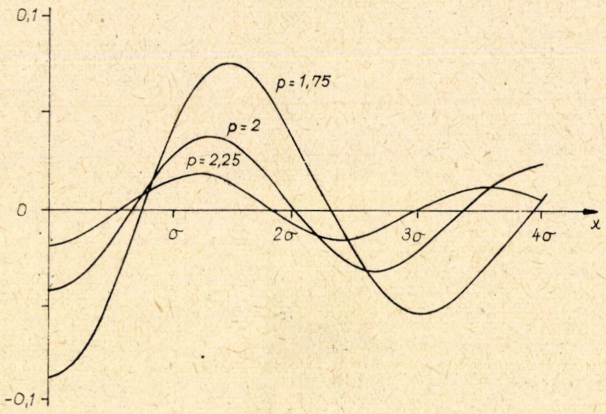
Az elmondottak felfoghatók úgy, hogy az ideális $(z(x) \equiv 0)$ $f_k(x; \lambda)$ tesztfüggvény-komponensre egy hullámos torzító függvény rakódik rá, ugyanis

$$f_k(x; \lambda) - \hat{f}_k(x; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} e^{-(\beta_k - \lambda)\omega^2} \cos(x - \alpha_k)\omega\, d\omega. \tag{3. 7}$$

Ennek a torzításnak $f_k(x;\lambda)$-hoz viszonyított értékét ábrázoltuk az 1. ábrán néhány paraméterérték mellett.

A torzítás x-től független felső korlátja könnyen megadható, ugyanis

$$|f_k(x;\lambda)-\hat{f}_k(x;\lambda)| \leqq \frac{1}{\pi}\int_{\omega_0}^{\infty} e^{-(\beta_k-\lambda)\omega^2}\,d\omega. \tag{3.8}$$



1. ábra. Az $[f_k(x;\lambda)-\hat{f}(x;\lambda)]/f(x;\lambda)$ relatív torzítás ábrája $p=\omega_0\sigma$, $\sigma=\sqrt{2(\beta_k-\lambda)}$ jelölés mellett

A 2. ábrán ennek a hibakorlátnak az $\omega_0=\infty$-re normált értékét ábrázoltuk, mint $\omega_0\sqrt{2(\beta_k-\lambda)}$ függvényét, $x=\alpha_k$-ra. Más szavakkal: a hibátlan függvény csúcsértékével elosztott hibakorlátot mutatja a 2. ábra.

2. ábra. Az $[f_k(\alpha_k;\lambda)-\hat{f}_k(\alpha_k;\lambda)]/f_k(\alpha_k;\lambda)$ relatív hibakorlát ábrája $p=\omega_0\sqrt{2(\beta_k-\lambda)}$ függvényében

Megemlítjük csupán, hogy más szokásos szűrők hatásának vizsgálatával is foglalkoztunk. A fokozatosan levágó szűrők előnye abban mutatkozik meg, hogy a keletkező mellékcsúcsok nagysága kisebb, de ennek az az ára, hogy a főcsúcs jobban széthúzódik, „tűszerűsége" romlik. Így tehát esetünkben a (2. 3) szűrő használata látszik legjobbnak.

Lássuk ezek után a zajból származó hibát. Tegyük fel, hogy $\xi(x)$ valamilyen, tágabb értelemben stacionárius sztochasztikus folyamat. A (2. 2), ill. (2. 4) transzformáció $z(x)$-et egy másik, tágabb értelemben stacionárius sztochasztikus folyamat — jelben $\xi(x;\lambda)$ — egy realizációjába viszi át. Mérjük mármost az ebből származó torzulást $\sqrt{\mathbf{D}^2[\xi(x;\lambda)]}$-val, azaz a folyamat szórásával. Könnyen belátható (lásd pl. [5], 275. o.), hogy ha

$$\mu(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} M(x)e^{i\omega x}\,dx \tag{3.9}$$

és $\xi(x)$ autokorrelációs függvényéhez, $R(\tau)$-hoz az

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega}\varphi(\omega)\,d\omega \tag{3.10}$$

összefüggéssel értelmezett $\varphi(\omega)$ spektrális sűrűségfüggvény tartozik, akkor

$$\mathbf{D}^2[\xi(x;\lambda)]=\int_{-\infty}^{\infty}|\mu(-\omega)|^2\varphi(\omega)\,d\omega, \tag{3.11}$$

ahol a (3. 3) szűrő esetén

$$\mu(\omega)=\begin{cases} e^{\lambda\omega^2}, & (-\omega_0\leqq\omega\leqq\omega_0)\\ 0, & \text{egyébként,}\end{cases}$$

azaz

$$\mathbf{D}^2[\xi(x;\lambda)]=\int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{2\lambda\omega^2}\varphi(\omega)\,d\omega. \tag{3.12}$$

Ha (2. 2) *Fourier*-transzformáltjait trapéz-formulával számítjuk ki, $\xi(x;\lambda)$ helyett valamilyen $\bar{\xi}(x;\lambda)$ fog fellépni, $\mathbf{D}^2[\bar{\xi}(x;\lambda)]$ azonban kis Δx-re jó közelítéssel (3. 12) alakú lesz, alkalmasan megválasztott $\varphi(\omega)$ mellett.

Igen gyakran előforduló eset az, amidőn az x_k $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots)$ helyekhez tartozó $\xi(x_k)=\xi_k$ értékek egymástól független valószínűségi változóknak tekinthetők nulla várható értékkel és ismert σ szórással. Belátható, hogy az említett numerikus módszer alkalmazásakor fellépő $\bar{\xi}(x;\lambda)$ szórásnégyzete ebben az esetben a

$$\varphi(\omega)=\begin{cases} \sigma^2\Delta x, & (-\omega_0\leqq\omega\leqq\omega_0)\\ 0, & \text{egyébként}\end{cases} \tag{3.13}$$

spektrális sűrűségfüggvénnyel írható fel, azaz

$$\mathbf{D}^2[\bar{\xi}(x;\lambda)]\approx 2\sigma^2\Delta x\int_0^{\omega_0} e^{2\lambda\omega^2}\,d\omega=\frac{\sigma^2\Delta x}{\sqrt{2\lambda}}\int_0^{\omega_0\sqrt{2\lambda}} e^{u^2}\,du. \tag{3.14}$$

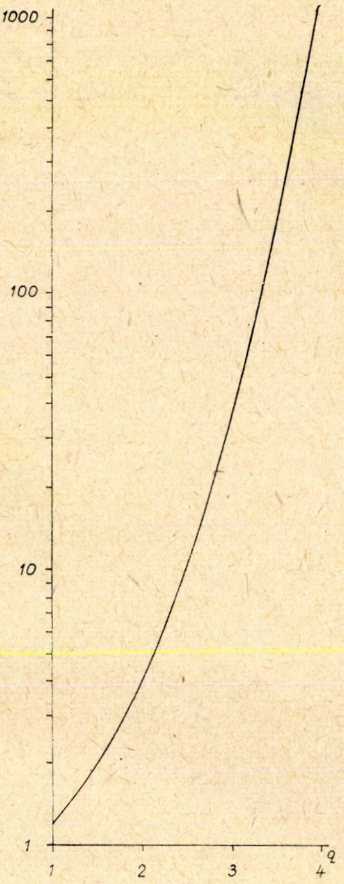
Ez a formula azt mutatja, hogy minél nagyobb λ-t választunk (azaz λ-val megközelítjük β_1-et), annál kisebb Δx-et kell választani (azaz sűrűn kell kimérni a függvényt) a zajból származó hiba csökkentése végett.

Végül írjuk fel az elöljáróban említett kétféle hiba együttes torzítását, $E(x;\lambda)$-t. (3. 7) és (3. 12) figyelembevételével:

$$E(x;\lambda) = \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k}{\pi}\left\{\int_{\omega_0}^{\infty} e^{-(\beta_k-\lambda)\omega^2}\cos(x-\alpha_k)\omega\, d\omega\right\} + \sqrt{2\int_{0}^{\omega_0} e^{2\lambda\omega^2}\varphi(\omega)\, d\omega}\,. \tag{3.15}$$

A helyes szűrő megválasztása tehát olyan ω_0 érték megválasztását jelenti, amelyre max $|E(x;\lambda)|$ minimum.

Ez a szélsőérték-keresés bonyolultnak látszik, mivel a minimalizálandó függvény a keresett paraméterektől függ. Erre azonban általában nincs is szükség, ha az $F^*(\omega)$, ill. $F^*(\omega)e^{\lambda\omega^2}$ spektrumot felrajzoljuk. A spektrum alapján többnyire eléggé egyértelmű ω_0 megválasztása adott $\varphi(\omega)$ és λ esetén. A (3. 15)-ös formulának akkor vesszük hasznát, ha előzetes becslés alapján méréstervezést kívánunk végezni. Ez úgy jelentkezik, hogy λ-t növelni kívánjuk, és a növekvő első hiba ellensúlyozására a második hibát kívánjuk csökkenteni. Ez a feladat általában grafikonok segítségével egyszerűen elvégezhető. Ehhez kívánunk segítséget nyújtani a (3. 14) szerinti szórás $\omega_0\sqrt{2\lambda}$-tól való függésének ábrázolásával a 3. ábrán.



3. ábra. $\sqrt{D^2[\xi(x;\lambda)]}\sqrt{2\lambda}/s^2\Delta x$ ábrája $q = \omega_0\sqrt{2\lambda}$ függvényében

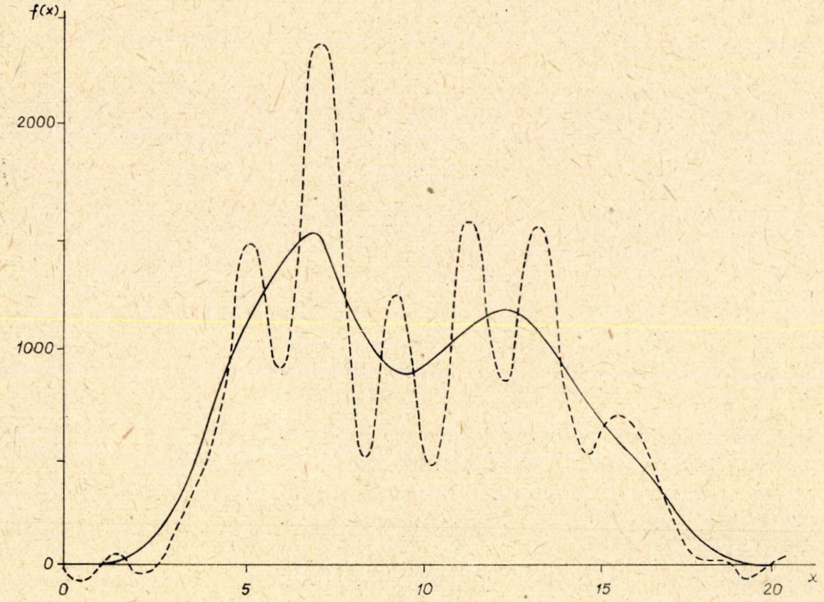
4.

A következőkben az ismertetett módszert egy példán kívánjuk szemléltetni. Szándékosan nem választottunk gyakorlati példát, mert a szemléltetésnél szükségesnek tartjuk, hogy pontosan ismerjük a vizsgálandó keveréket.

A 4. ábrán folytonos vonallal a következő függvényt ábrázoltuk:

$$f(x) = 1000\,e^{\frac{-(x-5)^2}{4}} + 1000\,e^{\frac{-(x-7)^2}{2}} + 500\,e^{\frac{-(x-8{,}75)^2}{2}} + 1000\,e^{\frac{-(x-11{,}25)^2}{4}} + 500\,e^{\frac{-(x-13{,}25)^2}{2}} + 500\,e^{\frac{-(x-15{,}25)^2}{4}}\,. \tag{4.1}$$

Az $f(x)$ függvény értékeit $x_k = k \cdot 0{,}25$ $k = 0, 1, 2, \ldots, 80$ helyeken egész értékek megtartásával vettük fel. A $\xi(x_k) = \xi_k$ változók legyenek egymástól függetlenek, egyenletes eloszlásúak közös $\sigma^2 = 1/12$ szórásnégyzettel. $2\lambda \approx 1$ esetén $\omega_0 = 3{,}7$-nél



4. ábra. A (4. 1)-es formula szerint összetett keverék (folytonos vonal) felbontása. A tesztfüggvény (szaggatott vonal) az $\omega_0 = 3{,}7$, $2\lambda = 0{,}75$ paraméterértékekhez tartozik

a zajtól származó hiba a 3. ábra szerint $\sqrt{300/50} \approx 2{,}5$. A második ábra szerint: ha $\omega_0 \sqrt{2(\beta_k - \lambda)} = 1{,}85$, akkor a komponensenként fellépő relatív hiba kb. 6%. Ezt elfogadhatónak tartottuk, és így $\omega_0 = 3{,}7$, $2\lambda = 0{,}75$ paraméterértékek mellett hajtottuk végre a (2. 2) transzformációt. Az eredményül kapott görbét a 4. ábrán szaggatott vonallal ábrázoltuk. Az ábra szélén látszik egy kb. 50 egység nagyságú negatív hullám, amely az $\omega_0 \sqrt{2(\beta_k - \lambda)} \approx 1{,}85$ választás miatt várható is volt. A 4. ábra alkalmas ebben a rendkívül zsúfolt keverékben levő komponensek számának meghatározására, sőt alkalmas esetleges paraméter-megállapító iterációs eljáráshoz szükséges kezdőértékek meghatározására is.

IRODALOM

[1] MEDGYESSY P.: *Decomposition of superpositions of distribution functions.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961.

[2] MEDGYESSY P.: Egy konvoluciós típusú integrálegyenlet numerikus megoldása és ennek felhasználása Gauss-függvény szuperpoziciók felbontására. *MTA III. Oszt. Közl.* **16** (1966) 47—64.

[3] MEDGYESSY P.: Sűrűségfüggvény—szuperpoziciók felbontásának egy lényegileg új módszeréről. *MTA III. Oszt. Közl.* **17** (1967) 365—372.

[4] BLACKMAN, R. B. and TUKEY, J. W.: *The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering.* Dover, New York, 1958.

[5] Гихман, И. И. — Скороход, А. В.: *Введение в теорию случайных процессов.* Изд. „Наука", Москва, 1965.

(Beérkezett: 1967. szeptember 12.)

ON THE IMPROVING OF A METHOD FOR THE NUMERICAL DECOMPOSITION OF MIXTURES OF GAUSSIAN FUNCTIONS

by

PÁL MEDGYESSY and LÁSZLÓ VARGA

Summary

In certain cases the unknown parameters of the mixture (1. 1) can be determined approximately by means of the graph of the test function (1. 2) (depending on the arbitrary parameter λ), as the peaks of the latter one may appear more separated than those of (1. 1). A numerical approximation of (1. 2) based on the graph of (1. 1) is obtained by evaluating the integral (2. 1) by applying twice the trapezoidal rule. However, this procedure is very sensitive to the noise superposed on (1. 1). In order to diminish the influence of the noise the authors apply a cut-off filter (3. 3) to the *Fourier* transform of (1. 1) (+ noise), then the new test function (2. 2) is to be applied (and computed numerically) instead of (1. 2). The authors consider also problems of optimalizing the filter (3. 3); the relevant results are illustrated by the Figures 1—3. In practice the optimal cut-off will be determined by successive trials (by considering the corresponding graphs of (2. 2)). In Fig. 4. optimal decomposition of the mixture (4. 1), obtained by the mentioned procedure, is shown.

HOMOCSOPORTOK (m, n)-IDEÁLJAIRÓL

Írta: LAJOS SÁNDOR

Egy H félcsoportot THIERRIN [5] nyomán *homocsoportnak* nevezünk, ha H-nak létezik olyan e idempotens eleme, amely felcserélhető H-nak valamennyi elemével, továbbá mindegyik $h \in H$ elemhez van olyan $h' \in H$ elem, amely kielégíti a

$$hh' = e$$

összefüggést.[1] A mondott tulajdonságokkal rendelkező e idempotens elem egyértelműen meghatározott. Ha ugyanis e és f is ilyen tulajdonságú idempotens eleme a H félcsoportnak, akkor az előbbiek szerint van olyan e' és f' elem a H-ban, hogy

$$ee' = f \quad \text{és} \quad ff' = e.$$

De ebből következik, hogy

$$f = ee' = e^2e' = ef$$

és

$$e = ff' = f^2f' = fe.$$

Minthogy e a H félcsoport valamennyi elemével felcserélhető,

$$ef = fe.$$

Tehát

$$e = f.$$

Megmutatjuk, hogy a H félcsoportban az $xe = ex$ alakú elemek G halmaza, ahol x befutja H elemeit, részcsoportot alkot.

Csakugyan, ha $x, y, z \in H$, akkor

$$xe \cdot ye = xy \cdot e^2 = xye,$$

vagyis a G halmaz zárt. e a G-nek neutrális eleme, mivel

$$e \cdot xe = xe \cdot e = xe^2 = xe.$$

A $he \in G$ elem jobb oldali inverzét a homocsoport definíciója szerint létező h' elemmel képezhetjük:

$$he \cdot h'e = hh'e^2 = e.$$

[1] A félcsoportok algebrai elméletének alapvető fogalmaira nézve CLIFFORD és PRESTON [1] könyveire utalunk. A homocsoportok néhány jól ismert tulajdonságára emlékeztetünk a dolgozat első felében.

Ez *a* $G = He$ *részcsoport a* H *homocsoportnak homomorf képe*. Az $x \to xe$ leképezés homomorfizmus, mivel az $xy = z$ relációt kielégítő $x, y, z \in H$ elemekre fennáll, hogy

$$xe \cdot ye = xy \cdot e = ze,$$

vagyis a leképezés műveletttartó.

A $G = He$ csoport a H homocsoportnak kétoldali ideálja, ugyanis

$$xe \cdot y = xy \cdot e \in G$$

és

$$y \cdot xe = yx \cdot e \in G$$

tetszőleges $y \in H$ elemre nézve.

Ha I a H homocsoportnak tetszőleges kétoldali ideálja, akkor nyilván fennáll az

$$IG \subseteq I \cap G$$

tartalmazási reláció. Ezért I és G közös része nem üres. Megmutatjuk, hogy I és G közös része egyenlő G-vel. IG ugyanis kétoldali ideálja G-nek, de csoportnak nincsen valódi ideálja, így $IG = G$. Tehát

$$G = IG \subseteq I \cap G \subseteq G,$$

ahonnan következik, hogy

$$G = I \cap G.$$

G tehát olyan kétoldali ideálja a H homocsoportnak, amely része a H mindegyik kétoldali ideáljának. Az ilyen tulajdonságú ideált *univerzálisan minimális ideálnak* szokás nevezni (lásd [1]).

Megmutatjuk, hogy ha egy F félcsoportnak van olyan G részcsoportja, amely egyszersmind kétoldali ideálja is F-nek, akkor F homocsoport.

Legyen e a G csoport egységeleme. Akkor F-nek bármely a elemére $ae \in G$ és $ea \in G$, mivel G kétoldali ideálja F-nek. De akkor

$$ae = e(ae) = (ea)e = ea,$$

tehát az e idempotents elem felcserélhető F-nek bármelyik a elemével. A homocsoport definíciójában szereplő h' elem pedig:

$$h' = ea' = a'e,$$

ahol a' az ae elem G-beli inverze. Valóban, ez kielégíti a

$$h'a = ah' = e$$

összefüggést.

Azt nyertük tehát, hogy *egy F félcsoport akkor és csakis akkor lesz homocsoport, ha van olyan részcsoportja, amely kétoldali ideálja F-nek*. Ennek az eredménynek következménye, hogy például minden zéróelemes félcsoport homocsoport.

A homocsoportok (m, n)-ideáljaival kapcsolatban bebizonyítjuk a következő tételeket.[2]

[2] Az (m, n)-ideál definíciójára és fontosabb tulajdonságaira nézve a [2, 3, 4] dolgozatokra utalunk.

1. TÉTEL. *Homocsoportnak bármely (m, n)-ideálja maga is homocsoport.*

Bizonyítás. Legyen H egy homocsoport, amelynek G a csoportideálja, A pedig legyen H-nak tetszőleges (m, n)-ideálja. Akkor

$$A^m G A^n \subseteqq A^m H A^n \subseteqq A$$

és

$$A^m G A^n \subseteqq G,$$

mivel G kétoldali ideálja H-nak. Így azt kaptuk, hogy

$$A^m G A^n \subseteqq A \cap G,$$

tehát A és G közös része nem üres. Másrészt $A \cap G$, mint részfélcsoport és (m, n)-ideál közös része, (m, n)-ideálja G-nek (lásd [3], 4. 1. tétel), de csoportnak nincsen valódi (m, n)-ideálja, ennél fogva

$$A \cap G = G.$$

Tehát az A (m, n)-ideál tartalmazza G-t, ami nyilván A-nak is olyan részcsoportja, amely egyszersmind kétoldali ideál is. Így az A (m, n)-ideál csakugyan homocsoport.

Korollárium. *Homocsoportnak bármely bal oldali (jobb-, ill. kétoldali) ideálja maga is homocsoport.*

2. TÉTEL. *Egy homocsoport csoportideálja a homocsoportnak univerzálisan minimális (m, n)-ideálja.*

Bizonyítás. Legyen H egy homocsoport, G a csoportideálja. Akkor G nyilván (m, n)-ideálja H-nak tetszőleges nemnegatív egészekből álló m, n számpárra. Legyen A valamely (m, n)-ideálja H-nak. Azt kell bizonyítanunk, hogy G benne van A-ban. Mivel $G \subseteqq H$ és A (m, n)-ideálja H-nak,

$$A^m G A^n \subseteqq A^m H A^n \subseteqq A.$$

Másrészt könnyű belátni, hogy az $A^m G A^n$ halmaz (m, n)-ideálja G-nek. De $A^m G A$ nem üres, s csoportnak nincsen valódi (m, n)-ideálja (lásd [3]), így kapjuk, hogy

$$A^m G A^n = G.$$

Tehát a G csoportideál valóban része a H homocsoport bármely A (m, n)-ideáljának, vagyis G csakugyan univerzálisan minimális (m, n)-ideálja H-nak. Ezzel a 2. tételt bebizonyítottuk.

Korollárium. *Bármely H homocsoport G csoportideálja a H-nak univerzálisan minimális bal oldali (jobb-, ill. kétoldali) ideálja.*

3. TÉTEL. *Homocsoport összes* $(1, 1)$*-ideáljának halmaza a komplexus szorzásra nézve homocsoport.*

Bizonyítás. A [3] dolgozat 1. 12. korolláriuma szerint egy félcsoport bármely két $(1, 1)$-ideáljának a szorzata ismét $(1, 1)$-ideálja a félcsoportnak. Így egy H homocsoport összes $(1, 1)$-ideáljának a halmaza is félcsoport a részhalmazok szorzására nézve. Jelöljük ezt a félcsoportot H_1-gyel. Megmutatjuk, hogy H_1 homocsoport.

Nyilvánvaló, hogy G, a H csoportideálja (1, 1)-ideálja H-nak, vagyis $G \in H_1$. Legyen A a H_1-nek valamely eleme. Akkor

$$GA \subseteqq G$$

és a GA szorzat (1, 1)-ideálja G-nek, de a G csoport nem tartalmaz valódi (1, 1)-ideált, tehát

$$GA = G.$$

Hasonló módon igazolható, hogy

$$AG = G$$

bármely $A \in H_1$ elemre. Így G a H_1 félcsoportnak zéruseleme, tehát a H_1 félcsoport valóban homocsoport. Ezzel a 3. tételt bizonyítottuk.

IRODALOM

[1] A. H. CLIFFORD és G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups* I—II, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1961; 1967.
[2] S. LAJOS, On (m, n)-ideals of semigroups, *Second Hungarian Math. Congress* I (1960), 42—44.
[3] LAJOS S.: A félcsoportok ideálelméletéhez I—II. *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl.* **11** (1961), 57—66; és **14** (1964), 293—299.
[4] S. LAJOS, Generalized ideals in semigroups, *Acta Sci. Math.* **22** (1961), 217—222.
[5] G. THIERRIN, Sur les homogroupes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **234** (1952), 1519—1521.

(Beérkezett: 1967. XI. 15.)

ON (m, n)-IDEALS IN HOMOGROUPS

By

S. LAJOS

Summary

In this paper the author proves the following results.

THEOREM 1. *Any (m, n)-ideal of a homogroup H is also a homogroup.*

COROLLARY. *Any left (right, two-sided) ideal of a homogroup is also a homogroup.*

THEOREM 2. *Let H be a homogroup, G be the group-ideal of H. Then G is the universally minimal (m, n)-ideal of H.*

COROLLARY. *The group-ideal of a homogroup H is the universally minimal left (right, two-sided) ideal of H.*

The definition of the universally minimal (m, n)-ideal is analogous to that of universally minimal left ideal (see [1]).

THEOREM 3. *The set of all (1, 1)-ideals of a homogroup is a homogroup under the multiplication of subsets.*

DIMENZIÓ ÉS KONVEXITÁS, IV.*

Írta: DEÁK ERVIN

A IV. FEJEZET RÉSZLETES TARTALOMJEGYZÉKE

BEVEZETŐ MEGJEGYZÉSEK

E dolgozat 0. §-ának végén (I. rész, 195. oldal) már ismertettük a 18. §-ban követendő célokat és módszereket. Ezt azonban most ki kell egészítenünk a következő megjegyzéssel:

Az I. és a II. rész kéziratának (egyidejű), ill. a jelen IV. rész kéziratának elkészültét több mint egy év választotta el egymástól. Ez idő alatt jó néhány olyan új eredményt sikerült elérnünk e dolgozat I., II. és III. fejezetének témakörében egyaránt, amely egyrészt — sokkal általánosabb vagy élesebb lévén — egyes, az előző részekben közölt és bebizonyított tételeket szinte „feleslegessé" tesz, másrészt lehetségessé — sőt szükségessé is — teszi a dolgozatot lezáró probléma-gyűjtemény lényegesen más megfogalmazását, mint ahogyan azt eredetileg terveztük. Ez részben gazdagodást jelent, amennyiben több eredményt, példát, alaposabban indikált problémákat közölhetünk, továbbá sokkal szélesebb területen mozgunk (pl. a dimenzióelméleti vonatkozású témáknál már nem maradunk főleg a szeparábilis metrikus terek és egyetlen klasszikus dimenziófogalom — a MENGER—URISZON-dimenzió — körében); részben viszont „szegényedést" jelent, amennyiben egyes problémák időközben megoldódtak, s így most „kiesnek" a problémagyűjteményből. Úgy gondoljuk azonban, hogy ha az olvasó e dolgozatot cikk*sorozat*nak tekinti (mint ahogy tulajdonképpen az is), akkor az elmondottak nem fognak zavaróan hatni.

* Az I., II., ill. III. rész az *MTA III. Oszt. Közl.* 17 (1967) 2., 3., ill. 4. számában jelent meg. A rövidítések és jelölések teljes mutatóját és a definíciók teljes mutatóját is az I. részhez csatoltuk. A jelen részben előforduló irodalmi utalások [1]-től [56]-ig az I. részben közölt irodalomjegyzékre, [57]-től [77]-ig pedig annak e rész végén közölt kiegészítésére vonatkoznak.

A témának ez a továbbfejlődése természetesen újabb irodalmi hivatkozásokat is szükségessé tett; ezért az I. részben közölt — s ott „teljes"-nek mondott — irodalomjegyzékhez a jelen rész végén egy kiegészítést csatoltunk.

Végül megjegyezzük, hogy távolról sem foglalkozunk itt minden olyan, az IS-fogalommal kapcsolatosan felmerült problémával, ami érdekesnek látszik. Igyekeztünk főleg azokat a problémákat kiválasztani, amelyeknek „érdekességét" valamennyire (estleg már elért részeredmények bemutatásával) dokumentálni vagy legalább érzékeltetni is tudjuk.

18. §. Problémák és kiegészítések

1. Az iránydimenzió kapcsolatai más dimenziókkal

Az I. és II. részben Dim X-et még csak ind X-szel hoztuk kapcsolatba; a bevezetésben is (5. 3)-nak csak egy ilyen értelmű általánosítását említettük [23]. Azóta azonban kiterjesztettük vizsgálatainkat a Čech-féle nagy induktív dimenzióra[1] és a Lebesgue-féle lefedési dimenzióra[2] is; ezért most az újabb eredmények és a problémák ismertetésénél *mindhárom* „klasszikus" dimenziót tekintetbe vesszük.

Az (5. 3) tételben egy szeparábilis metrikus X terekre vonatkozó aszimptotikus kapcsolatot állapítottunk meg ind X és Dim X között. Figyelembe véve, hogy a szeparábilis metrikus terek körében a három klasszikus dimenzió ekvivalens (l. pl. [47] 90), most így fogalmazzuk az (5. 3) tételt:

(18. 1) Tétel. *Legyen X szeparábilis metrikus tér.*

A. *Ha* $\mathrm{Dim}\, X < \aleph_0$, *akkor* ind X, Ind X *és* dim X *egyaránt véges, sőt*

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{ind}\, X\\ \mathrm{Ind}\, X\\ \mathrm{dim}\, X\end{matrix}\right\} \leqq \mathrm{Dim}\, X.$$

B. *Ha* $\mathrm{ind}\, X < \infty$, *ill.* $\mathrm{Ind}\, X < \infty$, *ill.* $\mathrm{dim}\, X < \infty$, *akkor*

$$\mathrm{Dim}\, X \leqq \begin{cases} 2.\ \mathrm{ind}\, X + 1, \\ 2.\ \mathrm{Ind}\, X + 1, \\ 2.\ \mathrm{dim}\, X + 1. \end{cases}$$

Itt az ID és a klasszikus dimenziók kapcsolatának két típusát látjuk. Ha ezek bármelyikét tereknek valamely olyan bővebb osztályára kívánjuk átvinni, amelyben

[1] Definíció: Ind $\emptyset = -1$; Ind $X \leqq n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, ha bármely nem üres zárt halmaz környezetrendszerének van bázisa olyan nyílt U halmazokból, amelyekre Ind Gr $U \leqq n-1$; végül Ind $X = n$ (n = 0, 1, 2, ...), ha Ind $X \leqq n$ és Ind $X \nleqq n-1$. Azt a tényt, hogy valamely X térnek nincs ilyen dimenziója, az Ind $X = \infty$ szimbólummal szokás kifejezni.

[2] Definíció: dim $\emptyset = -1$; dim $X \leqq n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, ha X bármely véges nyílt lefedésének van olyan véges nyílt finomítása, amely szintén lefedése X-nek és amelynek rendje legfeljebb $n+1$, ami azt jelenti, hogy ezen utóbbi halmazrendszer bármely $n+2$ tagjának metszete az üres halmaz; végül dim $X = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, ha dim $X \leqq n$ és dim $X \nleqq n-1$. Azt a tényt, hogy valamely X térnek nincs ilyen dimenziója, a dim $X = \infty$ szimbólummal szokás kifejezni.

a klasszikus dimenziók ekvivalenciája nem áll fenn vagy nincs bizonyítva, akkor a megfelelő három állítás természetesen külön-külön általánosítást kíván.

Ami mármost az A. típust illeti, ilyen eredményeknek két csoportját találtuk az I. és II. rész elkészülte óta.

Mindegyik tételcsoport bizonyos alaptételekre épül.

Az egyik csoport alaptételei [61]:

(18. 2) TÉTEL. *Ha egy* X *térre* $\mathrm{Dim}\, X=1$, *akkor* $\mathrm{ind}\, X \leqq 1$.

(18. 3) TÉTEL. *Ha egy* X *térre* $\mathrm{Dim}\, X=1$, *akkor* $\mathrm{Ind}\, X \leqq 1$.

(18. 4) TÉTEL. *Ha egy* X *térre* $\mathrm{Dim}\, X=1$, *akkor* $\dim X \leqq 1$.

Talán említést érdemel az a (nem is az ID-re vonatkozó) tény, amely e három tételnek (3. 7)-tel való összekapcsolásából adódik:

(18. 5) TÉTEL. *Ha* X *rendezéstopologikus tér, akkor*

$$\mathrm{ind}\, X \leqq 1, \quad \mathrm{Ind}\, X \leqq 1, \quad \dim X \leqq 1.$$

A három alaptétel további, nehezebben bizonyítható következményei közül megemlítjük a következőket [61]:

(18. 6) TÉTEL. *Ha* X *olyan lokálisan kompakt metrikus tér, amelyre* $\mathrm{Dim}\, X < \aleph_0$, *akkor*

$$\dim X \leqq \mathrm{Dim}\, X.$$

(18. 6a) TÉTEL. *Ha* X *olyan rendes* T_0*-tér, amely a Lindelöf-tulajdonsággal bír, és amelyre* $\mathrm{Dim}\, X < \aleph_0$, *akkor*

$$\dim X \leqq \mathrm{Dim}\, X.$$

A másik tételcsoport alaptételei [62]:

(18. 7) TÉTEL. *Ha* X *olyan tér, amelyre* $\mathrm{Dim}\, X < \aleph_0$, *akkor*

$$\mathrm{ind}\, X \leqq \mathrm{Dim}\, X.$$

(18. 8) TÉTEL. *Ha* X *kompakt tér és* $\mathrm{Dim}\, X < \aleph_0$, *akkor*

$$\mathrm{Ind}\, X \leqq \mathrm{Dim}\, X.$$

(A (18. 7) tétel a (18. 1) A. tétel ind-re vonatkozó részének, a (18. 2) tételnek és a 0. § apróbetűs részében említett tételnek egyaránt a lehető legmesszebbmenő általánosítása.) Itt is számos érdekes következmény adódik. (18. 7)-ből és (18. 8)-ból pl. (az első esetben P. SZ. ALEXANDROV tétele alapján, amely szerint, ha X kompakt HAUSDORFF-tér és $\mathrm{ind}\, X < \infty$, akkor $\dim X \leqq \mathrm{ind}\, X$ [57]; a második esetben pedig N. VEGYENNYISZOV tétele alapján, amely szerint, ha X normális HAUSDORFF-tér és $\mathrm{Ind}\, X < \infty$, akkor $\dim X \leqq \mathrm{Ind}\, X$ [77]) egyaránt adódik a következő, (18. 7) és (18. 8) mellé szinte „odakívánkozó" tétel:

(18. 9) TÉTEL. *Ha* X *kompakt* HAUSDORFF*-tér és* $\mathrm{Dim}\, X < \aleph_0$, *akkor*

$$\dim X \leqq \mathrm{Dim}\, X.$$

(18. 10) Az alkalmazás további példájaként közöljük (18. 6)-nak egy (18. 9)-en alapuló és a [61]-belinél lényegesen rövidebb bizonyítását:

C. H. DOWKER egy tétele ([64] 108) szerint *a parakompakt normális X terek körében* dim X *ekvivalens* loc dim X*-szel.*[3]

Ez a tétel speciálisan metrikus X terekre is alkalmazható. Ha mármost X lokálisan kompakt metrikus tér, akkor minden egyes x pontjának van kompakt (tehát egyben zárt) U_x környezete, és az ID monotonitása alapján $\mathrm{Dim}\, U_x \leqq \mathrm{Dim}\, X$. Ha végül — mint ahogyan feltételeztük — $\mathrm{Dim}\, X < \aleph_0$, akkor (18. 9) szerint $\dim U_x \leqq \mathrm{Dim}\, X\ (x \in X)$, vagyis loc dim X definíciója értelmében $\mathrm{loc}\dim X \leqq \mathrm{Dim}\, X$. Ez utóbbi pedig DOWKER idézett tétele szerint ekvivalens a $\dim X \leqq \mathrm{Dim}\, X$ egyenlőtlenséggel, qu. e. d.

Bemutatjuk még (18. 9) következő alkalmazását:

(18. 11) TÉTEL. *Ha X σ-kompakt T_3-tér*[4] *és* $\mathrm{Dim}\, X < \aleph_0$, *akkor*

$$\dim X \leqq \mathrm{Dim}\, X.$$

Bizonyítás. Ismeretes, hogy minden σ-kompakt T_3-tér parakompakt (pl. [33] 172 vagy [37] 96); ismeretes továbbá, hogy ha $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ egy (akár csak lokálisan) megszámlálható, zárt lefedő rendszere egy parakompakt X térnek és

$$\sup \{\dim X_\alpha : \alpha \in A\} < \infty,$$

akkor

$$\dim X \leqq \sup \{\dim X_\alpha : \alpha \in A\}$$

(pl. [47] 195). Legyen mármost

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i,$$

ahol mindegyik X_i kompakt altere X-nek; az ID monotonitása miatt ekkor

$$\mathrm{Dim}\, X_i \leqq \mathrm{Dim}\, X \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Az X_i alterek természetesen HAUSDORFF-terek, tehát (18. 9) szerint

$$\dim X_i \leqq \mathrm{Dim}\, X \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Ha most még tekintetbe vesszük, hogy az X_i-k zártak is, akkor az idézett összegtétel szerint

$$\dim X \leqq \mathrm{Dim}\, X$$

következik, qu. e. d.[5]

[3] DEFINÍCIÓ: $\mathrm{loc}\dim \emptyset = -1$; $\mathrm{loc}\dim X \leqq n\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$ azt jelenti, hogy minden $x \in X$ pontnak van olyan zárt U_x környezete, amelyre $\dim U_x \leqq n$; végül $\mathrm{loc}\dim X = n\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$, ha $\mathrm{loc}\dim X \leqq n$ és $\mathrm{loc}\dim X \not\leqq n-1$. Azt a tényt, hogy valamely X térnek nincs ilyen dimenziója, a $\mathrm{loc}\dim X = \infty$ szimbólummal fejezzük ki.

[4] A „T_3-tér" kifejezést a „reguláris T_1-tér" értelemben használjuk.

[5] A (18. 11) tétel *valódi* kiterjesztése a (18. 9) tételnek: (18. 11) természetesen vonatkozik minden kompakt HAUSDORFF-térre, de pl. a megszámlálhatóan végtelen diszkrét tér olyan σ-kompakt T_3-tér, amely nem kompakt. Erre az X térre egyébként triviálisan $\dim X = 0$ és (3. 6) szerint $\mathrm{Dim}\, X = 1$.

Mindezek után természetes az első kérdésfelvetés:

(18. 12) Probléma. *Tereknek mely (az összes szeparábilis metrikus tereket tartalmazó vagy esetleg más) további osztályaira és mely klasszikus dimenziókra érvényesek* A. *típusú tételek*?

Úgy tűnik, hogy még sok lehetőség van ilyen eredmények elérésére, akár az alapvető (18. 2), (18. 3), (18. 4), ill. (18. 7), (18. 8), (18. 9) tételek kiaknázásával, akár más módon.[6]

Lényegesen nehezebbnek látszik azonban valamely, a szeparábilis metrikus tereknél bővebb osztályra vonatkozó B. *típusú* tételt nyerni,* ami mind ez ideig nem is sikerült. Hogy itt mekkora nehézségekre kell számítani, azt talán érzékeltetheti az a szoros kapcsolat, amely mind a (18. 1), B. tétel, mind e tétel a három klasszikus dimenzió valamelyikére vonatkozó részének egy a szeparábilis metrikus terekénél ténylegesen bővebb $\mathcal{X}$ osztályra vonatkozó esetleges kiterjesztése és a MENGER—NÖBELING-féle (0. 8) beágyazási tétel (a) része között fennáll. Egyrészt a (18. 1), B. tételt (0. 8), (a) felhasználásával bizonyítottuk (l. (5. 3) bizonyítását). Másrészt: ha egy ilyen $\mathcal{X}$ osztályra igaz lenne pl. az

$$X\in\mathcal{X},\ \operatorname{ind} X<\infty \Rightarrow \operatorname{Dim} X\leqq 2.\operatorname{ind} X+1,$$

$$X\in\mathcal{X},\ \operatorname{Ind} X<\infty \Rightarrow \operatorname{Dim} X\leqq 2.\operatorname{Ind} X+1,$$

$$X\in\mathcal{X},\ \dim X<\infty \Rightarrow \operatorname{Dim} X\leqq 2.\dim X+1$$

állítások valamelyike, akkor ebből a (10. 1) beágyazási tétel és a három klasszikus dimenziónak a szeparábilis metrikus terek körében való ekvivalenciája alapján következne a (0. 8), (a) tétel. Várható tehát, hogy az ilyen általános B. típusú tételnek — ha egyáltalán létezik — legalább olyan nehéz a bizonyítása, mint a MENGER—NÖBELING-tétel (a) részéé.

Egy további körülmény pedig arra mutat, hogy a probléma még ennél is sokkal nehezebb lehet. A MENGER—NÖBELING-tételnek (tudomásunk szerint) minden bizonyításában ui. lényegesen kihasználják az ún. felbontási tételt[6a]. Mivel pedig

[6] Megjegyzendő, hogy eddigi vizsgálódásaink során még egyetlen olyan X térre sem bukkantunk, amelynek valamely klasszikus dimenziója véges és az ID-jánál határozottan nagyobb volna. Érdemes tehát a kérdést így is megfogalmazni:

(18. 12.a) Probléma. *Van-e olyan X tér, amelyre a*

$$\operatorname{Dim} X<\operatorname{ind} X<\infty,$$

$$\operatorname{Dim} X<\operatorname{Ind} X<\infty,$$

$$\operatorname{Dim} X<\dim X<\infty$$

relációk valamelyike teljesül?

Az ilyen példák megtalálása vagy akár csak keresése is bizonyára elősegítené a (18. 12) prob léma megoldását.

[6a] *Egy szeparábilis metrikus X térre pl. akkor és csak akkor* $\operatorname{Ind} X\leqq n$ $(n=0,1,2,\dots)$, *ha X előállítható az*

$$X=\bigcup_{i=1}^{n+1} X_i,\quad \operatorname{Ind} X_i\leqq 0\qquad (i=1,2,\dots,n+1)$$

alakban (pl. [31] 32; tetszőleges metrikus terekre pl. [47] 19).

ezzel analóg tétel az ID-ra vonatkozóan nem áll rendelkezésre (sőt nagyon valószínűtlen is, hogy az ID-nak volna ilyen tulajdonsága), azért az egész problémakör megközelítését talán azzal kellene kezdeni, hogy megkíséreljük a MENGER—NÖBELING-tétel (a) részét a felbontási tétel nélkül bizonyítani. Azon túl, hogy az ilyen bizonyítás létezésének ténye önmagában is igen érdekes lenne, a bizonyítás módszerét esetleg fel lehetne használni az ID-ra vonatkozó itt felvetett probléma megoldására, amelyet talán így célszerű megfogalmazni:

(18. 13) Probléma. *Van-e a szeparábilis metrikus tereknél ténylegesen bővebb $\mathfrak{X}$ osztály, továbbá olyan (n nemnegatív egész értékein értelmezett pozitív egész értékű) $f(n)=O(n)$ függvény (optimális esetben $f(n)=2n+1$), hogy az*

$$X\in\mathfrak{X},\ \text{ind}\ X<\infty\Rightarrow \text{Dim}\ X\leqq f(\text{ind}\ X),$$

$$X\in\mathfrak{X},\ \text{Ind}\ X<\infty\Rightarrow \text{Dim}\ X\leqq f(\text{Ind}\ X),$$

$$X\in\mathfrak{X},\ \dim X<\infty\Rightarrow \text{Dim}\ X\leqq f(\dim X)$$

állítások valamelyike igaz?

Ha e problémára vonatkozó *pozitív* eredményt nem is sikerült még elérni, talán elősegítik a probléma megközelítését a *negatív* eredmények, ti. az olyan (sajnos metrikus, tehát a szeparábilis metrikus tereknél „nem is sokkal" általánosabb) terek példái, amelyek biztosan nem tartoznak valamely (18. 13) szerinti $\mathfrak{X}$ osztályhoz. Ilyenek pl. az $S(A)$ csillagterek[7], amelyekről nagyon könnyen belátható, hogy

[7] A csillagtér fogalmát H. J. KOWALSKY vezette be [70] dolgozatában, hogy ennek segítségével az URISZON-féle beágyazási tételnek egy közvetlen általánosítását fogalmazza meg, amely R. H. BING nevezetes metrizációs tételével ([58], vagy pl. [33] 127, 130) szemben az általános metrikus tereket nem egy intern, hanem egy extern (beágyazhatósági) tulajdonsággal karakterizálja.

DEFINÍCIÓ: (A rövidség kedvéért egy KOWALSKYénál tömörebb fogalmazást választunk.) Legyen A egy nem-üres indexhalmaz és

$$S(A)=\{0\}\cup\bigcup\{(c,\alpha):0<c\leqq 1,\alpha\in A\}.$$

Nevezzük az ilyen $S(A)$ halmazt *csillag*nak, amelynek a

$$\{0\}\cup\{(c,\alpha):0<c\leqq 1\}\qquad(\alpha\in A)$$

részhalmazai az ún. *sugarai.* Minden csillag egyenlő sugarainak egyesítésével. Ha mármost egy $S(A)$ csillagot azzal a (nyilvánvaló) metrikával ruházunk fel, amelyet a

$$\delta(x,y)=\begin{cases}|x-y| & \text{ha } x \text{ és } y \text{ egyazon sugárhoz tartoznak,}\\ |x|+|y| & \text{ha } x \text{ és } y \text{ nem tartoznak egyazon sugárhoz}\end{cases}$$

$$(x,y\in S(A))$$

függvény határoz meg, akkor az így kapott metrikus teret (az A indexhalmazhoz tartozó) *csillagtér*nek nevezzük.

KOWALSKY említett tétele így hangzik: *egy tér akkor és csak akkor metrizálható, ha topologikusan beágyazható megszámlálhatóan sok csillagtér topologikus szorzatába* ([70] 337).

(E rendkívül érdekes tétel különböző kiegészítéseit, továbbá ezeknek dimenzióelméleti vonatkozásait illetően l. pl. [47] 184.)

dimenziójuk mindhárom klasszikus értelemben 1-gyel egyenlő, bármilyen számosságú legyen is az A halmaz. Ami viszont egy csillagtér ID-ját illeti, biztos, hogy

(18. 13. 1) $$\operatorname{Dim} S(A) = \bar{\bar{A}} \quad (\bar{\bar{A}} > \aleph),$$

és valószínű, hogy

(18. 13. 2) $$\operatorname{Dim} S(A) \geqq \aleph_0 \quad (\aleph_0 < \bar{\bar{A}} \leqq \aleph).$$

Érdekes, hogy viszont biztosan

(18. 13. 3) $$\operatorname{Dim} S(A) \leqq 2 \quad (\bar{\bar{A}} \leqq \aleph_0),$$

tehát 2-nél nagyobb véges ID a csillagterek körében valószínűleg nem is fordul elő.[8] A (18. 13)-nak esetleg megfelelő $\mathfrak{X}$ osztály karakterizálásánál tehát bizonyára szerepet játszanak majd olyan „jó" tulajdonságok (pl. lokális kompaktság stb.), amelyekkel a nem-megszámlálható, sőt általában a végtelen A-hoz tartozó csillagterek nem rendelkeznek; ilyen módon tehát ezek és az ezekhez hasonló esetleges további ellenpéldák hasznos iránymutatással szolgálhatnak a (18. 13) probléma megoldásához.

(18. 14). A várható nagy nehézségek és a kedvezőtlen előjelek ellenére is érdemesnek látszik a (18. 13) problémával foglalkozni, hiszen egy ilyen típusú eredménynek a már említetteken kívül további igen érdekesnek mondható következményei lennének. Pédaképpen megemlítjük a következőket:

1. *Azoknak az $\mathfrak{X}$-beli tereknek az* ID *végességével való karakterizálása, amelyeknek a megfelelő klasszikus dimenziója véges.* Ez tehát az (5. 4), 2° eredménynek az $\mathfrak{X}$ osztályra való kiterjesztése lenne (amelyhez persze nem is szükséges, hogy $f(n) = O(n)$ legyen).

2. *Olyan tételek, amelyek — a* (8. 4) *második beágyazási tétel alapján — biztosítják, hogy bármely $\mathfrak{X}$-beli rendes és a megfelelő klasszikus értelemben véges dimenziójú T_0-tér topologikusan beágyazható legyen megadott („nem túl nagy") számú rendezéstopologikus tér topologikus szorzatába.* (Az optimumnak, vagyis a lehető legkisebb tényezőszámnak a meghatározása — vö. (9. 2. 3) — ezen az úton persze nem érhető el.) Természetesen ez is MENGER—NÖBELING-típusú tétel lenne, amely a szeparábilis metrikus tereknél ténylegesen bővebb osztályra érvényes, de azon az áron, hogy tényezőterekként közelebbről alig karakterizált rendezéstopologikus tereket kellene megengedni (amelyekről csupán annyit tudunk mindenesetre, (1. 9. 3) alapján, hogy mint rendezett halmazok rendezés-teljesek, vagyis, hogy minden felülről, ill. alulról korlátos részhalmaznak van szuprémuma, ill. infimuma); igaz viszont, hogy ezek mindegyike, (18. 5) szerint, bármelyik klasszikus értelemben 1-dimenziós!

3. *Kompaktifikációs tételek*, amelyek bizonyos, valamelyik klasszikus értelemben véges dimenziójú, de ugyanezen dimenzióval nem kompaktifikálható terek esetében (vagy olyan esetekben, ahol ennek lehetősége nincs tisztázva) legalább annyit biztosítanának, hogy az illető tér topologikusan beágyazható „nem túl sok" (ugyanabban az értelemben) 1-dimenziós tér szorzatába; ehhez csupán a megfelelő

[8] A (18. 13. 3) állítás szinte triviális, hiszen $\bar{\bar{A}} \leqq \aleph_0$ esetén $S(A)$ igen könnyen beágyazható az euklideszi síkba. A (18. 13. 1) állítás bizonyítását és a (18. 13. 2) sejtéssel kapcsolatos részeredményeket egy későbbi dolgozatban fogjuk közölni.

(18. 12)-típusú tételnek a (8. 4) második beágyazási tétellel, továbbá (18. 5)-tel való összekapcsolása szükséges. Mivel pedig (1. 10) és TYIHONOV jól ismert szorzattétele (pl. [33] 143) szerint az így létrejövő szorzat szükségképpen kompakt HAUSSDORFF-tér, a (3. 7) és a (2. 6), (a) tételt, továbbá a (18. 7), (18. 8), (18. 9) tételek közül a megfelelőt felhasználva, végül is azt az eredményt nyernénk, hogy egy $\mathscr{X}$-beli rendes és *valamelyik* klasszikus értelemben véges dimenziójú T_0-tér *bármelyik* klasszikus értelemben „nem sokkal nagyobb" dimenzióval kompaktifikálható.[9]

Megjegyezzük még, hogy a 2. és 3. típusú tételek[10] olyan eredményeket fejeznének ki, amelyek — akárcsak a (18. 5) tétel — teljesen a „szokásos" dimenzióelmélet keretébe tartoznak (megfogalmazásukban nem szerepel az ID), de bizonyításuk (sőt a probléma felvetése is) az ID-n alapszik. Ez kétségtelenül igazolná az ID hasznosságát a klasszikus dimenziók elmélete szempontjából is. A problémák e csoportjának ilyen részletes ismertetésével éppen azt a törekvésünket is kívántuk kifejezni, hogy az ID-nak a hagyományos dimenziófogalmaktól kétségtelenül teljesen elütő koncepcióját (a saját, „intern" problematikájának feldolgozása mellett) *legalább következményeiben* lehetőleg közel vigyük a „szokásos" dimenzióelmélethez.

2. AZ IRÁNYDIMENZIÓ INDUKTIV ÉS LOKÁLIS DEFINÍCIÓJA

Az 1. pont befejező gondolatát folytatva megjegyezzük, hogy az ID elméletének további fejlődését (pl. az 1. pontban vázolt problémák megoldását is) talán elősegítené, ha sikerülne megszüntetni (vagy legalább enyhíteni) azokat a jelentős eltéréseket, amelyek már az ID *definícióját* is megkülönböztetik a klasszikus dimenziókétól.

Az ID fogalmának egyik lényeges formai eltérése a MENGER—URISZON- és a ČECH-dimenziótól egyaránt: definíciójának nem-induktív (nem-rekurzív) volta. Természetesen egyáltalán nem valószínű, hogy pusztán ez a körülmény lényegesen korlátozhatná az ID koncepciójának eredményességét.

Azt az elvet, hogy egy „természetes" dimenziófogalomnak induktív felépítésűnek kell lennie, először H. POINCARÉ mondta ki [49]-ben, ahol az ilyen dimenziódefiníciónak első példáját — mintegy prototípusát adta meg. Definícióját, amely több részletében nem volt eléggé precíz, L. E. I. BROUWER módosította [11]-ben az első korrekt, induktív (és egyébként kompaktumokra a későbbi MENGER—URISZON-félével ekvivalens) definícióvá. Az E. ČECH által bevezetett Ind X fogalmának definíciója az ind X-ével analóg; az eltérés az, hogy pontok környezetrendszere helyett zárt halmazok környezetrendszeréből indul ki (s ezzel persze elvész a fogalom lokális jellege). MENGER, alapvető [44] monográfiájában és több

[9] Itt a (3. 7), (2. 6),(a) és a (18. 7), (18. 8) ill. (18. 9) tételek együttese esetleg pótolható egyetlen tétellel, ti. a MENGER-féle (0. 6) szorzattétel valamelyik alkalmas ismert általánosításával vagy analogonjával; pl. a LEBESGUE-dimenzió esetében (ha lemondunk a „bármelyik" szóról), E. HEMMINGSEN következő tételével [68]: *ha X_1 és X_2 véges-Lebesgue-dimenziójú kompakt* HAUSDORFF-*terek, akkor*

$$\dim (X_1 \times X_2) \leqq \dim X_1 + \dim X_2 .$$

(Ezt csak példaképpen említjük; a dimenzióelmélet irodalmában több ilyen jellegű és az itt vázolt célra is alkalmas szorzattétel szerepel.)

[10] Tulajdonképpen itt ugyanannak a dolgonak, ti. a második beágyazási tételnek két különböző vonatkozásban való kiaknázásáról van szó.

más helyen, számos alkalommal hangsúlyozta a dimenzió induktív definíciójának természetességét és elengedhetetlenségét.

Az induktív felépítés mégsem vált általános követelménnyé a dimenzióelméletben, hiszen pl. a nevezetes LEBESGUE-féle „lefedési dimenzió" sem induktív, márpedig ennek a fogalomnak a jelentősége a dimenzióelméletnek már e dolgozat bevezetésében említett újabb, a nem okvetlenül szeparábilis, hanem tetszőleges metrikus terek körében mozgó szakaszában messze felülmúlja a másik két klasszikus dimenzió (de leginkább a kis induktív dimenzió) jelentőségét.

Mindazonáltal hasznos és érdekes lehetne az iránydimenziónak egy induktív — és legalább a topologikus terek valamely nem túl szűk osztályán az eredetivel ekvivalens — definícióját keresni. Talán alkalmas kiindulás a következő:

(18. 15) TÉTEL. *Legyen X tetszőleges tér, amelyre* $\mathrm{Dim}\, X \leqq n$ $(n=3, 4, \ldots)$. *Ekkor bármely $x \in X$ pont környezetrendszerének van egy bázisa olyan (X regularitása esetén akár zárt) környezetekből, amelyek mindegyikének H határa $n-1$ zárt H_i részhalmaz egyesítése, úgyhogy* $\mathrm{Dim}\, H_i \leqq n-1$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$.[11]

Ez az eredmény szinte magától értetődően indikálja a következő kérdéseket:

(18. 16) Probléma. *Lehet-e a* (18. 15) *tételt (esetleg nem tetszőleges X terekre, hanem azoknak valamely $\mathfrak{X}$ osztályára vonatkozóan) akár a H_i részhalmazok számát, akár azok* ID-*ját illetően lényegesen (tehát a* 11. *lábjegyzetben közölt* (18. 15.a) *tételen — amely tulajdonképpen „aszimptotikusan ekvivalens" (18. 15)-tel — túlmenően is) élesíteni?*

(18. 17) Probléma. *Van-e a tereknek olyan $\mathfrak{X}$ osztálya, amelybe tartozó végtelen* ID-*jú terekre is érvényes valamely* (18. 15)-*típusú tétel?*

(18. 18) Probléma. *Van-e a tereknek olyan $\mathfrak{X}$ osztálya, amelyekre vonatkozóan valamely* (18. 16)- *vagy* (18. 17)-*típusú tétel megfordítása is igaz?*

Ha erre a kérdésre igenlő volna a válasz, akkor ilyen módon $\mathrm{Dim}\, X$-nek egy (esetleg csak korlátozott érvényességi körű) induktív definíciójához jutnánk, amely ráadásul lokális is lenne, tehát (formailag) ezáltal is közelebb állna a *Menger—Uriszon*-dimenzió definíciójához.[12]

[11] Az $n=2$ esetre vonatkozó analóg tétel nyilvánvalóan nem igaz, $n=1$ esetén pedig az analóg állításnak nincs is értelme. — A tételt egyébként [59]-ben a következő élesebb fogalmazásban bizonyítjuk be:

(18. 15. a) TÉTEL: *Legyen $n \geqq 2$ természetes szám és X olyan tér, amelyre* $\mathrm{Dim}\, X \leqq n$. *Ekkor bármely $x \in X$ pont környezetrendszerének van bázisa olyan (X regularitása esetén akár zárt) környezetekből, amelyek mindegyikének határa előállítható* $\left[\frac{2n}{3}\right]$ *legfeljebb $n-1$* ID-*jú zárt részhalmaz egyesítéseként.*

(Ha c valós szám, akkor $[c]$ a legkisebb olyan egész számot jelenti, amely nem kisebb c-nél. — Az $n=2$ esetet itt nem kell kizárni.)

[12] Ami a lokális jelleget illeti: több lehetőség is kínálkozik arra, hogy az ID fogalmából kiindulva lokális jellegű (dimenzió-) fogalmakat alkossunk. Ezekre e helyen nem térünk ki.

Egyébként a lokális jelleg sem általános követelmény a dimenzióelméletben (bár pl. ALEXITS GYÖRGY e dolgozat bevezetésében már idézett [4] cikkében — a 46. oldalon — meggyőzően hangsúlyozza ennek jelentőségét), hiszen $\mathrm{Ind}\, X$ és $\dim X$ sem lokális dimenziófogalmak. Érdekes viszont, hogy a legújabb dimenzióelméleti irodalomban több különböző, $\mathrm{Ind}\, X$-ből, ill. $\dim X$-ből „előállított" új lokális dimenziófogalom merül fel (vö. pl. a 3. lábjegyzettel), amelyeket nem kis haszonnal alkalmaznak is.

3. IRÁNYOK METRIZÁLHATÓSÁGA

J. NAGATAtól származik a következő tétel ([73], 166):

(18. 19) TÉTEL. *Legyen X metrikus tér. Ha n természetes szám és* dim $X \leqq n$, *akkor X topologikusan beágyazható $n+1$ olyan X_i metrikus tér topologikus szorzatába, hogy* dim $X_i \leqq 1$ $(i=1, 2, \ldots, n+1)$.

Valószínűleg ma is nyitott kérdés azonban (legalábbis maga NAGATA 1965-ben megjelent könyvében még annak tartja), hogy nem elég-e minden esetben n tényező is?

Érdekes mármost ezt összevetni a következővel, ami a (8. 4), (1. 10), (3. 7) és (18. 4) tételek következménye:

(18. 20) TÉTEL. *Legyen X rendes T_0-tér. Ha n pozitív természetes szám és* Dim $X \leqq n$, *akkor X topologikusan beágyazható n olyan $\mathcal{R}_i$ kompakt rendezés-topologikus tér (ti. X bármely rendes minimális* IS*-ja elemeinek) topologikus szorzatába, hogy* dim $\mathcal{R}_i \leqq 1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Az analógia szembeszökő, s e két tétel szembeállítása a kérdéseknek és lehetőségeknek egész sorát indikálja, amelyeknek közös magja a következő:

(18. 21) Probléma. *Meg lehet-e adni (célszerűen esetleg megszámlálható* ID*-jú) rendes T_0-tereknek olyan, a szeparábilis metrikus terekénél ténylegesen bővebb $\mathcal{X}$ osztályát, hogy bármely $X \in \mathcal{X}$ térnek legyen olyan rendes minimális* IS*-ja, amelynek minden iránya a rendezés-topológiával felruházva metrizálható?*

Azokra az eszközökre, amelyeknek felhasználását e probléma megoldására meg lehetne kísérelni, itt nem térünk ki; az általános topológia irodalmában egy tér metrizálhatóságának rengeteg elégséges feltételét adták már meg (csak példaképpen utalunk KOWALSKYnak az 1. pontban idézett tételére), s ezek egy része ráadásul dimenzióelméleti vonatkozású (vö. NAGATA [47] könyvének V. fejezetével).

A következőkben vázlatosan áttekintjük azokat az eredménytípusokat, amelyeket egy (18. 21)-típusú tétel tenne lehetővé[13]:

1. Ha $\mathcal{X}$ metrikus tereknek olyan osztálya, amelyre a LEBESGUE-dimenzióra vonatkoztatott (18. 12) probléma megoldást nyer, akkor (18. 20) révén olyan tételhez jutunk, amely NAGATA említett kérdését, ha nem is az általa tekintett

$$\{X\colon X \text{ metrikus tér, } \dim X \leqq n\} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

osztályokra, de legalább minden ilyen osztálynak *egy részére*, ti. a megfelelő

$$\{X \in \mathcal{X}\colon \operatorname{Dim} X \leqq n\}$$

osztályokra pozitívan megválaszolja.

2. Az előbbinek bizonyos értelemben fordítottja az a lehetőség, hogy a (18. 21) probléma valamely megoldása révén (18. 12)-nek egy megoldásához jussunk. Ha ui. $\mathcal{X}$ véges ID-jú és szükségképpen metrikus tereknek olyan osztálya, amelyre

[13] Itt lényeges szerepet játszik a következő két ismert (és szinte triviális) tény: megszámlálhatóan sok metrikus tér topologikus szorzata metrizálható, és minden metrikus tér minden (topologikus) altere is metrizálható.

a (18. 21) kérdés már pozitív választ nyert, akkor minden $X \in \mathscr{X}$ tér (18. 20) alapján topologikusan beágyazható egy olyan Y kompaktumba, amelyre (pl. HEMMINGSEN-nek a 9. lábjegyzetben közölt tétele szerint) $\dim Y \leqq \operatorname{Dim} X$; mivel pedig a metrikus terek körében a LEBESGUE-dimenzió ekvivalens a ČECH-dimenzióval[14] és (tehát mindkettő) monoton[15], továbbá minden X T_1-térre triviálisan $\operatorname{ind} X \leqq \operatorname{Ind} X$[16], mindebből az következne, hogy bármely $X \in \mathscr{X}$ térre

$$\operatorname{ind} X \leqq \operatorname{Ind} X = \dim X \leqq \dim Y \leqq \operatorname{Dim} X.$$

3. Ha sikerülne a (18. 21) problémát megoldani, akkor ebből — attól függően, hogy a megoldást jelentő $\mathscr{X}$ osztály karakterizációjában $\mathscr{X}$ tagjainak metrizálhatósága szerepel, ill. nem szerepel — az ID-val (ti. annak megszámlálható voltával) kifejezett elégséges feltételt nyernénk arra, hogy egy metrikus tér szeparábilis legyen (ui. minden kompaktum szeparábilis, tehát megszámlálható bázisú, és egy megszámlálható bázisú térnek minden altere is ilyen tulajdonságú), ill. hogy egy tér egyáltalán metrizálható legyen.[17]

4. A RENDES TEREK OSZTÁLYÁNAK KARAKTERIZÁLÁSA

Jelöljük

$\mathscr{A}$-val a tökéletesen normális T_0-terek,
$\mathscr{B}$-vel a rendes T_0-terek,

[14] Ezt, a dimenzióelmélet újabb szakasza számára talán legalapvetőbb tételt először M. KATETOV bizonyította be 1952-ben [69]; azóta többen (pl. K. MORITA [72], C. H. DOWKER, W. HUREWICZ) is bebizonyították. Egy bizonyítás és néhány irodalmi adat található NAGATA könyvében ([47] 22—28). — Egyébként a dimenzióelmélet „klasszikus" szakasza számára nem kevésbé alapvető az a (18. 1)-gyel kapcsolatban már említett tény, hogy a *szeparábilis* metrikus terek körében *mindhárom* klasszikus dimenzió ekvivalens. — Azt, hogy nem-szeparábilis metrikus tér kis induktív dimenziója nem okvetlenül egyezik meg a másik két dimenziójával, először P. ROY mutatta meg méltán nagyon híres [74] cikkében, amelyben olyan (ráadásul teljes) metrikus X teret konstruált, amelyről bebizonyította, hogy $\operatorname{ind} X = 0$ és $\dim X = 1$.

[15] Ind X monotonitásának bizonyítását illetően l. pl. [47] 19.

[16] Bizonyos X (nem okvetlenül szeparábilis) metrikus terekről tudjuk, hogy $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$; ilyenek pl. az *erősen parakompakt* metrikus terek (amelyek ti. azzal az ún. „star-finite property"-val rendelkeznek, hogy minden nyílt lefedésüknek van olyan nyílt, és a teret szintén lefedő finomítása, amelynek minden egyes tagja ez utóbbi lefedő rendszernek legfeljebb véges sok más tagját metszi), sőt az olyan metrikus terek is, amelyek megszámlálhatóan sok zárt és erősen parakompakt altér egyesítéseként állíthatók elő.

A szóban forgó probléma azonban éppen ezekre a terekre vonatkozóan már nem probléma, mivel sikerült bebizonyítanunk, hogy ha X olyan véges ID-jú metrikus tér, amely megszámlálhatóan sok zárt és erősen parakompakt altér egyesítéseként állítható elő, akkor $\dim X \leqq \operatorname{Dim} X$ [61]. (A (18. 6) tétel ennek korolláriumaként adódik, hiszen minden lokálisan kompakt metrikus tér erősen parakompakt; ez utóbbi tény könnyen adódik ismert tételek egyszerű kombinációja révén, amint azt [61]-ben megmutattuk.)

[17] (3. 2) alapján nyilvánvaló, hogy az ID megszámlálható volta *szükséges* feltétele annak, hogy egy tér megszámlálható bázisú legyen, tehát speciálisan annak is, hogy egy metrikus tér szeparábilis legyen, de ez *nem elégséges* feltétel, még metrikus terek esetében sem. Ilyen szempontból is érdekes volna pl. a (18. 13. 2) sejtéssel foglalkozni. A legegyszerűbb (de a csillagtereknél bizonyára kevésbé érdekes) ellenpéldákat azok az X terek szolgáltatják, amelyeknek halmaza nem-megszámlálható, és topológiájuk a diszkrét topológia. Az ilyen X tér (mint minden diszkrét tér) metrizálható, továbbá (3. 6) szerint $\operatorname{Dim} X = 1$, és végül nyilvánvalóan nem szeparábilis.

$\mathcal{B}'$-vel a $\mathcal{B}$-beli terek összes altereinek, s végül
$\mathcal{C}$-vel a Tyihonov-terek (vagyis (8. 3) értelmében a gyengén rendes T_0-terek) osztályát.

Ekkor (7. 4)[18] és (2. 5), (b) alapján

$$\mathcal{A} \subseteqq \mathcal{B} \subseteqq \mathcal{B}' \subseteqq \mathcal{C}.^{19}$$

[18] Megjegyezzük, hogy bár a ((7. 2) alkalmazása útján bizonyított (7. 3) tételen alapuló) (7. 4) tétel az itteni probléma szempontjából persze értékes, a II. rész főeredményeként szereplő (10. 1) „harmadik beágyazási tétel" bizonyításához „túl nagy ágyú" volt. Ott ti. (7. 4)-nek csak azt a (7. 5)-ben kimondott következményét kellett felhasználnunk, hogy *minden metrikus tér rendes.* Ez utóbbi pedig egyszerűen (ti. a (7.2) lemma nélkül is) bizonyítható, pl. az itt vázolt módon:

Legyen X metrikus tér, amelynek metrikáját $\delta(x, y)$-nal $(x, y \in X)$ jelöljük. Legyen továbbá $\mathfrak{R}$ X-nek egy nem-rendes minimális IS-ja és $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ X-nek valamely nem-rendes iránya, ami úgy is fogalmazható, hogy az

$$X^*(\mathcal{R}) = X \setminus \bigcup \{S\colon\ S \in \mathcal{S}(R)\},$$

$$X^*(x, \mathcal{R}) = \underline{G}(\mathcal{R}; F_x) \setminus \bar{F}(\mathcal{R}; G_x) \quad (x \in X^*(\mathcal{R})),$$

$$X(\mathcal{R}) = \bigcup \{X^*(x, \mathcal{R})\colon\ x \in X^*(\mathcal{R})\}$$

jelölésekkel

$$X(\mathcal{R}) = X^*(\mathcal{R}) \neq \emptyset.$$

Legyen ármost

$$G(x; y, t) = \begin{cases} \{y \in X^*(x, \mathcal{R})\colon\ \delta(y, \bar{F}(\mathcal{R}; G_x) < t\} & (\underline{G}(\mathcal{R}; F_x) = X,\ \bar{F}(\mathcal{R}; G_x) \neq \emptyset), \\ \left\{y \in X^*(x, \mathcal{R})\colon\ \dfrac{1}{\delta(y, X \setminus \underline{G}(\mathcal{R}; F_x))} < t\right\} & (\underline{G}(\mathcal{R}; F_x) \neq X,\ \bar{F}(\mathcal{R}; G_x) = \emptyset), \\ \left\{y \in X^*(x, \mathcal{R})\colon\ \dfrac{\delta(y, \bar{F}(\mathcal{R}; G_x)}{\delta(y, X \setminus \underline{G}(\mathcal{R}; F_x))} < t\right\} & (\underline{G}(\mathcal{R}; F_x) \neq X,\ \bar{F}(\mathcal{R}; G_x) \neq \emptyset) \end{cases}$$

$$(x \in X(\mathcal{R}),\quad 0 < t < \infty),$$

továbbá

$$F(x; y, t) = \begin{cases} \{y \in X^*(x, \mathcal{R})\colon\ \delta(y, \bar{F}(\mathcal{R}; G_x)) \leqq t\} & (\underline{G}(\mathcal{R}; F_x) = X,\ \bar{F}(\mathcal{R}; F_x) \neq \emptyset), \\ \left\{y \in X^*(x, \mathcal{R})\colon\ \dfrac{1}{\delta(y, X \setminus \underline{G}(\mathcal{R}; F_x))} \leqq t\right\} & (\underline{G}(\mathcal{R}; F_x) \neq X,\ \bar{F}(\mathcal{R}; F_x) = \emptyset), \\ \left\{y \in X^*(x, \mathcal{R})\colon\ \dfrac{\delta(y, \bar{F}(\mathcal{R}; G_x))}{\delta(y, X \setminus \underline{G}(\mathcal{R}; F_x))} \leqq t\right\} & (\underline{G}(\mathcal{R}; F_x) \neq X,\ \bar{F}(\mathcal{R}; G_x) \neq \emptyset) \end{cases}$$

$$(x \in X(\mathcal{R}),\quad 0 < t < \infty).$$

(Ezek a definíciók „értelmesek": az előforduló nevezők értéke sohasem 0; a

$$\underline{G}(\mathcal{R}; F_x) = X \quad \textit{és} \quad \bar{F}(\mathcal{R}; G_x) = \emptyset$$

esetet pedig ki lehet zárni, mert ha ez valamely $x \in X$ pontnál fennáll, akkor szükségképpen vagy

(1) $$\mathcal{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, X), (X, X)\}$$

vagy

(2) $$\mathcal{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (X, X)\};$$

márpedig (1) a feltevésünkkel ellentétben *rendes* irány, (2)-nek pedig „semmi keresnivalója" egy *minimális* IS-ban, hiszen indiszkrét X tér esetében pótolható (1)-gyel, nem-indiszkrét X tér esetében

Lényegében már (9. 1)-ben feltettük ezt a kérdést:

(18. 22) Probléma. *Hogyan helyezkedik el $\mathscr{B}$ az $\mathscr{A}$ és a $\mathscr{C}$ között?*

Mindenek előtt megjegyezzük, hogy

(18. 22. 1) $$\mathscr{A} \subset \mathscr{B}.$$

Ennek igazolására példát mutatunk be — csupán vázlatos bizonyítással — olyan rendes T_0-térre, amely még csak nem is normális:

Legyen P az a tér, amelynek alaphalmaza a nem-negatív valós számok halmaza és amelynek topológiáját az

$$\{[a, b): 0 \leqq a < b < \infty\}$$

bázis indukálja. P nyilván HAUSDORFF-tér[20]. Igen könnyen belátható, hogy az

$$\mathscr{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{0\}), (X, X)\} \cup \{([0, a), [0, a]): \ 0 < a < \infty\}$$

rendszer rendes iránya, $\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}\}$ pedig IS-ja P-nek, tehát

(α) $$\operatorname{Dim} P = 1$$

és

(β) $$P \textit{ rendes tér.}$$

---

pedig semmivel sem járul hozzá az $\mathfrak{R}$-félterek által szolgáltatandó szubbázishoz, tehát $\mathfrak{R}$-ből az összes esetleges ilyen irányok a rendszer IS-voltának csorbítása nélkül elhagyhatók.)

Mármost könnyen kimutatható, hogy az

$$\mathscr{R}' = \{(G(x; y, t), F(x; y, t)): \ x \in X(\mathscr{R}), y \in X^*(x, \mathscr{R}), 0 < t < \infty\}$$

jelöléssel az

$$\mathscr{R}'' = \mathscr{R} \cup \mathscr{R}'$$

rendszer is iránya, mégpedig rendes iránya X-nek. (A bizonyítás persze nem rövidebb, mint (7. 3)-é; a különbség a felhasznált eszközökben van: (7. 3) bizonyításához a (7. 2) lemma kellett, az itt jelzett bizonyításnál ehelyett csupán a metrika közismert (és szinte triviális) folytonosságára kell hivatkozni.) Végül is az

$$\mathscr{R}''' = \begin{cases} \mathscr{R} & (\mathscr{R} \in \mathfrak{R}, \ \ \mathscr{R} \textit{ rendes}) \\ \mathscr{R}'' & (\mathscr{R} \in \mathfrak{R}, \ \ \mathscr{R} \textit{ nem rendes}) \end{cases}$$

jelöléssel az

$$\mathfrak{R}''' = \{\mathscr{R}''': \ \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\}$$

rendszer olyan rendes IS-ja lesz X-nek, amelyre

$$\overline{\overline{\mathfrak{R}'''}} = \overline{\mathfrak{R}} \,(= \operatorname{Dim} X),$$

amivel elértük célunkat.

[19] Persze $\mathscr{A} \subset \mathscr{C}$, hiszen — mint ismeretes — már a *normális* T_0-terek osztálya is ténylegesen szűkebb a TYIHONOV-terek (vagyis a teljesen reguláris T_0-terek) osztályánál. Az utóbbi tény illusztrálására pedig elegendő olyan normális T_1-térre hivatkozni, amelynek valamely altere nem normális, hiszen minden normális T_1-tér TYIHONOV-tér, és minden TYIHONOV-tér minden altere is TYIHONOV-tér. (Ilyen példára vonatkozóan l. pl. [3] 201—202.)

Érdekes egyébként a következő ismert példa is ([33]-ban bizonyítás nélkül — feladatként — megtalálható): a [0, 1] számszakasz nem-megszámlálhatóan sok példányának topologikus szorzata nem tökéletesen normális, ami legkönnyebben annak kimutatásával látható be, hogy e tér egyetlen G_δ-típusú részhalmaza sem lehet egyelemű halmaz. (Másrészt ez a tér — mivel TYIHONOV-terek szorzata — természetesen Tyihonov-tér, l. pl. [33] 117.)

[20] A P térre — érdekes, sőt, különös tulajdonságai miatt (l. pl. [33] 59, 133) — sokszor hivatkoznak az általános topológiai irodalomban: angolul „half-open interval space"-nek nevezik.

Tekintsük most az $X=P\times P$ „*Sorgenfrey*-teret”, vagyis P-nek topologikus szorzatát önmagával. Az X tér tulajdonságai közül számunkra most csak az a lényeges, hogy az X tér, amely nyilvánvalóan HAUSDORFF-tér, *nem normális*[21]. Annak bizonyítására, hogy X *rendes* tér, elegendő mármost azt kimutatni, hogy

$$(\gamma) \qquad \mathrm{Dim}\, X=2,$$

hiszen, ha ez így van, akkor X-nek az

$$\mathscr{R}_1=\{(G\times X,\ F\times X)\colon\ (G,\ F)\in\mathscr{R}\},$$

$$\mathscr{R}_2=\{(X\times G,\ X\times F)\colon\ (G,\ F)\in\mathscr{R}\}$$

nyilvánvalóan rendes irányaiból alkotott

$$\mathfrak{R}' = \{\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2\}$$

(szintén nyilvánvalóan) *rendes* IS-ja egyben *minimális* IS-ja, ami éppen X rendes voltát igazolja. Ami mármost (γ)-t illeti, a (2. 6), (a) szorzattétel és (α) szerint biztosan

$$\mathrm{Dim}\, X\leqq 2,$$

így hát most már minden azon múlik, hogy kimutassuk:

$$\mathrm{Dim}\, X\neq 1.$$

Márpedig, ha $\mathrm{Dim}\, X=1$ volna, akkor X-nek normálisnak kellene lennie (ennek bizonyítását itt csak vázoljuk[22]), ami azonban ellentmond annak, amit Sorgen-

[21] R. H. SORGENFREY 1947-es [75] dolgozatában az X teret azért konstruálja, hogy általa kimutassa: két parakompakt tér topologikus szorzata nem okvetlenül parakompakt. Ez volt az első ilyen példa azóta, hogy DIEUDONNÉ 1944-ben bevezette a parakompaktság fogalmát (mint a kompaktság egy általánosítását), és többek között bebizonyította, hogy ha az egyik tényező nem csak parakompakt, hanem még kompakt is, akkor a szorzat parakompakt, továbbá, hogy minden parakompakt HAUSDORFF-tér normális. SORGENFREY mármost azt bizonyította be, hogy P parakompakt, tehát normális, viszont X nem normális, tehát nem is parakompakt. SORGENFREY tehát ezzel egyúttal arra a már ismert tényre is újabb példát adott, hogy két normális (akár HAUSDORFF-) tér topologikus szorzata nem okvetlenül normális.

[22] [61]-ben bebizonyítottuk a következőt:

(18. 22. a) TÉTEL. *Legyen* $\mathrm{Dim}\, X=1$ *és* $\mathfrak{R}=\{\mathscr{R}\}$ *tetszőleges minimális IS-ja X-nek. Ekkor bármely nem-üres* $U\subseteqq X$ *halmaz előállítható páronként diszjunkt „$\mathfrak{R}$-nyílt intervallumok” egyesítéseként, vagyis létezik olyan*

$$\mathscr{U}\subseteqq\{G\setminus F\colon\ G\in\mathscr{G}(\mathscr{R}),\ F\in\mathscr{F}(\mathscr{R}),\ F\subset G\}$$

halmazrendszer, amelyre

$$(G_1\setminus F_1)\cap(G_2\setminus F_2)=\emptyset \quad (G_1\setminus F_1,\ G_2\setminus F_2\in\mathscr{U})$$

és

$$U=\bigcup\{G\setminus F\colon\ G\setminus F\in\mathscr{U}\}.$$

(Ezen a tételen alapult (18. 3) bizonyítása. Természetesen mindig

$$\overline{\overline{\mathscr{U}}}\leqq\tau(X),$$

s ha (18. 22. a)-t ezzel a kiegészítéssel látjuk el, akkor annak a közismert elemi ténynek az általánosításáról van szó, hogy a számegyenes bármely nem-üres nyílt részhalmaza előállítható szükségképpen megszámlálhatóan sok nyílt intervallum egyesítéseként. A számegyenest mint topologikus teret persze a „szokásos” IS-val ellátva kell tekintenünk.)

frey bizonyított be X-ről. X tehát valóban olyan rendes T_0-tér, amely nem normális[23].

A (18. 22. 1) eredménnyel megoldottuk a (18. 22) probléma egyik részét. A másik rész, ti. $\mathscr{B}$ és $\mathscr{C}$ viszonyának tisztázása, jóval nehezebbnek látszik. Természetesen a rendes T_0-terekre vonatkozó tételeinknek annál több és messzebb ható alkalmazása várható, minél bővebbnek adódik a $\mathscr{B}$ osztály. A legkedvezőbb az volna, ha $\mathscr{B}=\mathscr{C}$ adódnék, hiszen ekkor pl. az 1. és 2. beágyazási tétel az elég bő és sok tekintetben alapvető $\mathscr{C}$ osztályban lenne érvényes; továbbá ekkor a TYIHONOV-terek körében a „*rendes minimális* IS" fogalma ekvivalens lenne a „*minimális rendes* IS" fogalmával, s így tetszőleges irányok helyett eleve rendes irányokból kiindulva, egy „*rendes* ID"-fogalmat vezethetnénk be, amely a T_1-terek közül pontosan a Tyihonov-terekre lenne értelmezve, s ebben a körben ekvivalens lenne az iránydimenzióval.

E tétel felhasználásával sikerült bebizonyítanunk annak következő analogonját is:

(18. 22. b) TÉTEL. *Legyen* Dim $X=1$ *és* $\mathfrak{R}=\{\mathscr{R}\}$ *tetszőleges minimális* IS-*ja* X-*nek. Ekkor bármely nem-üres zárt* $H\subseteq X$ *halmaz előállítható páronként diszjunkt „$\mathscr{R}$-zárt intervallumok" egyesítéseként, vagyis létezik olyan*

$$\mathscr{H}\subseteq\{F\setminus G:\ F\in\mathscr{F}(\mathscr{R}),\ G\in\mathscr{G}(\mathscr{R}),\ G\subset F\}$$

halmazrendszer, amelyre

$$(F_1\setminus G_1)\cap(F_2\setminus G_2)=\emptyset\quad(F_1\setminus G_1,\ F_2\setminus G_2\in\mathscr{H})$$

és

$$H=\bigcup\{F\setminus G:\ F\setminus G\in\mathscr{H}\}.$$

(Ha az $\mathfrak{R}$ IS *rendes*, akkor a tétel állítása triviális, hiszen akkor minden nem-üres zárt halmaz előállítható pl. $\mathfrak{R}$-síkok egyesítéseként; ha X *ráadásul* T_0-tér, akkor bármely nem-üres $\mathfrak{R}$-sík egyetlen pontot tartalmaz, s így ekkor — pl. a számegyenesre vonatkoztatva is — a tétel teljesen érdektelen trivialitássá fajul. Érdekes, hogy ennek és az előző tételhez fűzött megjegyzésnek ellenére mindkét tétel bizonyítása eléggé nehéz.)

Végül (18. 22. b) segítségével bebizonyítható az a tétel, amire a SORGENFREY-példa diszkussziójánál hivatkoznunk kell:

(18. 22. c) TÉTEL. *Ha egy* X *Haussdorff-térre* Dim $X=1$, *akkor* X *normális tér.*

(A (18. 22. b) és a (18. 22. c) tétel bizonyítását egy későbbi dolgozatban fogjuk közölni.)

[23] SORGENFREY itt felhasznált eredményét pl. KELLEY ([33] 172) és NAGATA ([47] 196) is idézi. NAGATA azonban kiegészíti SORGENFREY példáját azzal a triviális, de dimenzióelméleti szempontból igen érdekes megjegyzéssel, hogy bár (nyilvánvalóan)

$$\dim P=0,$$

mégis

$$\dim X>0$$

(ui. — mint igen könnyen belátható — minden 0-LEBESGUE-dimenziójú tér normális). Itt tehát, bár normális, sőt parakompakt HAUSDORFF-terek szorzatáról van szó, mégsem érvényes a nevezetes

$$\dim(X_1\times X_2)\leqq\dim X_1+\dim X_2$$

egyenlőtlenség, amelynek érvényességi körét a dimenzióelméleti cikkek hosszú sorában vizsgálták már. (Vö. HEMMINGSENnek a 9. lábjegyzetben idézett tételével.)

NAGATA egyébként nem említi az idézett helyen, hogy ismeretes-e $\dim X$ értéke. Nem vizsgáltuk még meg, hogy mennyire nehéz volna ezt a „szokásos" dimenzióelmélet keretében megállapítani; mindenesetre megjegyezzük azonban, hogy az ID elmélete bizonyos felvilágosítást képes adni erről, ui. pl. a (18. 6. a) tétel (amely itt alkalmazható, hiszen X szinte nyilvánvalóan LINDELÖF-tér) és (γ) alapján

$$\dim X\leqq 2.$$

Ha viszont $\mathscr{B} \subset \mathscr{C}$ adódnék, akkor hasznos volna a $\mathscr{B}$ osztályt klasszikus topológiai kategóriákkal karakterizálni, amint az a gyengén rendes T_0-terek osztályával sikerült. Erre vonatkozóan a legtermészetesebb gondolat az, hogy egy T_0-tér rendességének esetleges elégséges feltételeként elsősorban a normalitás (vagy valamely ezt implikáló tulajdonság) vehető számításba. Ha ui. $\mathscr{R}_0$ egy X normális T_1-tér valamely nem-rendes iránya és

(18. 22. 1a) $$x \in X \setminus \cup\{S:\ S \in \mathscr{S}(\mathscr{R}_0)\},$$

akkor

$$\bar{F}(\mathscr{R}_0;\ G_x),\quad X \setminus G(\mathscr{R}_0; F_x),\quad \{x\}$$

páronként diszjunkt zárt halmazok; legyenek most

$$U_x \subseteqq X,\quad V_x \subseteqq X$$

olyan nyílt halmazok, amelyekre

$$\bar{F}(\mathscr{R}_0; G_x) \subseteqq U_x,\quad U_x \cap [(X \setminus \underline{G}(\mathscr{R}_0; F_x)) \cup \{x\}] = \emptyset,$$

$$X \setminus \underline{G}(\mathscr{R}_0; F_x) \subseteqq V_x,\quad V_x \cap (\bar{F}(\mathscr{R}_0; G_x) \cup \{x\}) = \emptyset;$$

ekkor az

$$\mathscr{R}(\{x\}) = \mathscr{R}_0 \cup \{(U_x, X \setminus V_x)\}$$

rendszer szintén iránya X-nek (amelynek definíció szerinti rendezésében a

$$(G_x, \bar{F}(\mathscr{R}_0; G_x)) \prec (U_x, X \setminus V_x) \prec (\underline{G}(\mathscr{R}_0; F_x), F_x)$$

párok közvetlen szomszédok), és amely — ha nem is okvetlenül rendes irány — annyival „rendesebb" $\mathscr{R}$-nél, hogy

$$x \in \cup\{S:\ S \in \mathscr{S}(\mathscr{R}(\{x\}))\},$$

ti.

$$x \in (X \setminus V_x) \setminus U_x \in \mathscr{S}(\mathscr{R}(\{x\})).$$

Kézenfekvő mármost ezt az eljárást folytatni, vagyis egyre bővebb

(18. 22. 2) $$Y \subseteqq \cup\{S:\ S \in \mathscr{S}(\mathscr{R})\}$$

halmazokhoz rendelni olyan

(18. 22. 3) $$\mathscr{R}(Y) \supseteqq \mathscr{R}_0$$

rendszereket, amelyekre

(18. 22. 4) $$Y \subseteqq \cup\{S:\ S \in \mathscr{S}(\mathscr{R}(Y))\}$$

és ily módon a jólrendezési tétel alkalmazásával olyan (az inklúzióra nézve) maximális (18. 22. 2)-típusú $\bar{Y}$-halmazhoz jutni, amelyre teljesül (18. 22. 3) és (18. 22. 4), és amelyről (X-re vonatkozó alkalmas kikötések mellett) esetleg kimutatható, hogy

$$\bar{Y} = X \setminus \cup\{S:\ S \in \mathscr{S}(\mathscr{R})\};$$

ez pedig azt jelentené, hogy

$$X = \cup\{S:\ S \in \mathscr{S}(\mathscr{R}(\bar{Y}))\},$$

vagyis, hogy $\overline{\mathscr{R}}(Y)$ olyan *rendes* iránya X-nek, amely tartalmazza $\mathscr{R}_0$-t.[23a] Ha végül X valamely nem-rendes minimális $\mathfrak{R}$ IS-jának minden nem-rendes $\mathscr{R}$ irányát ily módon egy rendes iránnyá bővítjük, akkor ezek $\mathfrak{R}$ eredetileg is rendes irányaival együtt X-nek egy rendes minimális IS-ját fogják alkotni, és az utóbbi létezése éppen azt jelenti, hogy az X tér rendes.

(18. 23). Ezt a „haditervet" átgondolva könnyen belátható (ezt itt nem végezzük el), hogy az csak akkor vezethet el a „győzelemhez", ha — akár az X-re kirótt további feltételekkel, akár a kiinduló minimális IS alkalmas megválasztásával, akár a bővítő eljárás megfelelő finomításaival, vagy esetleg többféle ilyen eszköz együttes alkalmazásával — biztosítható, hogy tetszőleges (vagy akár csak a vázolt eljárás során bizonyos módon fellépő) nyílt

$$A \subset B \subseteqq X$$

halmazokhoz mindig létezik olyan zárt $C \subseteqq X$ halmaz, amelyre

$$A \subseteqq C \subseteqq B.$$[24]

Úgy tűnik, hogy a $\mathscr{B}$ osztály karakterizálásának kérdését éppen ezen a ponton kellene megragadni.

A $\mathscr{B} \subset \mathscr{C}$ esetben továbbá érdekes a következő kérdés is:

(18. 24) Probléma. *Hogyan helyezkedik el $\mathscr{B}'$ a $\mathscr{B}$ és a $\mathscr{C}$ között?*

Igaz-e pl. (ill. $\mathscr{B}$ mely $\mathscr{B}_1$ részére igaz), hogy ha $X \in \mathscr{B}$ (ill. $x \in \mathscr{B}_1$), akkor X-nek minden X^* alterére is $X^* \in \mathscr{B}$?[25]

E problémáról csupán annyit említünk meg, hogy ha X rendes tér, $\mathfrak{R}$ egy rendes minimális IS-ja X-nek és $X^* \subset X$, akkor az $\mathfrak{R}|X^*$ rendszer nyilvánvalóan rendes IS-ja az X^* altérnek; a kérdés magva az, hogy $\mathfrak{R}|X^*$ *minimális* IS-ja-e X^*nak?

Végezetül megemlítjük, hogy mindeddig egy X tér rendességét (természetesen kivéve azokat az eseteket, amelyekben *közvetlenül* sikerült X-nek egy — bebizonyíthatóan minimális — rendes IS-ját megkonstruálni, mint a (3. 6), (3. 7) tételeknél) mindig oly módon igyekeztünk kimutatni (akár sikerült, mint pl. a (7.3), (7.4) té-

[23a] Az eljárásnak több variánsa képzelhető el; lehet pl. ahelyett, hogy éppen egy *bizonyos* (18. 22. 1a)-féle x pont „kerüljön be egy síkba", vagy más szóval, hogy X egyre „rendesebbé" váló irányainak egy (jól-) *rendezett*, $\mathscr{R}_0$-lal kezdődő halmazát hozzuk létre, csupán arra törekedni, hogy az X tér $\mathscr{R}$ irányainak valamely olyan, akár az $\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}_2$, akár az $\mathscr{S}(\mathscr{R}_1) \subset \mathscr{S}(\mathscr{R}_2)$ relációval *féligrendezett* halmazát konstruáljuk meg, amelynek $\mathscr{R}_0$ minimális eleme; ilyen eljárás esetén persze a jólrendezési tétel helyett pl. a ZORN-lemmával próbálkoznánk. (Azt, hogy X bármely nem-rendes iránya valamely ilyen, a (18. 22. 2)-ben kifejezettnél gyengébb értelemben rendesebbé tehető" legyen, esetleg valamely, az X normalitásánál gyengébb feltétel is biztosíthatná; másrészt viszont bizonyos, hogy a normalitásnál *sokkal* gyengébb feltétel nem lehet elegendő, hiszen $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}$ alapján elengedhetetlen, hogy X teljesen reguláris legyen.) Egyébként mindaz, amit (18. 22)-vel kapcsolatban még mondani fogunk, továbbá (18. 23) és az utóbbihoz fűzött 24. számú lábjegyzet a javasolt eljárás most említett variánsaira is vonatkozik.

[24] Ha pl. X egy összefüggő T_1-tér, $B \subseteq X$ valamely nyílt halmaz, $x \in B$ és $A = B \setminus \{x\}$, akkor nyilván nincs olyan zárt $C \subseteq X$ halmaz, amely (a mondott értelemben) a nyílt A és B halmazok közé iktatható. Más kérdés persze, hogy ez az A, B nyílt pár egyáltalán előfordulhat-e (vagy szükségszerű-e, hogy előforduljon) a vázolt eljárásban; ebben a kérdésben a jelen probléma érintkezik az e fejezet 9. pontjában ismertetendő problémakörrel.

[25] Erre a kérdésre eddig csupán egy rendkívül erős megszorítással — a Dim $X=1$ feltétel mellett — tudtunk válaszolni, ti. a (2. 5), (c) tétellel. — Egyébként a (2. 5), (b) tétel minden korlátozás nélkül pozitív választ ad a *rendes* terek helyett *gyengén rendes* terekre megfogalmazott analóg kérdésre.

telek esetében, akár csak mint problémát taglaltuk, hogy bebizonyítjuk: X bármely nem-rendes iránya, vagy bármely, sőt akár egyetlen nem-rendes minimális IS-jának minden nem-rendes iránya) kibővíthető egy rendes iránnyá. Ebből ui. nyilvánvalóan következik, hogy az X tér rendes. Talán megkísérelhető mármost az is, hogy egy X tér valamely nem-rendes $\mathfrak{R}_1$ IS-jából — az említett törekvés sikertelensége esetén — valamely más, bonyolultabb transzformáció útján nyerjük X-nek egy olyan rendes $\mathfrak{R}_2$ IS-ját, amelyre $\overline{\overline{\mathfrak{R}_2}} \leqq \overline{\overline{\mathfrak{R}_1}}$. (Ez tehát azt jelentené, hogy X-nek $\mathfrak{R}_2$-ből származó szubbázisa nem okvetlenül része az $\mathfrak{R}_1$-ből származó szubbázisnak.) Az ilyen eljárás azonban szinte reménytelenül nehéznek látszik; ráadásul nem is tudjuk, hogy indokolt-e vele foglalkozni, vagyis hogy léteznek-e egyáltalán olyan terek, amelyek rendesek ugyan, de rendességüket az egyszerűbb eljárással — hacsak nem szorítjuk meg valamely alkalmas módon a kiinduló IS megválasztását — *nem is lehet* bebizonyítani. Ezért ezen egész problémakörrel kapcsolatos utolsó kérdésünk ez:

(18. 25) Probléma. *Létezik-e olyan X rendes $(T_0$-)tér, és X-nek egy olyan $\mathfrak{R}$ nem-rendes minimális* IS-*ja, hogy az $\mathfrak{R}$-ben szereplő nem-rendes irányok között van legalább egy, amely nem egészíthető ki rendes iránnyá?*

5. Az iránydimenzió axiomatikus karakterizálása

A kis induktív dimenzió axiomatikus karakterizálásának vitathatatlanul nagyon érdekes kérdését Menger vetette fel [71] dolgozatában (persze szeparábilis metrikus terekre vonatkozóan), de csak az euklidészi sík altereinek osztályára tudta megoldani. Eredménye így hangzik:

(18. 26) Menger tétele. *Legyen $f(X)$ olyan, az E_2 tér összes altereinek $\mathscr{X}$ halmazán értelmezett valós értékű függvény, amely*

(I) *monoton, azaz*

$$X_1, X_2 \in \mathscr{X},\ X_1 \subset X_2 \Rightarrow f(X_1) \leqq f(X_2),$$

(II) *F_σ-konstans, azaz*

$$X_i \in \mathscr{X},\ X_i \text{ zárt } E_2\text{-ben} \quad (i=1,2,\ldots) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) \leqq \sup_{i=1,2,\ldots} f(X_i),$$

(III) *„topologikus", azaz*

$$X_1, X_2 \in \mathscr{X},\ X_1 \text{ homeomorf } X_2\text{-vel} \Rightarrow f(X_1) = f(X_2),$$

(IV) *„kompaktifikálható", azaz*

$$X \in \mathscr{X} \Rightarrow \text{van } X\text{-nek olyan } X' \in \mathscr{X} \text{ kompaktifikációja, amelyre } f(X') = f(X),$$

(V) *„normált", azaz*

$$f(\{x\}) = 0 \ (x \in E_2),\ f(E_1) = 1,\ f(E_2) = 2;$$

ekkor

$$f(X) = \operatorname{ind} X \quad (X \in \mathscr{X}).$$

Az általános probléma tudomásunk szerint ma is megoldatlan (sőt, talán MENGER idézett tételének születése, vagyis 1929 óta nem értek el további részeredményt sem), és általános vélemény szerint rendkívül nehéz.[26] Talán nem túlzás ezt a kérdést a dimenzióelmélet egyik legmélyebb problémájának nevezni.[27]

A téma diszkussziója során egyelőre megmaradunk az E_2 tér alterei $\mathfrak{X}$ családjának körében.

Érdemes megnézni, hogy milyen mértékben „illik rá" MENGER axiómarendszere az ID-ra. (Természetesen eleve tudjuk, hogy az ID nem elégítheti ki az összes axiómákat, hiszen akkor éppen MENGER tétele alapján

$$\operatorname{Dim} X = \operatorname{ind} X \quad (X \in \mathfrak{X})$$

volna, ami nyilvánvalóan nem igaz.) Mármost a szóban forgó axiómarendszerben csupán két olyan axióma van (ti. a (II) és az (V) axióma), aminek az ID — mint f függvény — nem tesz eleget.

Először az (V) axiómával foglalkozunk, mert ez látszik a könnyebb kérdésnek, ui.

$$\operatorname{Dim} E_1 = 1, \quad \operatorname{Dim} E_2 = 2,$$

és csupán

$$\operatorname{Dim} \{x\} \neq 0 \qquad (x \in E_2).$$

Ezért első kérdésünk ez:

(18. 27) Probléma. *Lehet-e az* ID *definíciójából kiindulva (annak definícióját alkalmasan módosítva) legalább az $\mathfrak{X}$ osztályra vonatkozóan egy olyan másik (talán „normált* ID"*-nak nevezhető)* Dim* X *dimenziófogalmat alkotni, amely egyrészt minden, az* ID *elmélete szempontjából lényeges tulajdonságban*[28], *továbbá esetleg*

[26] A probléma jelentőségét és irodalmát illetően l. pl. [31] 156, továbbá P. ALEXANDROFF: Einige Problemstellungen in der mengentheoretischen Topologie, MAT. Сборник 1 (43), № 5, 619—634 (1936).

[27] Itt említjük meg (bár tartalmilag nem tartozik ide) a dimenzióelmélet egy másik híres problémáját, amelyet L. A. TUMARKIN vetett fel 1926-ban, s a széles körű érdeklődés ellenére is csak 1966-ban oldódott meg azáltal, hogy D. W. HENDERSON olyan végtelen dimenziós kompaktumot (kompakt metrikus teret) konstruált (l. pl. *Amer Journal of Math.* **89**, 105—121 és 122—123 (1967)), amelynek nincs tetszőlegesen nagy véges dimenziós részkompaktuma. TUMARKIN kérdése az volt, hogy létezik-e ilyen kompaktum.

Érdekes mármost, hogy TUMARKIN problémája (5.3) szerint ekvivalens azzal a kérdéssel, hogy létezik-e olyan kompakt metrikus X tér, amelyre

$$\operatorname{Dim} X = \aleph_0, \qquad \sup \{\operatorname{Dim} X^* : X^* \subset X,\ X^* \text{ zárt}\} < \aleph_0.$$

HENDERSON példája tehát ezt is eldöntötte. Mégis érdemesnek látszik (nem utolsósorban azért, mert HENDERSON konstrukciója meglehetősen bonyolult) arra törekedni, hogy az utóbbi kérdést (s ezzel együtt persze TUMARKIN kérdését is) az ID elméletének eszközeivel válaszoljuk meg. Talán nem érdektelen az sem, hogy TUMARKIN problémájával ellentétben az említett „iránydimenziós" kérdésfeltevés minden vonatkozásban messzemenően általánosítható.

[28] Ebbe persze beleértendő az (I) és a (III) Menger-axiómának, továbbá az (V) axióma második és harmadik részének teljesítése is; éppen ezért nem is kell e probléma megfogalmazásánál külön kikötni, hogy a normált ID egyáltalán „dimenziófogalom" legyen (0. 11) értelmében, hiszen az ottani követelmények éppen MENGER axiómarendszere most említett részeinek felelnek meg, csupán azzal az eltéréssel, hogy a (0. 11)-beli követelmények az (V) axióma első részét (vagy akár annál kevesebbet, hiszen (0. 11), (c) szerint csak az a lényeges, hogy $\operatorname{Dim}^* E_0 \neq \operatorname{Dim}^* E_1$ legyen) is megkívánják, de hiszen éppen ez az a „normáltság", amit a probléma megfogalmazásának folytatásában Dim*X-re vonatkozóan explicite meg fogunk követelni.

sok, az alkalmazások szempontjából lényeges $X \in \mathcal{X}$ tér dimenziójának értékében is megegyezik az ID*-val, és amelyre másrészt*

(18. 27. 1) $$\mathrm{Dim}^* E_0 = 0?$$ [29]

Megjegyezzük (vö. az ID (1. 14) definíciójához fűzött lábjegyzettel), hogy ez a probléma nem látszik nehéznek; talán sajnálatos is, hogy az ID egész koncepciójának megalkotásakor nem törekedtünk *eleve* a bevezetendő új dimenziófogalom *teljesen* „normált" voltának biztosítására. Az axiomatizálás témáját mindenesetre azzal a nem titkolt reménnyel diszkutáljuk tovább, hogy egy ilyen $\mathrm{Dim}^* X$ fogalmat (talán hamarosan) sikerül majd bevezetni.

Ez egyébként azért is örvendetes volna, mert egy ilyen $\mathrm{Dim}^* X$ $(X \in \mathcal{X})$ fogalom létezése bizonyos felvilágosítást nyújtana a MENGER-féle axiómarendszer *függetlenségére* vonatkozóan, ti. nyilvánvalóvá tenné, hogy a (II) MENGER-axióma nem következik a többiből (hacsak $\mathrm{Dim}^* X$ nem annyival „jobb" dimenziófogalom

[29] Természetesen a (2. 7) egyesítési tétel is az ID-nak olyan tulajdonságát fejezi ki, amelyet a „normált ID"-tól is meg kell követelnünk (hiszen ez a tétel — az összeadandók nyílt-zártságának megkövetelése miatt — pl. az $\mathcal{X}$ osztályra vonatkoztatva sajnos sokkal gyengébb is, mint a „szokásos" dimenzióelmélet ismert egyesítési tételei).

(Megemlítjük e helyen a (2. 7) tétellel kapcsolatban, hogy P. HAMBURG (Bukarest) szóbeli megjegyzése szerint — amelyért itt köszönetet is mondunk — olyan esetben, amikor a szóban forgó X_k halmazok páronként diszjunktak, nem szükséges előírni, hogy csak megszámlálható sokan legyenek. Az ID HAMBURG-féle egyesítési tétele — amelynek bizonyítása majdnem szóról szóra úgy történhet, mint a (2. 7) tételé — tehát így hangzik:

(18. 27. a) TÉTEL. *Ha $\mathcal{E}$ egy X tér páronként diszjunkt nyílt-zárt halmazainak olyan családja, hogy*

$$X = \bigcup \{E\colon\ E \in \mathcal{E}\},$$

akkor

$$\mathrm{Dim}\, X = \sup \{\mathrm{Dim}\, E\colon\ E \in \mathcal{E}\}.$$

Természetesen nagy kár, hogy — pl. HUREWICZ (0. 7) egyesítési tételéhez képest — itt a szereplő altereket igen erős feltételeknek kell alávetnünk, még inkább, mint a (2. 7) tételnél. Egyelőre nem is mutatkozik semmi remény arra, hogy akár csak a (2. 7) tételnél enyhíteni lehetne azon a szigorú kikötésen, hogy az illető részhalmazok nyílt-zártak legyenek. Ez persze erősen megszorítja azoknak az X tereknek a körét is, amelyekre akár csak a (2. 7) tétel alkalmazható, hiszen pl. összefüggő terek eleve nem tartozhatnak ebbe a körbe. Ezért csupán a következő három tény nyújt némi kárpótlást: egyrészt X-től azon jó tulajdonságok (pl. metrizálhatóság, megszámlálható bázis létezése, normalitás, parakompaktság stb.) egyikét sem kell megkövetelnünk, amelyek valamelyike a dimenzióelmélet minden ismert egyesítési tételében elengedhetetlen; másrészt nincs szükség az $\mathcal{E}$-re — mint X-et lefedő rendszerre — vonatkozó olyan szokásos feltételekre, mint pl. a lokális végesség vagy legalább lokális megszámlálhatóság; végül jelentős előnye a (18. 27. a) tételnek, hogy az $\mathcal{E}$ család tetszőlegesen nagy számosságú lehet.)

Visszatérve a (18. 27. 1) követelményre megemlítjük még, hogy az I. rész 193. oldalán tett ama kijelentésünk, hogy az ID a (0. 11) követelmények értelmében „megérdemli" a „dimenzió" nevet, egy kis korrekcióra szorul; ennek kijelentésénél ui. nem vettük figyelembe E_0-t, vagyis (az egyelemű térrel azonos) 0-dimenziós euklidészi teret, amelyet az ID sajnos nem különböztet meg az E_1 tértől. Az ID definíciójának (18. 27) értelmében való módosításával persze meg lehetne szüntetni ezt a bajt.

Ezzel kapcsolatban végül megjegyezzük, hogy a dimenzióelméletben uralkodó felfogás szerint egy „természetes" dimenziófogalomnak többé-kevésbé obligát tulajdonsága még az is, hogy a (18. 27. 1)-nek megfelelő tényen túlmenően minden (akár végtelen) megszámlálható tér dimenziója is 0 legyen (l. pl. [31] 154). A (18. 27) problémát persze úgy is fogalmazhatnánk, hogy (18. 27. 1) helyett az utóbbi erősebb követelményt támasztjuk a „normált ID"-val szemben, ami azonban egyáltalán nem célszerű, hiszen ezzel pl. „elrontanánk" az egyik fő eredményünket, ti. a normált ID esetében természetesen $n = 0$-ra is kiterjesztendő (10. 8) tételt.

Dim X-nél, hogy az utóbbival ellentétben még F_σ-konstans is, ami — mint már megjegyeztük — nagyon valószínűtlen).[30]

Mármost abból a feltételezésből kiindulva, hogy a (18. 27) probléma valóban megoldható (bár ez siker esetén is bizonyosan sok részletkérdés technikailag fáradságos tisztázását fogja megkövetelni), Menger (18. 26) tétele alapján úgy tűnik, hogy az ID és a MENGER—URISZON-dimenzió közötti — részben e dolgozat folyamán szinte folyamatosan emlegetett — sok különbség közül az az igazán mély különbség (pontosabban: a többi is végső soron „annak rovására írható"), ami MENGER (II) axiómájában — más szóval az ezen axióma (ami nem egyéb, mint HUREWICZ (0. 7) egyesítési tételének az $\mathfrak{X}$ osztályra való megszorítása) és az ID (2. 7) egyesítési tétele közötti eltérésben — fejeződik ki. Ebből persze természetesen adódik az a kérdés, amelyet az egész jelen problémakör magjának tekinthetünk:

(18. 28) Probléma. *Legyen* Dim* X *a* (18. 27) *probléma egy megoldása. Lehet-e ekkor* MENGER (18. 26)*-beli* $\mathfrak{A} = \{(\mathrm{I}), (\mathrm{II}), (\mathrm{III}), (\mathrm{IV}), (\mathrm{V})\}$ *axiómarendszerének* (II) *axiómáját valamely olyan* (II*) *axiómával helyettesíteni (és mi lenne az), hogy az*

$$\mathfrak{A}^* = \{(\mathrm{I}), (\mathrm{II}^*), (\mathrm{III}), (\mathrm{IV}), (\mathrm{V})\}$$

rendszer eleget tegyen az axiómarendszer formális logikai kritériumainak és az $\mathfrak{A}^*$ *axiómarendszer éppen* Dim* X*-et karakterizálja?*

(Talán az lenne a legszebb, ha (II*) szerepét éppen a (2. 7) tétel formális megfogalmazásának egy variánsa tölthetné be; maga (2. 7) nem felel meg, hiszen annak ind X is eleget tesz.)

Befejezésül megjegyezzük, hogy a (18. 27) és a (18. 28) probléma esetleges megoldása után — tekintet nélkül arra, hogy hogyan áll a MENGER felvetette általános probléma ügye — meg kellene próbálkozni azzal, hogy a bevezetett „teljesen normált ID" fogalmat E_2 altereinek $\mathfrak{X}$ osztályán túlmenően is axiomatikusan karakterizáljuk.

6. A SZORZATTÉTELLEL KAPCSOLATOS PROBLÉMÁK

Az ID-val kapcsolatban felvethető a hagyományos dimenziófogalmakra vonatkozó sok probléma analogonja.

A dimenzióelméletnek pl. sokat vizsgált kérdése, hogy MENGER (0. 6) szorzattételében mely esetekben érvényes a pontos egyenlőség? PONTRJAGIN mutatta meg először [50]-ben, hogy ez még tetszőleges kompaktumra sem igaz; HUREWICZ azonban bebizonyította [30]-ban, hogy egy n-dimenziós ($n=0, 1, 2, \ldots$) kompaktum és egy 1-dimenziós szeparábilis metrikus tér szorzata pontosan $(n+1)$-dimenziós[31]. (Azóta több más, ilyen jellegű tétel is ismeretessé vált; l. pl. [2] 60).

[30] Ezt csupán érdekessége miatt említjük meg. Új eredményt nem nyernénk ezen az úton, mert MENGER már idézett [71] dolgozatában bebizonyította axiómarendszerének függetlenségét.

[31] Annak, hogy (0. 6)-ban egyáltalán előfordulhat egyenlőtlenség is, szép példáját szolgáltatja a *Hilbert*-tér azon R^ω altere, amely az összes racionális elemekből (vagyis amelyeknek minden koordinátája racionális) áll. Ui. ERDŐS PÁL bebizonyította [65] dolgozatában, hogy ind $R^\omega = 1$; mivel pedig $R^\omega = R^\omega \times R^\omega$, nyilvánvalóan

$$\mathrm{ind}\,(R^\omega \times R^\omega) < \mathrm{ind}\, R^\omega + \mathrm{ind}\, R^\omega.$$

Vizsgálni kellene mármost az analóg kérdést az ID (2. 6), (a) szorzattételére vonatkozóan is:

(18. 29) Probléma. *A tereknek mely $\mathfrak{X}$ osztályaira és mely $\mathfrak{a}(\mathfrak{X})$ számosságokra igaz, hogy*

$$\mathrm{Dim}\,(\times\{X_\alpha:\ \alpha\in A\}) = \sum\{\mathrm{Dim}\,X_\alpha:\ \alpha\in A\}$$

$$(X_\alpha\in\mathfrak{X}, \alpha\in A, \bar{\bar{A}} \leqq \mathfrak{a}(\mathfrak{X}))\,?$$

Természetesen fontos volna példákat és ellenpéldákat gyűjteni.

Speciálisabb szorzat-kérdés a következő:

(18. 30) Probléma. *Mi egy „kocka" ID-ja? Pontosabban: megállapítandó*

$$\mathrm{Dim}\,[0, 1]^A \qquad (\bar{\bar{A}} > \aleph_0).$$

Erről — a (2. 6), (a) tétel révén, és mivel $\mathrm{Dim}\,[0, 1] = 1$ — annyit tudunk, hogy bármely nem-üres A halmazra

$$\mathrm{Dim}\,[0, 1]^A \leqq \bar{\bar{A}}.$$

A kérdés valóban csak az $\bar{\bar{A}} > \aleph_0$ esetben nyitott, hiszen

$$\mathrm{Dim}\,[0, 1]^A = \bar{\bar{A}} \qquad (\bar{\bar{A}} \leqq \aleph_0),$$

ui. ez lényegében nem más, mint az (5. 1) tétel (ha $\bar{\bar{A}} < \aleph_0$), ill. az (5. 2) tétel (ha $\bar{\bar{A}} = \aleph_0$).

A (18. 30) probléma — egyszerű megfogalmazása ellenére — talán nagyon mélynek fog bizonyulni. Ha pl. igaz volna, hogy minden nem-üres A halmazra (vagy legalább minden olyan nem-üres A-ra, amelynek számossága nem nagyobb egy bizonyos $\mathfrak{a}_0 \geqq \aleph_1$ kardinális számnál) $\mathrm{Dim}\,[0, 1]^A = \bar{\bar{A}}$, akkor ez — figyelembe véve az ID monotonitását — Brouwer és Lebesgue nagy fontosságú (0. 10) invariancia-tételének egy ($\mathfrak{a}_0$-tól függően esetleg messzemenő) általánosítását szolgáltatná.

7. IránYterek izomorfizmusai. Speciális iránYterek

A VT és az iránytér fogalmának rokonságát egy új oldalról is megvilágítandó, vezessük be a következő fogalmat:

(18. 31) Definíció. Legyenek $(X_1, \mathfrak{R}_1)$ és $(X_2, \mathfrak{R}_2)$ irányterek. X_1 és X_2 minden olyan egy-egyértelmű leképezését egymásra, amelynél $\mathfrak{R}_1$ és $\mathfrak{R}_2$ egymásba megy át (vagyis amely a két IS-nak, ezen belül a megfelelő irányoknak, s ezen belül a féltereknek egy-egyértelmű megfeleltetését indukálja), a két iránytér egy *izomorfizmusának*, ilyen leképezése esetén pedig a két irányteret *izomorfnak* nevezzük.

Egy L_1 és egy L_2 VT minden algebrai izomorfizmusa egyben az $(L_1, \mathfrak{R}^{(a)}(L_1))$, $(L_2, \mathfrak{R}^{(a)}(L_2))$ iránytereknek is izomorfizmusa.

Legyen B egy L VT valamely algebrai bázisa, és minden $b\in B$-re $R_b = R$ a valós számtest — mint VT — egy példánya. Ekkor L algebrailag izomorf az

$$R^B = \Pi\{R_b:\ b\in B\}$$

(lineáris) szorzattér azon lineáris alterével, amely a legfeljebb véges sok nem-zérus koordinátával bíró pontokból áll.

Ezzel analóg módon mármost tetszőleges $(X, \mathfrak{R})$ iránytérből képezhetünk egy $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{R}})$ irányteret, ahol

$$\tilde{X} = \prod\{\mathcal{R} : \mathcal{R} \in \mathfrak{R}\},$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{G}_{(G,F)}(\mathcal{R}) &= \{\tilde{x} \in \tilde{X} : \tilde{x}(\mathcal{R})\} \prec (G, F)\} \\ \tilde{F}_{(G,F)}(\mathcal{R}) &= \{\tilde{x} \in \tilde{X} : \tilde{x}(\mathcal{R}) \preceq (G, F)\} \end{aligned}\right. \quad ((G, F) \in \mathcal{R}, \mathcal{R} \in \mathfrak{R})$$

$\tilde{x}(\mathcal{R})$ az $\tilde{x}$ komplexus $\mathcal{R}$-koordinátája), és

$$\tilde{\mathcal{R}} = \left\{\left(\tilde{G}_{(G,F)}(\mathcal{R}), \tilde{F}_{(G,F)}(\mathcal{R})\right) : \ (G, F) \in \mathcal{R}\right\} \qquad (\mathcal{R} \in \mathfrak{R}),$$

$$\tilde{\mathfrak{R}} = \{\tilde{\mathcal{R}} : \ \mathcal{R} \in \mathfrak{R}\}.$$

(Az $\tilde{\mathcal{R}}$-ok rendes irány volta és $\tilde{\mathfrak{R}}$ szeparálási tulajdonsága szinte triviális, tehát $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{R}})$ valóban IT.)

Jelöljük most Y-nal $\tilde{X}$ azon elemeinek halmazát, amelyek nem-üres (4. 1. 1) típusú metszetet szolgáltatnak; ekkor az az f: $X \to \tilde{X}$ leképezés, amelyre

$$f(x)(\mathcal{R}) = (G_x(\mathcal{R}), \ F_x(\mathcal{R})) \qquad (x \in X, \ \mathcal{R} \in \mathfrak{R})$$

az $(X, \mathfrak{R})$, $(Y, \tilde{\mathfrak{R}} | Y)$ iránytereknek egy izomorfizmusát indukálja.

(18.31.a) Iránytérek speciális osztályait definiálhatjuk a következő típusú korlátozásokkal: csak olyan $(X, \mathfrak{R})$-eket engedünk meg, amelyeknél pl.

(a) az $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ irányok (halmazrendezési értelemben) páronként hasonlóak;

(b) az $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ irányoknak lineáris rendezettségükön kívül még valamilyen algebrai struktúrájuk is van, pl. (esetleg egymással izomorf) algebrai testek;

(c) X-nek, mint $\tilde{X}$ részhalmazának, valamilyen speciális tulajdonsága van; pl. az imént leírt f leképezésnél minden egyes $x \in X$-re

$$f(x)(\mathcal{R}) = f(x_0)(\mathcal{R}) \qquad (\mathcal{R} \in \mathfrak{R}, \ \textit{legfeljebb véges sok kivétellel}),$$

ahol x_0 az X tér egy kitüntetett eleme; vagy pl. $f[X]$ (azaz Y) vetülete minden $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$-re az egész $\mathcal{R}$ (ami egyértelmű a

$$\mathcal{G}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{R}) = \{\emptyset, X\} \qquad (\mathcal{R} \in \mathfrak{R})$$

követelménnyel, vagyis azzal, hogy $(X, \mathfrak{R})$-ben ne legyenek „üres síkok"); stb.

Minden ilyen megszorítás a VT fogalmához viszi közelebb az IT fogalmát. Ezen az úton haladva „szembetalálkozhatnánk" azzal az újabban jelentkező, ellenkező irányú törekvéssel, amely pl. V. KLEE [35] cikkében jelentkezik: a szerző a (valós) VT-ek elméletének több — éppen a konvexitással kapcsolatos és a KREIN—MILMAN-tétel gondolatkörébe tartozó — tételét olyan lineáris terekre viszi át, amelyeknek skalárteste — akárcsak a (valós!) VT-eké — rendezett algebrai test, de nem okvetlenül teljes.

8. Az euklidészi terek iránydimenziója

Az előzőekben több olyan kérdést vetettünk fel, amelynek az a közös tendenciája, hogy az ID elméletét összekapcsoljuk vagy legalább közelebb vigyük a „szokásos" dimenzióelmélethez. A most megfogalmazandó kérdésnek éppen ellenkező a tendenciája:

(18. 32) Probléma. *Be lehet-e bizonyítani a*

(18. 32. 1) $$\operatorname{Dim} E_n = n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

tételt (vagyis, ami ezzel lényegében ekvivalens, a

(18. 32. 2) $$\operatorname{Dim} E_n \geqq n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

egyenlőtlenséget, hiszen az ellenkező irányú egyenlőtlenség — vö. (3. 1. 3)*-mal — triviálisan igaz) úgy, hogy ne használjuk ki a klasszikus dimenzióelméletnek olyan mély eredményeit, mint az*

(18. 32. 3) $$\operatorname{ind} E_n = n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

tétel (amelyben — vö. pl. [31] 25 *és* 41 *— szintén csupán az*

(18. 32. 4) $$\operatorname{ind} E_n \geqq n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

egyenlőtlenség bizonyítása igen nehéz) vagy mint pl. Brouwer *és* Lebesgue (0. 10) *invariancia tétele?*

Arról van tehát szó, hogy érdekes lenne a (18. 32. 2) tételt — ellentétben annak (5. 1)-beli és (10. 7)-beli bizonyításával — „az ID elméleten belül" bebizonyítani. A triviális $n = 1$ eseten kívül eddig csak az $n = 2$ esetre találtunk ilyen bizonyítást (3. 5), 1°-ben, csupán a „tisztán iránydimenziós" (3. 4) tételre támaszkodva.

Szűkítsük le a problémát egyelőre E_3-ra, vagyis keressük annak iránydimenziós bizonyítását, hogy

(18. 32. 5) $$\operatorname{Dim} E_3 \geqq 3.$$

Talán érdemes megpróbálni a következő bizonyítás-vázlat megvalósítását:

Tény, hogy ha $\mathscr{R}$ egy X tér valamely iránya és $S \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$, ahol

$$S = F \setminus G, \quad (G, F) \in \mathscr{R}, \quad G \neq \emptyset, \quad F \neq X,$$

akkor az X tér zárt S részhalmaza „*szeparálja*" X-et, amin itt azt értjük, hogy X előállítható S-nek és két nem-üres nyílt halmaznak páronként diszjunkt egyesítéseként (egyébként $S = \emptyset$ is lehet).[32] Ekkor az X tér

$$X \setminus S$$

altere nyilvánvalóan nem összefüggő.

Tegyük fel mármost (18. 32. 5)-tel ellentétben, hogy

(18. 32. 6) $$\operatorname{Dim} E_3 < 3.$$

[32] Általában a „szeparálás"-nak egy ennél általánosabb fogalmát használják (sőt a dimenzióelméletnek szinte „mindennapos" eszköze, vö. pl. [31] 14), amire azonban itt nincs szükségünk.

Legyen ekkor $\mathfrak{R}$ egy rendes minimális IS-ja E_3-nak (itt tehát kihasználjuk E_3 rendes voltát), szóval

$$\overline{\overline{\mathfrak{R}}} \leqq 2.$$

Legyen továbbá

$$\mathscr{R} \in \mathfrak{R}, \quad S \in \mathscr{S}(\mathscr{R}),$$

mégpedig úgy, hogy S a fenti értelemben szeparálja E_3-mat. (Ilyen S biztosan létezik (bármelyik $\mathscr{R}$ elemét választanánk is $\mathfrak{R}$-nek), hiszen ha ezzel ellentétben $\mathscr{R}$ minden egyes (G, F) elemére fennállna a

$$G = \emptyset, \quad F = X$$

relációknak legalább egyike, akkor — $\mathscr{R}$ rendes irány és E_3 összefüggő lévén — csak

$$\mathscr{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, X), (X, X)\}$$

lehetne; ez viszont az IS definíciója értelmében „fölösleges" irány, más szóval

$$\mathfrak{R} \setminus \{\mathscr{R}\}$$

is IS-ja lenne E_3-nak, holott feltételeztük, hogy $\mathfrak{R}$ E_3-nak *minimális* IS-ja.) Ekkor tehát az

$$E_3 \setminus S$$

altér nem összefüggő, továbbá (az $\overline{\overline{\mathfrak{R}}} = 1$ esetben (2. 5), (a) szerint, az $\overline{\overline{\mathfrak{R}}} = 2$ esetben pedig (4. 3) alapján) biztosan

(18. 32. 7) $$\mathrm{Dim}\ S = 1.$$

Ha pedig biztosak lehetnénk abban, hogy S úgy választható meg, hogy az eddigi feltételek mellett még a (3. 4) tétel feltételeinek is eleget tegyen, akkor az ilyen S-re (3. 4) alapján

(18. 32. 8) $$\mathrm{Dim}\ S \geqq 2$$

következnék, ellentétben (18. 32. 7)-tel és tehát (18. 32. 6)-tal is; ezzel tehát elérnénk a célt, ti. (18. 32. 5) bebizonyítását.

Ami pedig a (3. 4) tétel feltételeit illeti: az, hogy $\overline{\overline{S}} \geqq 3$ (nyilvánvaló, hogy az E_3 teret egyetlen legfeljebb 3 elemű részhalmaza sem szeparálhatja), és az, hogy S T_0-tér legyen, automatikusan teljesül; ahelyett pedig, hogy bármely $x \in S$ pontra $S \setminus \{x\}$ összefüggő legyen, elég azt megkívánni, hogy S-nek legyen egy ilyen tulajdonságú S^* *altere*, amelyre szintén $\overline{\overline{S^*}} \geqq 3$ (és amely persze automatikusan T_0-tér is), hiszen ekkor

$$\mathrm{Dim}\ S^* \geqq 2,$$

amiből (1. 5), (a) szerint következik (18. 32. 8).

Mindezt egybevetve látható, hogy az E_3-ra leszűkített (18. 32) probléma visszavezethető a következő kérdésre:

(18. 33) Probléma. *Igaz-e, hogy bármely, az E_3 teret szeparáló zárt H altérnek (vagy ezek közül legalább minden olyannak, amelyre* $\mathrm{Dim}\ H = 1$*) van olyan H^**

altere, amelyre $\overline{\overline{H^*}} \geqq 3$, *és amely olyan tulajdonságú, hogy bármely* $x \in H^*$ *pontra a* $H^* \setminus \{x\}$ *altér összefüggő?*[33]

Ha ez nem igaz, vagy nem sikerül bebizonyítani, akkor megelégedhetünk e probléma következő szerényebb változatának esetleges pozitív megoldásával is:

(18. 34) Probléma. *Van-e az* E_3 *térnek olyan minimális* $\mathfrak{R}$ IS-*ja* (*$\mathfrak{R}$ rendességét nem kell megkövetelni!*) *és olyan* $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ *irány, hogy valamely S* $\mathscr{R}$*-síknak legyen olyan* S^* *altere, amelyre* $\overline{\overline{S^*}} \geqq 3$ *és amelynek bármely* $x \in S^*$ *pontjára az* $S^* \setminus \{x\}$ *altér összefüggő?*

Ha végül valóban sikerülne (18. 32. 5)-öt ilyen módon bebizonyítani, akkor természetesen a következő feladat ez:

(18. 35) Probléma. *Tételezzük fel, hogy a* (18. 32) *problémának* $n=3$*-ra konkretizált változatát sikerült a vázolt módon megoldani. Lehet-e ekkor a követett módszert (természetesen valamilyen indukciós eljárással) az általános* (18. 32) *probléma megoldására átvinni?*

Könnyű belátni, hogy e problémát akkor tudjuk megoldani, ha sikeresen megbirkózunk a következő két problémával:

(18. 36) Probléma. *Milyen követelményeket lehetne egy X térre, annak egy* $\mathfrak{R}$ *minimális* IS-*jára, ill. egy* X^* *alterére kiróni, amelyek biztosítanák, hogy az* X^* *altér* $\mathfrak{R}|X^*$ IS-*ja minimális* IS-*ja legyen* X^**-nak?*

Ezt a kérdést már a (18. 24) problémával kapcsolatban is felvetettük.

(18. 37) Probléma. *Hogyan lehetne a* (3. 4) *tételt „magasabb* ID-*kra" általánosítani?*

Olyanféle tételekre gondolunk, amelyek — durván kifejezve — azt biztosítanák, hogy amennyiben egy elég sok pontot tartalmazó (és esetleg még más követelményeknek is eleget tevő) X tér olyan tulajdonságú, hogy bármely, eléggé nagy ID-jú X^* alterének komplementer altere összefüggő, akkor $\operatorname{Dim} X > \operatorname{Dim} X^*$.[34]

Végül megemlítjük, hogy (18. 32. 1) *lényegében* ekvivalens a mély (0. 10) tétellel, s ez karakterizálja az egész problémakör súlyosságát.

[33] BOGNÁR MÁTYÁS megjegyezte, hogy e probléma megfogalmazását — legalábbis akkor, ha a $\operatorname{Dim} H=1$ korlátozást elhagyjuk — nyilvánvalóan nem szabad azzal szigorítanunk, hogy elhagyjuk a H halmazok *altereire* vonatkozó részt, vagyis mindenképpen *maguktól a H-któl* kívánjuk meg a szóban forgó tulajdonságokat.

Valóban: legyen pl. A egy gömbfelület az E_3 térben, legyen

$$x, y \in E_3 \setminus A, \quad x \neq y$$

és végül

$$H = A \cup \{x, y\}.$$

Ekkor H nyilvánvalóan olyan zárt részhalmaza E_3-nak, amely az utóbbit szeparálja, és amelynek van olyan pontja (ti. akár x akár y), amelyet H-ból elvéve a keletkező altér nem összefüggő. (Igen könnyű ezt az ellenpéldát úgy módosítani, hogy H maga összefüggő legyen.)

Ha azonban (18. 33) megfogalmazásának akár a H ID-jára, akár az altereire vonatkozó részét megtartjuk, akkor már nem látszik ennyire könnyűnek ellenpéldát találni, ha esetleg a kérdésre a válasz negatív; hiszen a pozitív válasz — legalábbis az egyszerű szemlélet alapján — eléggé természetesnek tűnik.

[34] A (3. 4) tételnek egyébként jó néhány más típusú (de természetesnek látszó) változata és általánosítása is megfogalmazható sejtések formájában, amelyek bizonyára a (18. 32) problémától teljesen függetlenül, önmagukban is érdekesek, és igazolásuk esetén hasznos alkalmazásokkal kecsegtetnek; ezekre azonban itt nem térünk ki.

9. MINIMÁLIS IRÁNYSTRUKTÚRÁKBAN SZEREPLŐ FÉLTEREK

Az (1. 12) észrevétel, a (18. 34) probléma, továbbá a (18. 23) probléma és az utóbbihoz fűzött 24. lábjegyzet egyaránt rávezet a következő két kérdésre:

(18. 38) Probléma. *Hogyan karakterizálhatók egy (esetleg valamilyen alkalmas vagy szükséges megszorításnak alávetett) X tér azon nyílt, ill. zárt halmazai, amelyek X egyetlen minimális (rendes X térnél esetleg rendes minimális)* $\mathfrak{R}$ IS-*jára vonatkozóan sem lehetnek* $\mathfrak{R}$-*félterei X-nek?*

A kérdés illusztrálására megjegyezzük, hogy pl. az E_2 euklidészi sík egy (akár nyílt, akár zárt) körlapja biztosan nem lehet $\mathfrak{R}$-féltér E_2 egyetlen minimális $\mathfrak{R}$ IS-jára nézve sem, hiszen különben a körlap határának, vagyis egy K körvonalnak — (4. 4) és (3. 5), 1° alapján — 1 volna az ID-ja, holott (3. 5), 2° szerint Dim K = 2.

(18. 39) Probléma. *Hogyan karakterizálhatók egy (esetleg valamilyen alkalmas vagy szükséges megszorításnak alávetett) X tér azon nyílt ill. zárt halmazai (ill. vannak-e egyáltalán ilyenek), amelyek X bármely, ill. valamely (rendes X térnél esetleg rendes)* $\mathfrak{R}$ IS-*jára nézve szükségképpen* $\mathfrak{R}$-*félterek?*

Euklidészi terekre szorítkozva pl. a következőképpen konkretizálhatók ezek a kérdések:

(18. 40) Probléma. *Van-e valamilyen — topológiailag egyszerűen jellemezhető — kapcsolat (pl. akár homeomorfizmus) egy E_n tér bármely (esetleg rendes) minimális* $\mathfrak{R}$ IS-*jában szereplő minden nem-triviális* $\mathfrak{R}$-*nyílt, ill.* $\mathfrak{R}$-*zárt féltér és E_n bármely nyílt, ill. zárt (közönséges értelemben vett) féltere között?*

(18. 41) Probléma. *Amennyiben az előző kérdésre igenlő a válasz, sőt a lehető legerősebb kapcsolat, vagyis homeomorfizmus áll fenn az E_n ott említett alterei között, igaz-e még az is, hogy egy (E_n,* $\mathfrak{R}$) TIT, *ahol* $\mathfrak{R}$ *egy rendes minimális* IS-*ja E_n-nek, minden egyes n természetes számra a* (18. 31)-*ben definiált értelemben izomorf a megfelelő* (E_n, $\mathfrak{R}^{(a)}(E_n)$) TIT-*rel?*[35]

(Megjegyezzük, hogy TIT-ek minden (18. 31) szerinti izomorfizmusa egyben homeomorfizmus, tehát „topologikus izomorfizmus".)

10. BIRKHOFF 111. PROBLÉMÁJA

Legyen M_n, ill. M_∞ az $n\times n$-es, ill. végtelen mátrixok lineáris tere;
D_n, ill. D_∞ az $n\times n$-es, ill. végtelen duplán sztochasztikus mátrixok halmaza;
P_n, ill. P_∞ az $n\times n$-es, ill. végtelen permutációmátrixok halmaza.
G. BIRKHOFF [6]-ban bebizonyította, hogy
(18. 9. 1) *az M_n térben $D_n = [P_n]$.*
BIRKHOFF [7] könyvének nevezetes 111. problémája mármost az a kérdés, hogy:

(18. 42) Probléma. *Miképpen vihető át a* (18. 9. 1) *tétel a végtelen esetre?*

[35] Mint ismeretes, $\mathfrak{R}^{(a)}(E_n) = \mathfrak{R}^{(t)}(E_n)$ ($n = 1, 2, \ldots$), tehát semmi jelentősége nincs annak, hogy a probléma megfogalmazásában E_n algebrai vagy topológiai IS-ját szerepeltetjük-e.

Mivel M_∞-ben $D_\infty \supset [P_\infty]$, kézenfekvő M_∞-nek olyan megengedett topológiáit keresni, amelyekben D_∞ P_∞-nek *zárt* konvex burka, s ilyen természetű eredmények valóban születtek. (A kérdéskör ismertetése és irodalmának áttekintése megtalálható pl. RÉVÉSZ PÁL [52] összefoglaló cikkében.)

Nyilvánvaló a probléma kapcsolata a KREIN—MILMAN-tétellel, hiszen a P_n, ill. a P_∞ halmaz elemei éppen a D_n, ill. D_∞ halmaz extremális pontjai az M_n, ill. M_∞ térben. Az irányterek elméletét tehát a következő két módon lehet talán e problémakörben felhasználni:

(18. 43) Probléma. *Az M_∞ halmazra (esetleg $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$ felhasználásával) olyan $(M_\infty, \mathfrak{R})$ IT-eket építeni, amelyekben* $D_\infty = \mathrm{k}(\mathfrak{R}; P_\infty)$ *vagy* $D_\infty = \mathrm{ek}(\mathfrak{R}; P_\infty)$.

(18. 44) Probléma. *Az előző kérdést „topologizálva": az M_∞ halmazra olyan $(M_\infty, \mathfrak{R})$ TIT-eket építeni, amelyekre nézve* $D_\infty = \mathrm{\underset{.}{z}k}(\mathfrak{R}; P_\infty)$, *vagy* — (17. 1), (a)-*t alkalmazva* — $D_\infty = \mathrm{ek}(\mathfrak{R}, P_\infty)$.

11. AZ $\mathfrak{R}$-EXTREMÁLIS PONT DEFINÍCIÓJA

A kvázi-belsőrész fogalmának használata nehézkessé teszi az $\mathfrak{R}$-extremális pont fogalmának kezelését. VT-ekben az extremális pont fogalmának ekvivalens definíciója (konvex halmazokra szorítva): x akkor és csak akkor extremális pontja egy E konvex halmaznak, ha $E \setminus \{x\}$ is konvex.

(18. 45) Probléma. *Vajon irányterekben is ekvivalens-e ezen definíció megfelelője az $\mathfrak{R}$-extremális pont, ill. gyenge $\mathfrak{R}$-extremális pont* (16. 1) *definíciójával*?

(18. 46) Probléma. *Az előbbi kérdés eldöntésétől függetlenül kérdezhetjük, vajon bizonyítható-e az $\mathfrak{R}$-extremális pont „*b $(\mathfrak{R}; E)$*-mentes" fogalmából kiindulva is a* (17. 2) *tétel*?

12. A (17.1),(a) TÉTEL KAPCSOLATA KY FAN TÉTELÉVEL

A KREIN—MILMAN-tétel sokféle általánosításai közül magasfokú általánosságával tűnik ki

(18. 47) KY FAN TÉTELE. *Legyen S egy nem-üres halmaz; $\mathcal{F}$ S részhalmazainak olyan — S-et is tartalmazó — családja, amelyből a tetszőleges metszés nem vezet ki; $\mathcal{G}$ S nem-üres részhalmazainak olyan családja, amely bármely inklúzióláncának egyesítését is tartalmazza. Tegyük fel továbbá, hogy*

(a) *ha $A \in \mathcal{G}$, $X \in \mathcal{F}$ és $A \nsubseteq X$, akkor van olyan $B \in \mathcal{G}$, amelyre $B \subseteq A$ és $B \cap X = \emptyset$;*

(b) *ha $A \in \mathcal{G}$ és $\bar{\bar{A}} > 1$, akkor van olyan $X \in \mathcal{F}$, amelyre $A \cap X \neq \emptyset$ és $A \nsubseteq X$.*

Ekkor minden $A \in \mathcal{G}$ halmazra az $\{x\colon x \in A,\ \{x\} \in \mathcal{G}\}$ halmaz nem üres, és $\mathcal{F}$-burka egybeesik az A halmaz $\mathcal{F}$-burkával ([44] 212).

(18. 48) Probléma. *Levezethető-e mármost a* (17. 1), (a) *tétel is* KY FAN *tételéből*? (Annak bizonyítása, hogy a KREIN—MILMAN-tétel KY FAN tételének speciális esete, nem ültethető át automatikusan a (17. 1), (a) tételre, lényegében az „extremális részhalmaz" fogalmának használata miatt; l. az idézett helyet.) Ha igen, akkor a TIT fogalma a KY FAN-tételnek egy a lokálisan konvex térnél általánosabb modellje.

13. A Krein—Milman-tétel átültetése TIT-ekre

(18. 49) A (17. 1), (a) tétel szerint egy $(X, \mathfrak{R})$ TIT bármely kompakt, erősen $\mathfrak{R}$-konvex E halmazára

(18. 49. 1) $$E = \text{ek}\,(\mathfrak{R}; \varepsilon(\mathfrak{R}; E)).$$

Ez nem marad igaz, ha (18. 49. 1)-ben ek-t zgk-val pótoljuk:

$$\text{zgk}\,(\mathfrak{R}; \varepsilon(\mathfrak{R}; E)) \subset E$$

is előfordul.

Legyen pl.

$$X = \{0, 1, 2, 3\}, \quad \mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3\},$$

ahol

$$\mathfrak{R}_i = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{i\}), (\{i\}, \{0, i\}), (\{0, i\}, X), (X, X)\} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ekkor $(X, \mathfrak{R})$ nyilvánvalóan IT, amelyben X maga nyilván erősen $\mathfrak{R}$-konvex halmaz és

$$\varepsilon(\mathfrak{R}; X) = \{1, 2, 3\}.$$

Tekintsük most $(X, \mathfrak{R})$-t TIT-ként. Ekkor X kompakt halmaz és valóban

$$\text{zgk}\,(\mathfrak{R}; \varepsilon(\mathfrak{R}; X)) = \text{gk}\,(\mathfrak{R}; \varepsilon(\mathfrak{R}; X)) = \varepsilon(\mathfrak{R}; X) \subset X,$$

hiszen ebben a (diszkrét!) térben minden halmaz zárt, és az $\varepsilon(\mathfrak{R}; X)$ halmaz *gyengén* $\mathfrak{R}$-konvex.

Másrészt azonban

$$\text{zk}\,(\mathfrak{R}; \varepsilon(\mathfrak{R}; X)) = \text{k}\,(\mathfrak{R}; \varepsilon(\mathfrak{R}; X)) = X;$$

nyitott tehát a kérdés:

(18. 50) Probléma. *Lehet-e* (17. 1), (a)*-ban az erősen $\mathfrak{R}$-konvex burkot a zárt $\mathfrak{R}$-konvex burokkal pótolni?*

Ha igen, akkor ezzel formailag közelebb jutunk a Krein—Milman-tétel (0. 12) fogalmazásához.

Ha nem, akkor még mindig kínálkozik egy esetleges „kiút":

(18. 50. a) Probléma. *Lehet-e* (18. 50)*-et azáltal megoldani, hogy* $\varepsilon(\mathfrak{R}; E)$*-et az eredeti —* (17. 1)*-beli — definíciója helyett E gyenge $\mathfrak{R}$-extremális pontjainak halmazaként definiáljuk?*

(Az itt közölt példát ez a változtatás nem érintené.)

14. A kvázi-belsőrész fogalmának kapcsolata az intern pont fogalmával

A 15. §-ban lényegében a következő két kérdést vizsgáltuk:

(18. 51) Probléma. *Igaz-e, hogy egy L* VT *bármely konvex E halmazára* $\text{b}^{(a)}E \subseteq E$?

(18. 52) Probléma. *Igaz-e, hogy egy L* VT *bármely konvex E halmazára* $\text{b}^{(a)}E$ *egybeesik E intern pontjainak halmazával?*

A két kérdés összefügg: ha (18. 52)-re igenlő a válasz, akkor (18. 51)-re is az; ha pedig (18. 51)-re tagadó, (18. 52)-re is az.

Nem-konvex halmazokra felesleges e kérdéseket vonatkoztatni, hiszen a legtöbb nem-konvex E halmazra $\mathrm{b}^{(a)}E \not\subseteq E$ (vö. (15. 8)), bár vannak speciális — ti. „kevéssé nem-konvex" — E halmazok, amelyekre $\mathrm{b}^{(a)}E \subseteq E$; ilyen pl. egy nyílt téglalap egyesítése csúcspontjainak halmazával. Egyes szerzők egyébként — talán BOURBAKI nyomán („point interne", [9] 66) — az intern pont és az algebrai belső pont fogalmát is eleve konvex halmazokra szorítva definiálják.

A (15. 6) tétel mármost csak részleges igenlő választ ad e kérdésekre. A probléma teljes megoldásához még eldöntendő:

(18. 53) Probléma. *Létezik-e olyan intern pont nélküli konvex — tehát szükségképpen végtelen algebrai dimenziójú — E halmaz, amelyre* $\mathrm{b}^{(a)}E \neq \emptyset$?

Igenlő válasz esetén újabb két kérdés adódik:

(18. 54) Probléma. *Létezik-e olyan* — (14. 2), 3° *szerint szükségképpen nem erősen* $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$*-konvex — konvex E halmaz, amelyre* $\mathrm{b}^{(a)}E \setminus E \neq \emptyset$?

(18. 55) Probléma. *Létezik-e olyan, intern pont nélküli erősen* $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$*-konvex E halmaz is, amelyre* $\mathrm{b}^{(a)}E \neq \emptyset$?

Az algebrai belső pont nélküli konvex halmaz ismert példái (pl. [38] 180) nem döntik el (negatív értelemben) e kérdéseket, ui. kimutatható, hogy e halmazoknak a kvázi-$\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-belseje is üres.

15. A HAHN—BANACH-TÉTEL IRÁNYTEREKRE VONATKOZTATOTT PROBLÉMAKÖRE

A kvázi-belsőrész fogalmával a (18. 52) kérdés eldöntésétől függetlenül is ki lehet fejezni az intern pont (15. 1) definícióját (11. 17. 4) és (14. 8) segítségével. Ezt az „iránystruktúrás" definíciót azután átvihetjük általános irányterekre, azonban az intern pontokkal, ill. algebrai belső pontokkal kapcsolatos legfontosabb tételek (pl. MAZUR tétele, [38] 191, BOURBAKInál „a HAHN—BANACH-tétel geometriai alakja" néven, [9] 69) nem maradnak érvényben. Példaképpen olyan egyszerű irányteret mutatunk be, amelyre nem vihető át a HAHN—BANACH-tétel gondolatkörében alapvetően fontos (és az algebrai belső pont fogalmát nem is tartalmazó)

(18. 56) KAKUTANI-FÉLE SZÉTVÁLASZTÁSI TÉTEL. *Egy* VT *két diszjunkt, nemüres konvex részhalmaza mindig kibővíthető komplementer konvex halmazokká* (pl. [38] 184).

Legyen
$$X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \quad \mathfrak{R} = \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4\},$$

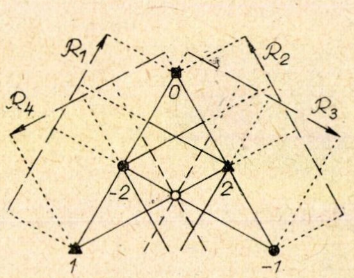
ahol az egyes irányok nem-triviális (egyszerre nyílt és zárt) $\mathfrak{R}$-alsó félterei:

$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_2$	$\mathcal{R}_3$	$\mathcal{R}_4$
$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{-2, 0, 1\}$	$\{-1, 0, 2\}$
$\{-2, -1, 1\}$	$\{-1, 1, 2\}$	$\{-2, 0, 1, 2\}$	$\{-2, -1, 0, 2\}$
$\{-2, -1, 1, 2\}$	$\{-2, -1, 1, 2\}$		

(az $(X, \mathfrak{R})$ irányteret az ábra szemlélteti). Mármost az $\{1, 2\}$, $\{-1, -2\}$ halmazok $(X, \mathfrak{R})$-nek diszjunkt, $\mathfrak{R}$-konvex részhalmazai (sőt erősen $\mathfrak{R}$-konvexek, hiszen mindkettő $\mathfrak{R}$-sík); a 0 pontot azonban egyikhez sem lehet csatolni anélkül, hogy elvesztené $\mathfrak{R}$-konvexitását, sőt gyenge $\mathfrak{R}$-konvexitását is, ui.

$$\mathrm{gk}(\mathfrak{R}; \{1, 0\}) = \{1, -2, 0\},$$

$$\mathrm{gk}(\mathfrak{R}; \{-1, 0\}) = \{2, -1, 0\}.$$



1. ábra

16. Irányterek patologikus jelenségeinek megszüntetése

A 15.-beli és egyéb negatív eredmények a következő kérdésekre vezetnek:

(18. 57) Probléma. *Hogyan karakterizálható azon* $(X, \mathfrak{R})$ *iránytereknek* (*az* $(L, \mathfrak{R}^{(a)}(L))$ *vektor-irányteret persze tartalmazó) osztálya, amelyekben*

(a) *érvényes a* (18. 56) *tétel analogonja,*

(b) *az* $\mathfrak{R}$*-konvexitás ekvivalens a gyenge* $\mathfrak{R}$*-konvexitással,*

(c) *az* $\mathfrak{R}$*-extremális pont fogalma ekvivalens a gyenge* $\mathfrak{R}$*-extremális pont fogalmával,*

(d) *a* (18. 50) *tétel „gyenge" változata is igaz, stb.?*

Valószínű, hogy a keresett karakterisztikum minden ilyen kérdésben valamilyen „sűrűségi", „teljességi" vagy „hézagtalansági" feltétel, hiszen (mint könnyen látható) összes ellenpéldáink ((a): (18. 56); (b): (12. 8); (c): (16. 2), 3°; (d): (18. 49)) „ártalmatlanná" tehetők azzal, hogy az irányteret néhány újabb ponttal, s ennek megfelelően az irányokat néhány újabb síkkal kiegészítjük. (Pl. (18. 56)-ban elegendő az üres kvázi-$\mathfrak{R}$-belsejű $\{1, 2\}$, $\{-1, -2\}$ $\mathfrak{R}$-síkokat az ábra $[1, 2]$, $[-1, -2]$ szakaszainak metszéspontjával „feltölteni", és az $\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$ irányokat a szaggatottan rajzolt „síkokkal" kiegészíteni.)

A legérdekesebb volna, ha ezeket a kényelmetlen jelenségeket az iránystruktúra definíciójának egy *közös* (esetleg (18. 31. a)-típusú) megszorításával lehetne kiküszöbölni.

17. Intern leképezések. A konjugált iránytér problémája

Foglalkozni kellene iránytereknek, ill. TIT-eknek olyan leképezéseivel egymásba, amelyekre nézve

(A) konvex halmaz képe konvex, ill.

(B) konvex halmaz inverz képe konvex,

(ahol „konvexitáson" az irányterekben definiált háromféle konvexitás valamelyikét vagy ilyenek kombinációit értjük).

Az (A) típusról csupán azt említjük meg, hogy egyváltozós valós függvényekre és a konvexitás közönséges fogalmára alkalmazva (A) a Darboux-tulajdonsággal ekvivalens. A (B) típussal kapcsolatban azonban részletesebben utalunk ennek rokonságára az intern függvény fogalmával, amely a monoton függvény fogalmának általánosítása.

(18. 58) DEFINÍCIÓ. Egy az E_n euklidészi tér valamely K konvex részhalmazán definiált $f(x)$ valós függvény

(a) *p-kvázikonvex*, ill. *kvázikonvex*, ha

$$f[px+(1-p)y] \leqq \max [f(x), f(y)] \qquad (x, y \in K)$$

valamely $0<p\leqq\frac{1}{2}$ súlyra, ill. minden ilyen súlyra;

(b) *p-kvázikonkáv*, ill. *kvázikonkáv*, ha

$$f[px+(1-p)y] \geqq \min [f(x), f(y)] \qquad (x, y \in K)$$

valamely $0<p\leqq\frac{1}{2}$ súlyra, ill. minden súlyra;

(c) *p-intern*, ill. *intern*, ha egyaránt p-kvázikonvex és p-kvázikonkáv, ill. kvázikonvex és kvázikonkáv.

A kvázikonvex, ill. kvázikonkáv függvényekkel több vonatkozásban foglalkoztak; a legutóbbi években pl. a nem-lineáris programozásban kaptak szerepet, többnyire a folytonosság feltételezése mellett (l. pl. [5], [36]).

A (18. 58)-beli „p-osztályokat" [14]-ben vezettük be, és vizsgáltuk folytonossági, mérhetőségi viszonyaikat, továbbá annak feltételeit, hogy egy „p-tulajdonságból" a megfelelő „minden p-re" tulajdonságra lehessen következtetni. E vizsgálatok az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

függvényegyenlőtlenséggel definiált JENSEN-konvex függvények kiterjedt elméletéhez kapcsolódtak (minden JENSEN-konvex függvény $\frac{1}{2}$-kvázikonvex), amelynek történeti gyökere az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

tulajdonsággal definiált JENSEN-lineáris függvények, ill. az ezekkel rokon — a CAUCHY-féle

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

függvényegyenletet kielégítő — additív függvények vizsgálta. Az utóbbiakról HAMEL mutatta ki nevezetes [27] dolgozatában, hogy nem szükségképpen folytonosak.

A p-kvázikonvex ([14]-ben „p-maximumlos") függvény fogalma egyben a p-intern függvény fogalmának is általánosítása, amelyet $p=\frac{1}{2}$-re és E_1-ben definiálva S. MARCUS vezetett be és vizsgált meg [41] (ill. még korábban $\leqq$ helyett $<$-bel definiálva CSÁSZÁR ÁKOS [12] dolgozatában). A terminológia egyébként nem egységes ebben a témakörben. (A problémakör történetét l. pl. [14]-ben; sok irodalmi adat található pl. [1]-ben.)

Mindezeket a vizsgálatokat ki kellene terjeszteni tetszőleges VT-ekben értelmezett valós függvényekre; e téren eddig nagyon kevés történt (l. pl. [42]). Kézenfekvő továbbá ezeket a definíciókat VT-eknek részben rendezett VT-ekbe való leképezéseire alkalmazni. Termékenyebbnek látszik azonban VT-ek részben-rendezéseinek arra a családjára támaszkodni, amelyet a természetes iránystruktúra irányai indukálnak (11. 8) és (11. 9) értelmében. Így pl. vizsgálni lehetne a következő definíciókkal megadott függvényosztályokat:

(18. 59) DEFINÍCIÓ. *Legyenek* L_1, L_2 VT-*ek*, $\mathfrak{R}^* \subseteq \mathfrak{R}^{(a)}(L_2)$ *és* $0<p\leqq \frac{1}{2}$. *Egy* $f: L_1 \to L_2$ *leképezés* $\mathfrak{R}^*$-*ra és* p-*re nézve*

(a) $(\mathfrak{R}^*, p)$-*kvázikonvex*, ha minden $\mathfrak{R}^*$-alsó féltér inverz képe p-*konvex halmaz*, vagyis

$$f[pf^{-1}(x)+(1-p)f^{-1}(y)]\in M \ (x, y\in M,\ M\in \mathscr{G}(\mathscr{R})\cup\mathscr{F}(\mathscr{R}),\ \mathscr{R}\in\mathfrak{R}^*);$$

(b) $(\mathfrak{R}^*, p)$-*kvázikonkáv*, ha minden $\mathfrak{R}^*$-felső féltér inverz képe p-konvex;

(c) $(\mathfrak{R}^*, p)$-*intern*, ha egyaránt $(\mathfrak{R}^*, p)$-kvázikonvex és $(\mathfrak{R}^*, p)$-kvázikonkáv.

Igen könnyű látni, hogy ezek a fogalmak a megfelelő (18. 58)-beliek általánosításai; pl. egy E_n-ben definiált f valós függvény akkor és csak akkor p-kvázikonvex valamely $0<p\leqq\frac{1}{2}$-re, ha minden

$$\{x: x\in E_n, f(x)\leqq c\} \qquad (-\infty<c<\infty)$$

nívóhalmaz p-konvex. (Itt $\mathfrak{R}^*$ a képtér — E_1 — teljes természetes IS-ja.)

A (18. 59) definíciókat mármost pl. a következőképpen vihetjük át tetszőleges irányterekre (ill. TIT-ekre):

(18. 60) DEFINÍCIÓ. Legyenek $(X_1, \mathfrak{R}_1)$, $(X_2, \mathfrak{R}_2)$ irányterek. Egy $f: X_1 \to X_2$ leképezés

(a) *kvázikonvex*, ill. *kvázikonkáv*, ha minden $\mathfrak{R}_2$-alsó, ill. $\mathfrak{R}_2$-felső féltér inverz képe gyengén $\mathfrak{R}_1$-konvex halmaz;

(b) *intern*, ha egyaránt kvázikonvex és kvázikonkáv.

Az ilyen típusú leképezésekre várható eredmények jellegét talán érzékelteti a következő

(18. 61) TÉTEL. *Legyen* f *egy* $(X_1, \mathfrak{R}_1)$ TIT *intern leképezése egy* $(X_2, \mathfrak{R}_2)$ TIT-*be. Ekkor létezik* X_1 *gyengén* $\mathfrak{R}_1$-*konvex részhalmazainak olyan* $\tau(X_2)$-*nél nem nagyobb számosságú családja, hogy* f *diszkontinuitási helyeinek* D *halmaza lefedhető ezek határainak egyesítésével.*

Bizonyítás. 1° Legyen $\mathscr{B}$ X_2-nek egy „$\mathfrak{R}_2$-nyílt intervallumokból" (vagyis $\mathfrak{R}_2$-nyílt félterek véges metszeteiből) álló, $\tau(X_2)$ számosságú bázisa. Ilyen biztosan létezik, hiszen egy Y tér minden bázisának — s így az X_2 térnek az összes $\mathfrak{R}_2$-nyílt intervallumokból álló bázisának is — van olyan $\tau(Y)$ számosságú része, amely szintén bázisa Y-nak.

2° Az f leképezés folytonossága valamely $x\in X_1$ pontban azt jelenti, hogy $f(x)$-nek minden X_2-beli környezetére $x\in(f^{-1}[U])^\circ$. Így tehát minden $x\in D$ ponthoz létezik $f(x)$-nek olyan $U_{f(x)}$ környezete, hogy

$$x\in \operatorname{Gr} f^{-1}[U_{f(x)}],$$

és ezért bármely $f(x)\in V\subseteq U_{f(x)}$ környezetre

$$x\in \operatorname{Gr} f^{-1}[V].$$

3° Legyen mármost

$$f(x)\in B_{f(x)}\subseteq U_{f(x)},\ B_{f(x)}\in\mathscr{B} \qquad (x\in D).$$

Ekkor

$$D\subseteq \bigcup\{\operatorname{Gr} f^{-1}[B_{f(x)}]: x\in D\},$$

és mivel minden $f^{-1}[B_{f(x)}]$ halmaz $\mathfrak{R}_2$-félterek metszetének inverz képeként gyengén $\mathfrak{R}_1$-konvex halmazok metszete, tehát gyengén $\mathfrak{R}_1$-konvex, ezzel előállítottuk D-nek legfeljebb $\tau(X_2)$ gyengén $\mathfrak{R}_1$-konvex halmaz határainak egyesítésével való lefedését.

Alkalmazzuk ezt a tételt az E_n-ben definiált valós függvényekre:

(18. 62) TÉTEL. *Egy E_n-ben definiált intern valós függvény diszkontinuitási helyeinek D halmaza lefedhető megszámlálható sok konvex halmaz határainak egyesítésével.*

Egy régebbi, kvázikonvex függvényekre vonatkozó eredményünk ([14] 120) intern függvényekre alkalmazva csak annyit mond, hogy D LEBESGUE-0-mértékű. Az utóbbinak bizonyításánál felhasználtuk azt az ismert tényt, hogy egy E_n minden konvex részhalmaza PEANO—JORDAN-mérhető, vagyis a határa LEBESGUE-0-mértékű (l. pl. [15]); azonban nem minden LEBESGUE-0-mértékű halmaz fedhető le megszámlálható sok konvex halmaz határainak egyesítésével. (Az utóbbi egyébként első kategóriájú halmaz.)

Ha a (18. 60), (b)-beli $(X_1, \mathfrak{R}_1)$ és $(X_2, \mathfrak{R}_2)$ TIT egyaránt E_1, akkor az intern leképezések éppen a monoton függvények; erre alkalmazva a (18. 62) tétel azt a közismert elemi tényt szolgáltatja, hogy monoton függvénynek legfeljebb megszámlálhatóan sok szakadási helye van.

(18. 63) Probléma. *A* (18. 62) *tétel arra ösztönöz, hogy kísérletet tegyünk egy* $(X, \mathfrak{R})$ TIT *különböző „fokozatú" konvex halmazainak ($\mathfrak{R}$-féltereknek, erősen $\mathfrak{R}$-konvex, $\mathfrak{R}$-konvex vagy gyengén $\mathfrak{R}$-konvex halmazoknak) határaira alapozott „kis halmaz"-fogalmak bevezetésére, amelyek bizonyos vizsgálatokban a* 0-*mértékű, ill. első kategóriájú halmazok szerepét vehetnék át.*[36]

Az intern leképezésekre vonatkozó több már elért eredményünk közül idézzük most [19]-ből a következőt:

(18. 64) TÉTEL. *Legyen X* TVT, *Y* LKT *és* $0<p<1$. *Egy az X valamely K konvex halmazán definiált $\varphi\colon K\to Y$ p-intern leképezés vagy K minden pontjában vagy K egyetlen pontjában sem lokálisan korlátos.*[37]

[36] Ilyen célra egyes esetekben egy $(X, \mathfrak{R})$ TIT bizonyos E halmazainak valószínűleg nemcsak a határa, hanem más „határjellegű" halmazok is alkalmasak. Ha pl. $\mathfrak{R}$ minimális IS-ja X-nek arra a topológiára nézve, amelyet maga $\mathfrak{R}$ indukál, továbbá $\mathrm{Dim}\, X<\aleph_0$ és E erősen $\mathfrak{R}$-konvex halmaz (amelyre tehát $\overline{\overline{\mathfrak{R}}}$ végessége és (14. 2. 1) továbbá (14. 2. 3) következtében $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E)$ biztosan nyílt halmaz és $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E)\subseteq E$, akkor a

$$\mathrm{Gr}^*(\mathfrak{R}; E)=\mathrm{zek}(\mathfrak{R}; E)\setminus \mathrm{b}(\mathfrak{R}; E)$$

halmaz — bár nemcsak okvetlenül tartalmazza E határát, hanem

$$\mathrm{Gr}^*(\mathfrak{R}; E)\supset \mathrm{Gr}\, E$$

is előfordulhat — szintén valamiféle, E határával bizonyos kapcsolatban levő „kis halmaz"-nak tekinthető, hiszen $\mathfrak{R}$-síkok részhalmazainak véges egyesítése, s ezek mindegyikének pl. az ID-ja (4. 3) alapján határozottan kisebb $\mathrm{Dim}\, X$-nél, hacsak $\mathrm{Dim}\, X\neq 1$. (Persze azért $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Gr}^*(\mathfrak{R}; E) = \mathrm{Dim}\, X$ is lehet!)

Látható tehát, hogy az IS fogalma többféle „kis halmaz"-fogalom bevezetésére is kézenfekvő lehetőségeket nyújt; ezek értékét persze csak a már sikerült alkalmazások alapján lehet majd megítélni.

[37] DEFINÍCIÓ. Egy X TVT valamely A halmazának egy φ leképezése egy Y TVT-be *lokálisan korlátos* valamely $x\in A$ pontban, ha van x-nek olyan U környezete az X tér A alterében, amelynek $\varphi[U]$ képe korlátos halmaz az Y térben. (*Lineáris formákra* szorítkozva más, mégpedig „kevésbé lokális" értelemben is használatos a „lokálisan korlátos" kifejezés; l. pl. [38] és [60].)

E tétel (és más hasonló tételek) alapján azt mondhatjuk, hogy a p-intern leképezések hasonlóan szélsőséges viselkedésűek, mint a p-konvex függvények.[38] (A p-konvex függvények speciális p-kvázikonvex függvények; definíciójukat l. (18. 68)-ban. A lineáris terek elméletében a „p-konvex" kifejezés más értelemben is használatos ([38] 163)).

A (18. 64) tétel kapcsán a következő kérdés merül fel:

(18. 65) Probléma. *Keresni kellene az X, Y terekre, továbbá $P \subseteq (0, 1)$ halmazok (valamilyen értelemben vett) „nagyságára" kiírt olyan, lehetőleg gyenge (esetleg valamilyen értelemben minimális) feltételeket, amelyek biztosítják, hogy egy olyan $\varphi: K \to Y$ leképezés (ahol K ismét X egy konvex halmazát jelenti), amely minden $p \in P$ súlyra p-intern, a* (18. 64)*-beli két szélsőség közül a „jó" tulajdonsággal bírjon.*[39]

A (18. 61) tétel, amelyet [19]-ben egy TVT-ekre vonatkozó speciális (de azért (18. 62)-nél általánosabb) fogalmazásban mondtunk ki és bizonyítottunk be, úgy is interpretálható, hogy egy intern leképezés — bár nem szükségképpen folytonos — egy bizonyos értelemben sohasem lehet „nagyon nem-folytonos". Ez a megjegyzés bizonyára érdekesebbé válik, ha megemlítjük, hogy az intern leképezések közé tartoznak — s nyilván ezek a legfontosabb intern leképezések — a TVT-ek lineáris funkcionáljai, sőt lineáris operátorai is. Általában törekedni kellene arra, hogy (mindkét irányban) hasznot húzzunk abból, hogy a lineáris operátorok speciális intern leképezések.[40]

Keresni kellene továbbá az analógiákat egy iránytér intern leképezései (egy másik iránytérbe, speciálisan E_1-be) és egy VT lineáris operátorai vagy funkcionáljai között. Kétségtelen, hogy sok — a konvexitással kapcsolatos — kérdésben egy VT lineáris formáinak nem a linearitása, hanem csak az intern volta a lényeges.

[38] Csupán példaképpen említjük meg itt (több hasonló tény közül kiragadva), hogy egy I valós intervallumon definiált p-konvex, vagy akár csak p-kvázikonvex, valós függvény felső burkolójának értéke bármely $0<p<1$ szám esetén vagy I minden pontjában, vagy I egyetlen pontjában sem ∞. Ha f p-konvex, akkor vagy I minden pontjában, vagy I egyetlen pontjában sem folytonos. Mindez sokkal általánosabban is igaz. Részletes irodalmi adatok helyett legyen szabad a [14] és [19] dolgozatainkra, továbbá a részben ezeket ismertető [60] dolgozatunkra utalnunk, ahol a szóban forgó témakört (különösen [14]-ben) eléggé részletesen feldolgoztuk, és amelyekben elég sok történeti és irodalmi adat is található.

[39] Az e problémára vonatkozó eddigi egyetlen eredményünk így szól:

(18. 65. a) Tétel. *Ha X euklidészi tér, Y LKT és $K \subseteq X$ konvex halmaz, akkor bármely $\varphi: K \to Y$ intern leképezés K minden pontjában lokálisan korlátos.* (Ez a [19] dolgozat (1. 7) tételéből következik az ottani (1. 4) definícióhoz fűzött megjegyzés alapján.)

Ez a tétel persze eléggé gyenge eredményt fejez ki a (18. 65) problémára vonatkozóan, hiszen itt X-re igen erős feltételt róttunk ki, a P-re tett (hallgatólagos) kikötés pedig (minden lehetséges értelemben) *maximális*, ui. $P=(0, 1)$.

[40] Megemlítjük, hogy a (18. 65. a) tételnek olyan *ekvivalens* fogalmazását lehet adni, amely érdekes fényt vet a lineáris formákra, mint speciális intern leképezésekre:

(18. 65. b) Tétel. *Legyen Y tetszőleges* LKT. *Ha K egy olyan lokálisan korlátos X* TVT*-nek konvex részhalmaza (akár $K=X$ is lehet), amelynek minden lineáris formája X minden egyes pontjában lokálisan korlátos* (ezek az X terek ui. éppen az euklidészi terek, vö. [19] 226), *akkor minden intern $\varphi: K \to Y$ leképezés is lokálisan korlátos K minden pontjában.*

M. JERISON pl. [32] dolgozatában (BOURBAKI nyomán) így foglalta össze a LKT-ek konvex halmazainak bizonyos viszonyait:

(18. 66) TÉTEL. *Ha* L LKT, E^{Δ} *egy* $E \subseteq L$ *részhalmaz zárt konvex burkát jelöli és minden* L*-en értelmezett* f *valós függvényre*

$$f_E = \sup_{x \in E} f(x) \quad (E \subseteq L),$$

akkor minden $C \subseteq L$ *kompakt és konvex halmazra és minden* $S \subseteq C$ *részhalmazra a következő kijelentések ekvivalensek:*

(a) $f_S = f_C$ $(f \in L')$;

(b) $C = S^{\Delta}$;

(c) S^- *tartalmazza* C *minden extremális pontját.*

(A (c)$\Rightarrow$(b) implikáció lényegében a KREIN—MILMAN-tétel.)

Mármost ez a tétel érvényben marad, ha az (a) kijelentést az analóg

(a′) „$f_S = f_C$ *minden* L*-en értelmezett folytonos és a* (18. 60), (b) *definíció értelmében* $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$*-re nézve intern valós függvényre*" kijelentéssel helyettesítjük.

(Ennek igazolására elegendő a (b)$\Rightarrow$(a′) implikációt bizonyítani. Minden folytonos valós f függvényre $f_S \leqq f_C < \infty$. Ha (a′)-vel ellentétben létezik olyan f folytonos intern függvény, amelyre $f_S < f_C$, akkor az

$$F = \{x \colon x \in L,\ f(x) \leqq f_S\}$$

zárt halmazra

$$S \subseteq C \cap F \subset C,$$

és az F halmaz konvex, hiszen a számegyenes egy félterének inverz képe f-re nézve; ezért $S^{\Delta} \subseteq C \cap F$, tehát $S^{\Delta} \neq C$, vagyis (b) sem teljesül.)

(18. 67) Probléma. *Lehet-e az intern leképezés fogalmának valamely változatából kiindulva a* VT *konjugáltjának, ill.* TVT *duálisának megfelelő fogalmat alkotni irányterekre, ill.* TIT*-ekre?*

(18. 68) A legspeciálisabb intern leképezések a lineáris leképezések, s ezeknek — amennyiben egy-egyértelműek — az inverze is intern (sőt lineáris); ezért talán az (A) és (B) típus kombinációjából kellene kiindulni.

A konvex függvény fogalmát nehezebb átvinni TIT-ek közötti leképezésekre úgy, hogy bizonyos megszokott, jó tulajdonságai (folytonosság, kvázikonvexitás stb.) ne vesszenek el. Talán hasznos lesz e tekintetben az az észrevétel, hogy egy $f \colon L \to E_1$ leképezés akkor és csak akkor p-konvex, ill. konvex (vagyis

$$f[px + (1-p)y] \leqq pf(x) + (1-p)f(y) \qquad (x, y \in L)$$

egy $0 < p \leqq \frac{1}{2}$ súlyra, ill. minden ilyen súlyra), ha az $L \times E_1$ (lineáris) szorzattérnek az f gráfja „feletti" része p-konvex, ill. konvex halmaz.

Befejezésül megemlítjük, hogy az iránystruktúra-fogalom bevezetésének első indítéka éppen az a törekvésünk volt, hogy bizonyos függvényegyenlőtlenségekkel definiált függvényosztályok (konvex, intern, kvázikonvex stb.) értelmezését és vizsgáltatát (pl. a [14] dolgozat anyagát) nem-lineáris terekre is átvigyük. Ennek első lépése volt e függvényosztályoknak olyan ekvivalens definíciót keresni, amelyek csupán a konvex halmaz és bizonyos speciális konvex halmazok (félterek) fogalmát feltételezik; második lépésként pedig éppen az utóbbit (pontosabban: egy VT konvex halmazai családjának fogalmát) kellett általánosítani.

Problémafejezetünknek ezen utolsó szakasza tehát lényegében olyan gondolatokat tartalmaz, amelyek az értekezés anyagának felépítését megelőzték, sőt arra indították, de részletes kidolgozásuk — jó néhány már elért, és itt csak részben megemlített eredmény ellenére is — még hátra van.

Az I. részben közölt irodalomjegyzék kiegészítése

[57] ALEXANDROV, P. SZ.: Теорема сложения в теории размерности бикомпактных проштранств, Сообщ. Гр- фил. АН **2**, 1—6 (1941).

[58] BING, R. H.: Metrization of topological spaces, *Canadian J. Math.* **3**, 175—186 (1951).

[59] DEÁK, E.: Untersuchungen über die Richtungsdimension, II, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sectio Math.* (sajtó alatt).

[60] DEÁK, E.: Über Abbildungen mit konvexitätserhaltender Inversion sowie deren Beziehungen zu einigen durch Funktionalungleichungen definierten Funktionenklassen, *Miskolci NME Közl.* (sajtó alatt).

[61] DEÁK, E.: Einige Beziehungen der Richtungsdimension zu den klassischen Dimensionsbegriffen der allgemeinen Topologie, *Mathematische Nachrichten* (sajtó alatt).

[62] DEÁK, E.: Untersuchungen über die Richtungsdimension, I, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sectio Math.* (sajtó alatt).

[63] DIEUDONNÉ, J.: Une généralisation des espaces compacts, *J. Math. Pures Appl.* **23**, 65—76 (1944).

[64] DOWKER, C. H.: Local dimension of normal spaces, *The Quarterly Journal of Math., Oxford second series, Vol.* **6**, No. 22, 101—120 (1955).

[65] ERDŐS, P.: The dimension of the rational points in Hilbert space, *Ann. Math.* **41**, 734—736 (1940).

[66] General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra I, *Proc. Symp. Prague 1961* (1962).

[67] General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra II, *Proc. Symp. Prague 1966* (1967).

[68] HEMMINGSEN, E.: Some theorems in dimension theory for normal Hausdorff spaces, *Duke Math. J.* **13**, 495—504 (1946).

[69] KATETOV, M.: О размерности несепарабельных пространств. I, Чех. Мат. Журнал **2** (77), 333—368 (1952).

[70] KOWALSKY, H. J.: Einbettung metrischer Räume, *Arch. Math.* **8**, 336—339 (1957).

[71] MENGER, K.: Zur Begründung einer axiomatischen Theorie der Dimension, *Monatsh. Math. Phys.* **36**, 193—218. (1929).

[72] MORITA, K.: Normal familes and dimension theory for metric spaces, *Math. Ann.* **128**, 350—362 (1954).

[73] NAGATA, J.: Note on dimension theory for metric spaces, *Fund. Math.* **45**, 143—181 (1958).

[74] ROY, P.: Failure of equivalence of dimension concepts for metric spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **68**, 609—613 (1962).

[75] SORGENFREY, R. H.: On the topological product of paracompact spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**, 631—632 (1947).

[76] VEDENNISOFF, N.: Généralisation de quelques théorèmes sur la dimension, *Compositio Math.* **7**, 194—200 (1939).

[77] VEDENNISOFF, N.: Sur la dimension au sens de E. Cech, *Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math.* **5**, 211—216 (1941).

(Beérkezett: 1967. XII. 28.)

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

ALGORITMUSOK LOGIKAI SÉMÁIRÓL (I)

Irta: JU. I. JANOV[1]

Bevezetés

Minden algoritmus elemi műveletek egyértelműen meghatározott sorozatát írja elő konkrét objektum átalakításánál (amelyre az algoritmust alkalmazzuk). A ténylegesen végrehajtott elemi műveletek sorozata általában függ attól az objektumtól, amelyre a tekintett algoritmust alkalmazzuk. De található az átalakítandó objektumok bizonyos sajátosságait kifejező ítéletek olyan véges halmaza, hogy az adott algoritmushoz ezen ítéletek egyértelmű függvényeként meg tudjuk adni, hogyan függ az elemi műveletek elvégzésének sorrendje az átalakítandó objektumoktól. Ez a függvény véges sorozat segítségével felírható, amely az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ elemi műveletek[2] szimbólumaiból (ezeket operátoroknak nevezzük), ítéletekből és bizonyos $\underset{i}{\llcorner}$, $\underset{i}{\lrcorner}$ segédjelekből ($i=1, 2, \ldots$) (ezeket bal és jobb félzárójeleknek nevezzük) áll. Nevezetesen, a következő jelöléseket vezetjük be. Az $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_s}$ sorozat azt jelenti, hogy $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_s}$ operátorokat (műveleteket) kell sorban egymás után végrehajtani. Az $A_{i_1}\alpha\underset{m}{\llcorner}A_{i_2}\ldots\underset{m}{\lrcorner}A_{i_3}\ldots$, ahol α valamilyen ítélet, azt jelenti, hogy A_{i_1} végrehajtása után $\alpha=1$ esetén az $\underset{m}{\llcorner}$-től közvetlenül jobbra álló A_{i_2} operátort, $\alpha=0$ esetén pedig az $\underset{m}{\lrcorner}$ jobb félzárójeltől (ugyanazzal az m indexszel mint az α ítéletnél álló bal félzárójelé) jobbra álló A_{i_3} operátort kell végrehajtani.

Az ilyen alakú sorozatokat *algoritmusok sémafelírásainak* nevezzük. Például, normális algoritmus [1] sémafelírását a következőképpen lehet megkapni. Legyen a normális algoritmus — valamely A ábécében — a következő alakú:

$$
\begin{cases}
P_1 \to Q_1, \\
\quad\ldots \\
P_s \to \cdot Q_s, \\
\quad\ldots \\
P_n \to Q_n,
\end{cases}
\tag{1}
$$

ahol $P_s \to \cdot Q_s$ végformula. Jelöljük p_i-vel — a „P_i szó beletartozik az átalakítandó

[1] О логических схемах алгоритмов, Проблемы Кибернетики 1 (1958), 75—127. (A dolgozat a szerző disszertációjának [6] kifejtése.) — Az itt közölt fordítás az 1. §-t és a 2. § 1—3. pontját, valamint a dolgozat irodalomjegyzékét tartalmazza. Ez úton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik a fordítás során segítséget nyújtottak. (A fordító.)

[2] Pontosabban, elemi műveletek típusai.

szóba" ítéletet, A_i-vel — a P_i szónak az átalakítandó szóban való első előfordulása helyén történő helyettesítését a Q_i szóval ($i=1, 2, \dots, n$). Akkor az

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad & \underset{n+1}{\lrcorner} \dots \underset{n+s+1}{\lrcorner} \; \underset{n+s+1}{\lrcorner} \dots \underset{2n}{\lrcorner}\, p_1 \underset{1}{\llcorner}\, A_1 0 \underset{n+1}{\llcorner} \; \underset{1}{\lrcorner}\, p_2 \underset{2}{\llcorner}\, A_2 0 \underset{n+2}{\llcorner} \dots \\
& \dots \underset{s-1}{\lrcorner}\, p_s \underset{s}{\llcorner}\, A_s 0 \underset{n+s}{\llcorner} \dots \underset{n-1}{\lrcorner}\, p_n \underset{n}{\llcorner}\, A_n 0 \underset{2n}{\llcorner} \; \underset{n}{\lrcorner} \; \underset{n+s}{\lrcorner}
\end{aligned}
$$

sorozat a tekintett normális algoritmus sémafelírása.[3] Világos, hogy minden R szóra — az A ábécében — e szó fölötti $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots$ ($1 \leqq i_s \leqq n$; $s=1, 2, \dots$) műveletek olyan sorozata, amelyet (fenti módon) a (2) sémafelírás előír, egybeesik az R szó azon átalakításai sorozatával, amely a normális algoritmus (1) séma szerinti alkalmazásánál előáll. Analóg módon beszélhetünk olyan algoritmusok sémafelírásairól, amelyek univerzális számológépre készített programokkal adottak, és amelyeket ebben az esetben programok sémáinak [2, 3][4] nevezünk.

Ha algoritmusok sémafelírásaiban elvonatkoztatunk az operátorok tartalmi értelmétől és csak elemi szimbólumaikkal vesszük figyelembe őket, az ítéleteket pedig független logikai változókkal, akkor az így kapott kifejezéseket nevezzük algoritmusok logikai sémáinak, vagy egyszerűen sémáknak, ha ez nem vezet kétértelműséghez. Algoritmusok logikai sémáit úgy tekinthetjük, mint algoritmusok sémafelírásainak sémáit (a logikában használt formulák sémáival analóg módon), amelyekből operátorok szimbólumainak és logikai változóknak konkrét operátorokkal és ítéletekkel való helyettesítése útján kapjuk algoritmusok konkrét sémafelírásait (nevezetesen, programok sémáit).

Könnyű meggyőződni arról, hogy elemi műveletek és ítéletek rögzített halmazánál ugyanannak az algoritmusnak[5] lehetnek különböző sémafelírásai és következésképpen, különböző logikai sémái. Például a

$$
p_1 \vee \bar{p}_2 \underset{1}{\llcorner} \; \underset{2}{\lrcorner}\, A_1 p_2 \underset{2}{\llcorner}\, 0 \underset{3}{\llcorner} \; \underset{1}{\lrcorner}\, A_2 \underset{3}{\lrcorner} \qquad \text{és} \qquad \bar{p}_1 \cdot p_2 \underset{1}{\llcorner}\, A_2 0 \underset{2}{\llcorner} \; \underset{1}{\lrcorner} \; \underset{3}{\lrcorner}\, A_1 p_2 \underset{3}{\llcorner} \; \underset{2}{\lrcorner}
$$

kifejezések ugyanannak az algoritmusnak a sémafelírásai konkrét operátorok és ítéletek tetszőleges megadásánál (A_1, A_2 és p_1, p_2 helyett).

Sémák tartalmi értelmére hivatkozva feltételezzük, hogy a logikai változók értékei csak az operátorok végrehajtásának pillanatában változhatnak. Emellett, amennyiben az algoritmusok logikai sémái nem tartalmaznak semmiféle információt a logikai változók értékeinek viselkedéséről, akkor a változásaik lehetőségeire bizonyos korlátozásokat — amelyeket algoritmusok sémafelírásaiban az operátorok individuális sajátosságai támasztanak —, adunk meg a logikai sémák számára

[3] Itt 0 azonosan hamis ítélet.

[4] Program sémája fogalmát A. A. LJAPUNOV indítványozta 1953-ban és kettős értelemben használták. Egyrészt, a gyakorlati programozásban és bizonyos munkákban [2, 3] program sémáján programok (algoritmusként tekintve) sémafelírását értették, másrészt [4, 5, 6] munkákban programok sémáin algoritmusok logikai sémáit (lásd a következő bekezdést) vagy programok sémáit — az első értelemben — értettek. Ezen kétértelműség elkerülésére jelen cikkben „algoritmus logikai sémája" elnevezést használjuk, amely tartalmilag ekvivalens [4, 5, 6] értelmében vett „program sémája" elnevezéssel.

[5] Itt azonosítjuk azokat az algoritmusokat, amelyek elemi műveletek (operátorok) ugyanazon sorozatát írják elő minden átalakítandó objektumra.

kívülről, úgynevezett változáseloszlások (01. 6)[6], azaz operátorok és logikai változók halmazai közötti megfeleltetések segítségével. Nevezetesen, ha adott valamilyen $A_i - \mathfrak{V}_i$ változáseloszlás, ahol A_i-k operátorok, $\mathfrak{V}_i$-k logikai változók halmazai ($i = 1, 2, \ldots$), akkor feltételezzük, hogy A_i operátor végrehajtása pillanatában csak azon logikai változók értékei változhatnak meg, amelyek beletartoznak a $\mathfrak{V}_i$-be. Legyen adva valamilyen séma; megadjuk számára a logikai változók értékrendszereinek $\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \ldots$ sorozatát[7]. Ha feltételezzük, hogy a séma végrehajtásánál a logikai változók értékei ezen sorozatnak megfelelően változnak meg, azaz az m-edik (végrehajtás sorrendjében) operátor végrehajtása után a logikai változók a $\Delta_{s_{m+1}}$ értékrendszert kapják, akkor a végrehajtott operátorok meghatározott sorozatát kapjuk, amelyet a *séma értékének* nevezünk az *értékrendszerek adott sorozatára.* A változáseloszlás megadása minden séma számára kiválasztja az értékrendszerek összes lehetséges sorozatai közül a megengedett sorozatok halmazát, azaz olyan sorozatokét, amelyeknél minden értékrendszer az előzőtől csak azon változók értékeiben különbözhet, amelyek az adott változáseloszlás révén az előző értékrendszernél végrehajtott operátornak felelnek meg. Sémák ekvivalenciájának — adott változáseloszlásnál — a jelen munkában bevezetett fogalma megköveteli, hogy ekvivalens sémák értékei egybeessenek az értékrendszerek tetszőleges megengedett sorozatánál. Ez azt jelenti, hogy az összes ekvivalens sémák halmaza konkrét operátorok és ítéletek tetszőleges helyettesítésénél (amelyek kapcsolata megfelel az adott változáseloszlásnak) átmegy ugyanazon algoritmus sémafelírásainak halmazába[8].

A jelen munkában alkalmazott módszerekkel analóg módon meg lehet oldani sémák ekvivalenciájának és azonos átalakításainak problémáit a fentieknél általánosabb változáseloszlások esetén. Például, vehetjük azt az esetet, amikor az adott megfeleltetés alakja:

$$A_i - \mathfrak{V}_i^0, \mathfrak{V}_i^1, \mathfrak{V}_i^2, \mathfrak{V}_i^3 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

ahol $\mathfrak{V}_i^0$, $\mathfrak{V}_i^1$, $\mathfrak{V}_i^2$ és $\mathfrak{V}_i^3$ olyan logikai változók halmazai, amelyek az A_i operátor végrehajtása pillanatában rendre felveszik a 0 értéket ($\mathfrak{V}_i^0$), felveszik az 1 értéket ($\mathfrak{V}_i^1$), értékeiket ellenkezőre változtatják ($\mathfrak{V}_i^2$) és tetszőleges módon változhatnak meg ($\mathfrak{V}_i^3$).

Mint már említettük, a változáseloszlás megadása minden séma számára meghatározza az értékrendszerek megengedett sorozatai halmazát. Ez a halmaz jellemzi a logikai változók olyan változásait, amelyek formálisan lehetségesek algoritmusok — az adott sémákból helyettesítéssel kapott — különböző sémafelírásaival kapcsolatban. Általában, az algoritmusok konkrét sémafelírásaiban a végrehajtandó operátorok és a logikai változók értékeinek változásai közötti kapcsolat lehet tetszőlegesen összetett és leírására szükség lehet, például olyan változáseloszlásokra, amelyek a sémák végrehajtása folyamán változnak. A sémák átalakításainak a második §-ban felépített teljes rendszere alkalmazható megengedett sorozatok halmazainak tetszőleges megadásai esetén azzal a feltétellel, hogy az operátorok és logikai

[6] Kényelem kedvéért jelen cikkben az összes alapvető definíciót $On.m$ szimbólummal jelöljük, ahol n a paragrafus száma, m a definíció sorszáma, az adott paragrafusban.

[7] Az általánosság megszorítása nélkül szorítkozhatunk az értékrendszerek csak végtelen sorozataira.

[8] l. az [5] megjegyzést a 84. oldalon.

feltételek logikai függvényeknek való alárendeltségének — XI szabályban szereplő — fogalma megfelelő módon meghatározott. Természetes, hogy a megengedett sorozatok halmazainak bizonyos megadásainál az alárendeltség ezen fogalma egyáltalán nem bizonyul effektívnek. Egyszerűség kedvéért további vizsgálatainkban a változáseloszlás legegyszerűbb formájára korlátozódunk, amely azonban lehetővé teszi, hogy eléggé általános eredményeket kapjunk.

Az 1. §-ban szerepel egy effektív kritérium, amely biztosítja, hogy logikai sémák bármely párjára megállapítsuk, ekvivalensek-e vagy nem, adott változáseloszlásnál. Ugyanitt fogalmazunk meg analóg eredményt a parciális ekvivalencia (01. 9) fogalmára. (Amikor a logikai sémák vizsgálatánál a végrehajtott operátoroknak csak véges sorozataira vagyunk tekintettel.)

A 2. §-ban felépítjük az algoritmusok logikai sémái azonos átalakításainak rendszerét, amely teljes abban az értelemben, hogy bármely sémából tetszőleges — az adott változáseloszlásnál — vele ekvivalens séma megkapható csak ezen átalakítások felhasználásával.

A 3. §-ban az algoritmusok logikai struktúrájának kétmértékű felírásait vizsgáljuk, melyeket mátrix-sémáknak nevezünk. Ezekre az ekvivalencia és az azonos átalakítások problémáit szintén megoldjuk. Mátrix-sémák segítségével kapjuk algoritmusok logikai sémái ekvivalencia-problémájának megoldását $A_i = A_j$ alakú definiáló összefüggés esetén. (Itt feltételezzük, hogy a sémában minden operátor legfeljebb egy helyen fordul elő.)

Meg kell jegyezni, hogy — ellentétben például normális algoritmusok sémafelírásával — programok sémái (tehát azok logikai sémái) végrehajtásuk folyamán megváltozhatnak, mivel a nekik megfelelő programok át tudják alakítani — azokkal az objektumokkal együtt, amelyekre alkalmazzuk őket — saját magukat is. Ezért, ha jelen munkában kapott eredményeket programok sémáira alkalmazzuk, szükséges, hogy különös tekintettel legyünk azok logikai sémái változásának lehetőségeire.

1. §. Algoritmusok logikai sémáinak ekvivalencia-problémái

1. Alapfogalmak

Megállapodunk abban, hogy a következő alapműveleteket: negációt, konjunkciót, diszjunkciót, implikációt, ekvivalenciát [7], rendre a következő szimbólumokkal jelöljük: $-$, $\cdot$, v, $\rightarrow$, $=$, a „hamis" és „igaz" értékeket pedig a 0, ill. 1 számjegyekkel.[9]

01. 1. Az ítéletkalkulus α formuláját a tőle jobbra álló i természetes szám indexű bal félzárójellel $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ *logikai feltételnek* nevezzük.

01. 2. *Algoritmus logikai sémájának* olyan véges sorozatot nevezünk, amely operátorok $A_1, A_2, \ldots$ szimbólumaiból, $\alpha\underset{i}{\llcorner}, \beta\underset{j}{\llcorner}, \ldots$ logikai feltételekből és $\underset{i}{\lrcorner}, \underset{j}{\lrcorner}, \ldots$ jobb félzárójelekből áll úgy, hogy bármely — e sorozatba tartozó — i indexű bal félzárójelhez található benne egy és csakis egy jobb félzárójel ugyanazzal az i

[9] Feltételezzük, hogy a . szimbólum erősebben köt, mint a v. Továbbiakban a . jelet gyakran elhagyjuk.

indexszel, és fordítva, bármely $\lrcorner_i$ jobb félzárójelhez található egy és csakis egy bal félzárójel ugyanazzal az indexszel.

Algoritmusok logikai sémáinak legegyszerűbb példái a következők: A; $\alpha\llcorner_1\ \lrcorner_1$; $\lrcorner_1\alpha\llcorner_1$; $\alpha\llcorner_1 A\lrcorner_1$; $\lrcorner_1 A\alpha\llcorner_1$, ahol α valamilyen logikai függvény.

A továbbiakban, ha ez nincs külön kikötve, feltételezzük, hogy a sémában minden operátor legfeljebb egy helyen fordul elő.

01. 3. Megállapodunk abban, hogy az operátorokat és a logikai feltételeket *elemi kifejezéseknek* nevezzük.

01. 4. Tekintsük az $\mathfrak{A}(p_1, ..., p_k, A_1, ..., A_n)$ sémát, ahol $p_1, ..., p_k$ — független logikai változók. Jelöljük a $p_1, ..., p_k$ változók értékeinek összes lehetséges sorozatát $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{2^k}$-val, és tekintsük ilyen értékrendszerek tetszőleges végtelen sorozatát:

(1) $$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, ..., \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, ...$$

Indukcióval definiáljuk az $\mathfrak{A}(p_1, ..., p_k, A_1, ..., A_n)$ séma (1) sorozatra történő *végrehajtásának eljárását.*

Első lépés: *A* Δ_{s_1} értékek sorozatát adjuk $p_1, ..., p_k$ változóknak és megjelöljük az $\mathfrak{A}$ séma bal szélső szimbólumát. Tegyük fel, hogy l lépést elvégeztünk, amelyek eredményeként kiírtuk az operátorok

(2) $$A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_{m-1}}$$

sorozatát (üres is lehet), és az l-edik lépésben megjelöltük a séma valamely szimbólumát. Akkor az $l+1$-edik lépésben megvizsgáljuk az l-edik lépésben megjelölt szimbólumot, és attól függően, hogy az operátor, logikai feltétel vagy jobb félzárójel, a következőt tesszük.

1. Ha az l-edik lépésben megjelölt szimbólum az A_{i_m} operátor, akkor kiírjuk azt (a (2) sorozat jobb oldalára); ezután a $\Delta_{s_{m+1}}$ értékrendszert adjuk $p_1, ..., p_k$ változóknak, és megjelöljük az $\mathfrak{A}$ sémában az A_{i_m} után közvetlenül következő szimbólumot.

2. Ha az l-edik lépésben megjelölt szimbólum — $\alpha(p_1, ..., p_k)\llcorner_i$ [10], akkor $\alpha(\Delta_{s_m})=1$ esetén megjelöljük az $\mathfrak{A}$ sémában az $\alpha(p_1, ..., p_k)\llcorner_i$-től közvetlenül jobbra álló szimbólumot, és $\alpha(\Delta_{s_m})=0$ esetén az $\mathfrak{A}$ sémában az $\llcorner_i$ jobb félzárójeltől közvetlenül jobbra álló szimbólumot.

3. Ha az l-edik lépésben megjelölt szimbólum jobb félzárójel, akkor megjelöljük az $\mathfrak{A}$ sémában azt a szimbólumot, amely ezen félzárójel után közvetlenül következik.

Ha az $\mathfrak{A}$ sémában nincs olyan szimbólum, amelyet 1(—3) értelmében meg kell jelölni, akkor semmiféle szimbólumot nem jelölünk meg, és a következő lépésben az eljárás befejeződik.

Ezen eljárás eredményeként kiírt operátorok sorozatát fogjuk $\mathfrak{A}$ *sémának* az (1) *sorozatra* tekintett *értékének* nevezni, emellett, ha a séma végrehajtásának

[10] Itt és a továbbiakban logikai függvények argumentumaiként az összes $p_1, ..., p_k$ változót fogjuk írni, tekintet nélkül arra, hogy közülük némelyektől a függvény-értékek ténylegesen nem függhetnek.

eljárása végtelenül folytatódik, a kiírt operátorok sorozata véges, akkor hozzáírjuk jobbra a ( ) jelet, amelyet *üres periódusnak* nevezünk. Az üres periódusú értékeket végteleneknek vesszük. Például, a $\underset{2}{\lrcorner}\bar{p}_1\underset{1}{\llcorner} A_1 \underset{1}{\lrcorner} p_2\underset{2}{\llcorner} A_2$ séma értéke a $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 0), \ldots, (1, 0), \ldots$ sorozatnál: $A_1(\ )$, és a $(0, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 1), \ldots$ sorozatnál: $A_1 A_1 A_2$.

01. 5. Az $\mathfrak{A}$ séma — (1) sorozatra történő — végrehajtásának eljárásában megjelölt elemi kifejezéseket az (1) *sorozatra* az $\mathfrak{A}$ *sémában végrehajthatóknak* nevezzük. Emellett, ha az adott elemi kifejezés megjelölésének pillanatában a logikai változók értéke Δ_s értékrendszer volt, akkor azt mondjuk, hogy az említett elemi kifejezés az (1) sorozatra Δ_s értékrendszernél végrehajtásra kerül.

A továbbiakban egyszerűség kedvéért néha a sémáknak a $\Delta_s, \Delta_s, \ldots, \Delta_s, \ldots$ alakú stacionárius sorozatokra kapott értékeit a Δ_s *értékrendszerre* kapott értéknek nevezzük.

01. 6. Tekintsük operátorok $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazát és logikai változók $\mathfrak{B} = \{p_1, \ldots, p_k\}$ halmazát. Azt mondjuk, hogy adott az

(3) $$A_i—\mathfrak{A}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, t)$$

változáseloszlás, ha minden $\mathfrak{M}$-beli A_i operátornak a logikai változók valamely $\mathfrak{B}_i \subset \mathfrak{B}$ halmaza van megfeleltetve.

Tartalmilag ez annak kifejezése, hogy az A_i operátor csak $\mathfrak{B}_i$-beli változók értékeit változtathatja meg.

01. 7. Legyen az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$ (ahol $n \leqq t$) séma — az értékrendszerek

(4) $$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots$$

sorozatára kapott értéke:

$$A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_m} A_{i_{m+1}} \ldots,$$

amely l hosszúságú $(0 \leqq l \leqq \infty)$[11]. A (4) sorozatot az $\mathfrak{A}$ séma számára *megengedettnek* nevezzük (3) változáseloszlásnál, ha minden $m(\leqq l)$-re $\Delta_{s_{m+1}}$ vagy egybeesik Δ_{s_m}-mel, vagy attól csak $\mathfrak{B}_{i_m}$-beli változók értékeiben különbözik (azaz a (3) változáseloszlás által A_{i_m}-nek megfeleltetett halmaz elemei értékében).

Megállapodunk abban, hogy megengedett sorozatoknál sémák végrehajtásának eljárását és értékeit megengedett eljárásoknak és értékeknek nevezzük.

01. 8. Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k)$ és $\mathfrak{B}(p_1, \ldots, p_k)$ sémák[12] *ekvivalensek adott változáseloszlásnál* (amit így jelölünk: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$), ha bármely — az $\mathfrak{A}$ vagy $\mathfrak{B}$ séma számára megengedett — értékrendszersorozatra értékeik egybeesnek ennél a változáseloszlásnál.

Az alkalmazások szempontjából érdekes az az eset, amikor a sémáknak csak véges megengedett értékeit vizsgáljuk.

01. 9. Az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k)$ és $\mathfrak{B}(p_1, \ldots, p_k)$ sémákat akkor nevezzük *parciálisan ekvivalenseknek* ($\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$-vel jelöljük) *adott változáseloszlásnál,* ha bármely — az $\mathfrak{A}$ vagy $\mathfrak{B}$ séma számára megengedett — értékrendszer-sorozatra értékeik vagy egybeesnek, vagy közülük annak értéke, amelyre ez a sorozat megengedett, végtelen.

[11] Véges sorozat hosszán tagjai számát értjük, végtelen sorozat hossza egyenlő ∞-nel.

[12] Itt és a továbbiakban nem teszünk korlátozásokat a tekintett sémákban előforduló operátorok halmazára, kivéve azt, hogy ezen halmaz minden operátorának az adott változáseloszlás a logikai változók valamely halmazát (esetleg üres) feleltesse meg.

10. 10. Sémák ekvivalenciájának (megfelelően parciális ekvivalenciájának) problémáját a következőképpen fogalmazzuk meg: keresni kell olyan algoritmust, amellyel sémák bármely párja esetén eldönthető, hogy ekvivalensek (parciálisan ekvivalensek) vagy nem, — adott változáseloszlásnál.

Megemlítjük a változáseloszlások két esetét:

1. üres változáseloszlás, amikor minden operátornak a logikai változók üres halmazát feleltetjük meg;
2. univerzális változáseloszlás, amikor minden operátornak az összes logikai változók halmazát feleltetjük meg.

Univerzális változáseloszlásnál — minden sorozat megengedett, ezért ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémák univerzális változáseloszlásnál ekvivalensek, akkor tetszőleges változáseloszlásnál is ekvivalensek.

2. Az ekvivalenciaprobléma megoldása

Bevezetünk néhány kiegészítő fogalmat.

01. 11. Az $\mathfrak{A}(p_1, ..., p_k)$ sémában a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés végrehajtása *első feltételének* nevezzük az ítéletkalkulus következőképpen definiált $\mathfrak{B}^{\otimes}_{(\mathfrak{A})}(p_1, ... p_2)$ függvényét:

$$\mathfrak{B}^{\otimes}_{(\mathfrak{A})}(\Delta_s) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \mathfrak{B} \text{ végrehajtásra kerül az } \mathfrak{A} \text{ sémában a } \Delta_s, \Delta_s, ..., \Delta_s, ... \\ & \text{szorzatnál;} \\ 0, & \text{az ellenkező esetben.} \end{cases}$$

01. 12. Minden $\mathfrak{A}(p_1, ..., p_k, A_1, ..., A_n)$ sémához az

$$A_i - \mathfrak{Y}_i \quad (i=1, 2, ..., n) \tag{1}$$

változáseloszlás mellett bizonyos speciális sémát építünk fel, amelyet az $\mathfrak{A}$ séma *stacionárius kibővítésének* nevezünk.

1. Bevezetjük a következő jelölést: $\alpha_i^1 = \max\limits_{\mathfrak{Y}_i} A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A})}(p_1, ..., p_k)$ $(i=1, 2, ..., n)$, ahol a maximum a $\mathfrak{Y}_i$-beli változók értékeinek összes lehetséges sorozatain veendő, és tekintsük a következő sémát[13]:

$$\mathfrak{A}^{(1)} \equiv q_1 v \overline{\alpha_1^1} \underset{j_1}{\llcorner} ... q_n v \overline{\alpha_n^1} \underset{j_n}{\llcorner} \mathfrak{A}(p_1, ..., p_k, A_1 \underset{j_1}{\lrcorner}, ..., A_n \underset{j_n}{\lrcorner}),$$

ahol $q_1, ..., q_n$ független logikai változók, $j_1, ..., j_n$ az $\mathfrak{A}$ sémában elő nem forduló félzárójel indexek.

2. Legyenek definiálva az α_i^ν $(i=1, 2, ..., n)$ függvények és az $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ séma, amelyet az $\mathfrak{A}$ séma ν-edik kibővítésének nevezünk. Akkor tegyük fel, hogy:

$$\alpha_i^{\nu+1} = \max_{\mathfrak{Y}_i, q_1, ..., q_n} A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A}^{(\nu)})}(p_1, ..., p_k, q_1, ..., q_n) \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

[13] A $\equiv$ jelet a grafikus azonosság jelölésére használjuk.

ahol a maximum a $\mathfrak{Y}_i$-beli és $q_1, \ldots, q_n$ változók értékeinek összes lehetséges sorozatain veendő;

$$\mathfrak{A}^{(\nu+1)} \equiv q_1 v \overline{\alpha_1^{\nu+1}} \underset{j_1}{\llcorner} \ldots q_n v \overline{\alpha_n^{\nu+1}} \underset{j_n}{\llcorner} \mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1 \underset{j_1}{\lrcorner}, \ldots, A_n \underset{j_n}{\lrcorner}).$$

Megjegyezzük, hogy az $\mathfrak{A}$ séma lehet olyan, hogy az $A_1, \ldots, A_n$ operátorok közül némelyeket nem tartalmaz. Ebben az esetben azokat a jobb félzárójeleket, amelyeknek a megfelelő operátoroktól jobbra kell állni, közvetlenül az $\mathfrak{A}$ séma elé állítjuk. Világos, hogy ilyen félzárójelek elhelyezése nem befolyásolja a kibővítések értékeit, mivel a hiányzó operátorokra: $A_i^{\otimes} \equiv 0$.

Könnyű meggyőződni arról, hogy az $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ séma minden megengedett értéke az $\mathfrak{A}$ séma valamely megengedett értékének része.

Nyilvánvaló, hogy minden $i(=1, 2, \ldots, n)$-re és $\nu(=1, 2, \ldots)$-re $\alpha_i^\nu \rightarrow \alpha_i^{\nu+1}$ [14] (azaz $\alpha_i^\nu \leqq \alpha_i^{\nu+1}$), ezért található olyan μ természetes szám, hogy $\alpha_i^{\mu+1} \equiv \alpha_i^\mu$ minden $i(=1, 2, \ldots, n)$-re. Az $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ sémát az $\mathfrak{A}$ séma *stacionárius kibővítésének* nevezzük (az (1) változáseloszlásnál).

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$A_i^* = \max_{q_1, \ldots, q_n} A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A}^{(\mu)})} \quad (p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_n), \tag{2}$$

$$A_i^{**} = \alpha_i^\mu, \quad \text{azaz} \quad A_i^{**} = \max_{\mathfrak{Y}_i} A_i^* = \max_{\mathfrak{Y}_i, q_1, \ldots, q_n} A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A}^{(\mu)})}. \tag{3}$$

Akkor az $\mathfrak{A}$ séma $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ stacionárius kibővítését a következő alakban írhatjuk fel:

$$\mathfrak{A}^{(\mu)} \equiv q_1 \vee \overline{A_1^{**}} \underset{j_1}{\llcorner} \ldots q_n \vee \overline{A_n^{**}} \underset{j_n}{\llcorner} \mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1 \underset{j_1}{\lrcorner}, \ldots, A_n \underset{j_n}{\lrcorner}). \tag{3^1}$$

Az A_i^* és A_i^{**} függvények jelentése — mint ez a továbbiakból (1. 1—3. 1 lemmák) látható — a következő. Az $\mathfrak{A}$ séma bármely megengedett értékrendszer-sorozatnál történő végrehajtásánál az A_i operátort csak olyan értékrendszernél lehet végrehajtani, amely az A_i^* függvény értékét 1-re változtatja, és e sorozat következő tagja az A_i^{**} értékét változtatja 1-re; fordítva, ha A_i^* $(\Delta_s) = 1$, akkor található olyan

$$\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_s, \ldots$$

megengedett sorozat, hogy ennél a Δ_s értékrendszer mellett az A_i operátor végrehajtásra kerül.

Üres változáseloszlásnál nyilvánvalóan $A_i^* \equiv A_i^{**} \equiv A_i^{\otimes}$.

01. 13. $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k)$ és $\mathfrak{B}(p_1, \ldots, p_k)$ sémákat *gyengén ekvivalenseknek* nevezzük, ha bármely $\Delta_s, \Delta_s, \ldots, \Delta_s, \ldots$ alakú sorozatnál e sémák értékeire fennáll a következő: vagy ugyanaz az első operátoruk, vagy mindkettő üres, vagy mindkettő üres periódusú.

[14] Itt és mindenütt, ahol ez nem vezet kétértelműséghez, a „φ függvény azonosan igaz" vagy $\varphi \equiv 1$ kifejezés helyett egyszerűen φ-t írunk.

Az ekvivalenciaprobléma megoldását a következő tétel adja.

1. TÉTEL. *Ahhoz, hogy* $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$ *és* $\mathfrak{B}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$[15] *sémák adott változáseloszlásnál* (1) *ekvivalensek legyenek, szükséges és elegendő, hogy stacionárius kibővítéseik gyengén ekvivalensek legyenek.*[16]

E tétel bizonyításához szükségünk lesz két lemmára.

1. 1. LEMMA. *Legyen az* $\mathfrak{A}$ *sémának — az* (1) *változáseloszlásnál megengedett —*

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots \tag{4}$$

értékrendszer-sorozatra kapott értéke:

$$A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_m} A_{i_{m+1}} \ldots . \tag{5}$$

Akkor minden $m(=1, 2, \ldots)$*-re érvényes az* $A^*_{i_m}(\Delta_{s_m}) = 1$ *egyenlőség, és következésképpen* $A^{**}_{i_m}(\Delta_{s_m}) = A^{**}_{i_m}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1$.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan $A^{\otimes}_{i_1}(\Delta_{s_1}) = 1$, és ezért

$$A^*_{i_1}(\Delta_{s_1}) = 1.$$

Tegyük fel, hogy $A^*_{i_m}(\Delta_{s_m}) = 1$, és következésképpen

$$A^{**}_{i_m}(\Delta_{s_m}) = A^{**}_{i_m}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1; \tag{6}$$

bizonyítjuk, hogy akkor a $A^*_{i_{m+1}}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1$ fönnáll. Valóban (6)-ból, a lemma feltételéből és séma végrehajtása eljárásának egyértelműségéből következik, hogy a $p_1, \ldots, p_k$ változók értékeit a $\Delta_{s_{m+1}}$ értékrendszernél véve és $q_{i_m} = 0$, $q_i = 1$ $(i \neq i_m)$ esetén az $\mathfrak{A}$ séma $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ stacionárius kibővítésében $A^{\otimes}_{i_{m+1}} = 1$, ezért (2)-t figyelembe véve:

$$A^{\otimes}_{i_{m+1}}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1,$$

amit bizonyítani kellett.

2. 1. LEMMA. *Legyen* A_i *tetszőleges operátor. Ha az* $\mathfrak{A}$ *sémában az adott változáseloszlásnál* $A^{**}_i(\Delta_s) = 1$, *akkor található olyan — az* $\mathfrak{A}$ *séma számára ennél a változáseloszlásnál megengedett — értékrendszer-sorozat, amelyre az* $\mathfrak{A}$ *sémában a* Δ_{s_t} *értékrendszernél az* A_i *operátor végrehajtása kerül.*

Bizonyítás. Az A^{**}_i függvények definíciója szerint, ha $A^{**}_i(\Delta_s) = 1$, akkor van olyan ν, hogy az $\mathfrak{A}$ séma ν-edik kibővítésében fennáll az $\alpha^{\nu}_i(\Delta_s) = 1$ egyenlőség. Ezért elegendő azon feltétel mellett igazolni állításunkat, hogy valamilyen ν természetes számra, $\alpha^{\nu}_i(\Delta_s)$ egyenlő 1-gyel. Ezt ν szerinti indukció segítségével bizonyítjuk. Ha $\alpha^1_i(\Delta_s) = 1$, akkor ez azt jelenti, hogy létezik egy $\Delta_{s'}$ értékrendszer, amely Δ_s-től csak $\mathfrak{Y}_i$-beli változók értékeiben különbözhet úgy, hogy $A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A})}(\Delta_{s'}) = 1$, azaz A_i végrehajtásra kerül az $\mathfrak{A}$ sémában

$$\Delta_{s'}, \Delta_{s'}, \ldots, \Delta_{s'}, \ldots \tag{7}$$

[15] Ilyen felírás nem jelenti azt, hogy az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémáknak ténylegesen tartalmazni kell az összes $A_1, \ldots, A_n$ operátort és $p_1, \ldots, p_k$ változót.

[16] Feltételezzük, hogy mindkét séma kibővítéséhez a $q_1, \ldots, q_n$ elemi logikai változóknak ugyanazt a halmazát használjuk fel.

sorozatnál. Akkor nyilvánvaló, hogy a keresett sorozat a

$$\underbrace{\Delta_{s'}, \Delta_{s'}, \ldots, \Delta_{s'}}_{N+1\text{-szer}}, \Delta_s, \Delta_s, \ldots$$

sorozat lesz, ahol N azon operátorok száma, amelyek megelőzik az A_i operátor valamilyen előfordulását az $\mathfrak{A}$ séma — (7) sorozatra kapott — értékében. Tegyük fel, hogy a lemma állítása igaz, ha $\alpha_i^\nu(\Delta_s)=1$, és bizonyítjuk

$$\alpha_i^{\nu+1}(\Delta_s) = 1 \tag{8}$$

esetére. A (8) feltétel azt jelenti, hogy találhatók a $p_1, \ldots, p_k$ és $q_1, \ldots, q_n$ változóknak olyan $\Delta_{s'}$ és Δ' értékrendszerei, hogy

$$A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A}^{(\nu)})}(\Delta_{s'}, \Delta') = 1, \tag{9}$$

emellett $\Delta_{s'}$ értékrendszer a Δ_s-től csak $\mathfrak{Y}_i$-beli változók értékeiben különbözhet.

Két eset lehetséges:

1. A $q_h \vee \overline{\alpha_h^\nu}$ $(h=1, 2, \ldots, n)$ függvények a $\Delta_{s'}, \Delta'$ értékrendszernél 1-gyel egyenlők. Akkor az $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ séma értéke a $\Delta_{s_n'}, \Delta'$ értékrendszernél egybeesik az $\mathfrak{A}$ sémának a $\Delta_{s'}$-nél vett értékével, és így (9) miatt $A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A})}(\Delta_{s'})=1$, azaz az indukció első lépésében tisztázott eset áll fenn.

2. Nem minden $q_h \vee \overline{\alpha_h^\nu}$ függvény egyenlő 1-gyel a $\Delta_{s'}, \Delta'$ értékrendszernél. Legyen $q_l \vee \overline{\alpha_h^\nu} \llcorner_{j_l}$ az $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ séma legbaloldalibb olyan logikai feltétele, melyre $q_l(\Delta') \vee \overline{\alpha_l^\nu}(\Delta_{s'})=0$. Ebből két dolog következik: Először, $\alpha_l^\nu(\Delta_{s'})=1$, és akkor az indukció feltétele szerint található olyan $\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_r}, \Delta_{s'}, \Delta_{s'}, \ldots$ megengedett sorozat, melyre az $\mathfrak{A}$ sémában Δ_{s_r} értékrendszernél az A_l operátor végrehajtásra kerül. Másodszor, (9) miatt ugyanerre a sorozatra $\Delta_{s'}$ értékrendszer valamely előfordulásánál A_i operátor végrehajtásra kerül. Teljesüljön ez a $\Delta_{s'}$ értékrendszer Δ_{s_r} utáni N-edik előfordulásánál. Akkor, mivel Δ_s a $\Delta_{s'}$-től csak $\mathfrak{Y}_i$-beli változók értékeiben különbözik, a

$$\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_r}, \underbrace{\Delta_{s'}, \Delta_{s'}, \ldots, \Delta_{s'}}_{N\text{-szer}}, \Delta_s, \Delta_s, \ldots$$

sorozat lesz a keresett megengedett sorozat. A lemmát így bizonyítottuk.

Az 1. Tétel bizonyítása.

Szükségesség. Legyen az (1) változáseloszlásnál

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}. \tag{10}$$

Kimutatjuk, hogy akkor $A^{**}_{i(\mathfrak{A})} \equiv A^{**}_{i(\mathfrak{B})}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Valóban, ha valamely Δ_s értékrendszerre fennáll, hogy $A^{**}_{i(\mathfrak{A})}(\Delta_s)=1$, akkor a 2. 1. lemma miatt található olyan, az $\mathfrak{A}$ séma számára megengedett $\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_t}, \Delta_s, \ldots$ sorozat, hogy Δ_{s_t} értékrendszernél A_i operátor végrehajtásra kerül. (10) alapján ennek a sorozatnak megvannak ugyanezek a sajátságai a $\mathfrak{B}$ sémára vonatkozóan is. Akkor az 1. 1. lemma értelmében $A^{**}_{i(\mathfrak{B})}(\Delta_s)=1$, ezért $A^{**}_{i(\mathfrak{A})} \to A^{**}_{i(\mathfrak{B})}$. Ebben a meggondolásban $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémát felcserélve kapjuk, hogy $A^{**}_{i(\mathfrak{B})} \to A^{**}_{i(\mathfrak{A})}$, azaz $A^{**}_{i(\mathfrak{A})} \equiv A^{**}_{i(\mathfrak{B})}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Világos, hogy akkor (3^1) és (10) figyelembevételével $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémák stacionárius kibővítései ekvivalensek adott változáseloszlásnál, és ebből következik, hogy még inkább gyengén ekvivalensek.

Elégségesség. Legyenek az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ séma $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ és $\mathfrak{B}^{(\mu')}$ stacionárius kibővítései (1) változáseloszlásnál gyengén ekvivalensek, és legyen valamilyen

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots$$

értékrendszer-sorozat például az $\mathfrak{A}$ sémára megengedett, az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémák értékei pedig

$$A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, \ldots \tag{11}$$

és

$$A_{i'_1}, A_{i'_2}, \ldots, A_{i'_m}, A_{i'_{m+1}}, \ldots. \tag{12}$$

Kimutatjuk, hogy ezek az értékek egybeesnek. Nyilvánvaló, hogy $i_1 = i'_1$, mivel $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ és $\mathfrak{B}^{(\mu')}$ sémák gyenge ekvivalenciájából az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémák gyenge ekvivalenciája következik.[17]

Tegyük fel, hogy

$$i_l = i'_l \quad (l \leqq m), \tag{13}$$

és kimutatjuk, hogy akkor $i_{m+1} = i'_{m+1}$. Valóban, 1. 1. lemma szerint az $\mathfrak{A}$ séma számára

$$A^{**}_{i_m(\mathfrak{A})}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1. \tag{14}$$

Ezenkívül a (13) feltevésből következik, hogy a

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots$$

sorozat megengedett a $\mathfrak{B}$ séma számára. Akkor az 1. 1. lemma alapján

$$A^{**}_{i_m(\mathfrak{B})}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1. \tag{15}$$

Jelöljük Δ-val a $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_n$ változók értékei következő rendszerét: $p_1, \ldots, p_k$-nak adjuk $\Delta_{s_{m+1}}$ értékeit, továbbá legyen $q_{i_m} = 0$ és $q_i = 1$ $(i \neq i_m)$. (11)-et és (15)-öt figyelembe véve, az $A_{i_{m+1}}$ és $A'_{i_{m+1}}$ operátorok az $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ és $\mathfrak{B}^{(\mu')}$ sémák — $\Delta, \Delta, \ldots, \Delta, \ldots$ sorozatnál vett — értékeinek első operátorai. De mivel $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ és $\mathfrak{B}^{(\mu')}$ sémák gyengén ekvivalensek, ezek az operátorok egybeesnek, azaz $i_{m+1} = i'_{m+1}$.

Ugyanezekből a meggondolásokból következik, hogy ha (11) érték üres periódust tartalmaz, akkor (12) érték szintén üres periódust tartalmaz.

A tételt ezzel bebizonyítottuk.

Megjegyezzük az 1. tétel következő nyilvánvaló módosítását.

1'. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{A}$ *és* $\mathfrak{B}$ *sémák valamilyen* (1) *változáseloszlásnál ekvivalensek legyenek, szükséges és elegendő, hogy stacionárius kibővítéseik üres változáseloszlásnál ekvivalensek legyenek.*

Megjegyezzük, hogy üres változáseloszlásnál minden sémának csak véges számú (2^k) véges vagy periodikus értéke van, ezért a sémák ekvivalenciájának problé-

[17] Innen, speciálisan, következik az is, hogy ha (11) érték üres periódusú vagy üres, akkor a (12) érték is üres periódusú vagy megfelelően üres.

mája üres változáseloszlásnál mindig megoldható értékeik közvetlen összehasonlításával.

Megjegyezzük, hogy univerzális változáseloszlásnál az összes A_i^{**} függvény azonosan a 0 vagy 1 konstanssal egyenlő.

3. A parciális ekvivalencia problémájának megoldása

Először bebizonyítjuk a következő állítást:

3. 1. LEMMA. *Ha az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$ sémára $A_i - \mathfrak{Y}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ változáseloszlásnál fennáll $A_i^* (\Delta_s) = 1$, akkor található olyan*

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_s, \ldots$$

megengedett sorozat, hogy a Δ_s értékrendszernél az A_i operátor végrehajtásra kerül.

Valóban, mivel $A_i^* = \max\limits_{q_1, \ldots, q_n} A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A}^{(\mu)})}$ (ahol $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ az $\mathfrak{A}$ séma stacionárius kibővítése), ezért található a $q_1, \ldots, q_n$ változók értékeinek olyan Δ' rendszere, hogy

$$A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A}^{(\mu)})}(\Delta_s, \Delta') = 1. \tag{1}$$

Ha Δ' olyan, hogy minden $q_i \vee \overline{A_i^{**}} (\Delta_s) = 1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, akkor nyilvánvalóan a keresett sorozat:

$$\Delta_s, \Delta_s, \ldots, \Delta_s, \ldots .$$

Ellenkező esetben legyen $q_l \vee \overline{A_l^{**}} \underset{j_l}{\llcorner}$ az $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ séma legbalodalibb olyan logikai feltétele, hogy

$$q_l(\Delta') \vee \overline{A_l^{**}}(\Delta_s) = 0. \tag{2}$$

Ez azt jelenti, hogy $A_l^{**} (\Delta_s) = 1$, és akkor a 2. 1. lemma értelmében létezik olyan $\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_t}, \Delta_s, \ldots$ megengedett sorozat, hogy Δ_{s_t} értékrendszernél az A_l operátor végrehajtásra kerül. De akkor (2) és (1) miatt a $\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_t}, \Delta_s, \Delta_s, \ldots$ megengedett sorozatra Δ_s értékrendszer valamely előfordulásánál A_i operátor végrehajtásra kerül, amit bizonyítani kellett.

A felírások egyértelműsége kedvéért jelen pontban minden sémához hozzáírunk balra és jobbra tőlük bizonyos lerögzített operátorokat (például üreseket, amelyeket A_0-val és A_ω-val jelölünk, azaz feltételezzük, hogy minden séma ilyen alakú:

$$A_0 \mathfrak{A} A_\omega .$$

Emellett minden változáseloszlást kiegészítünk az $A_0 - 0$, $A_\omega - 0$ megfeleltetésekkel, ahol 0 a logikai változók üres halmaza. Világos, hogy $i=1, 2, \ldots, n$ esetén

$$A^*_{i(\mathfrak{A})} \equiv A^*_{i(A_0 \mathfrak{A} A_\omega)} .$$

Alábbiakban leírunk egy eljárást, amely lehetővé teszi, hogy bármely $\mathfrak{A}$ sémához felépítsünk bizonyos speciális $\tilde{\mathfrak{A}}$ sémát úgy, hogy $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémák parciális ekvivalenciájának problémája az $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ sémák gyenge ekvivalenciájának problémájához vezessen.

01. 14. Tekintsük az $A_0\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)A_\omega$ sémát és A_i—$\mathfrak{Y}_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n, \omega)$ változáseloszlást, ahol $\mathfrak{Y}_0$ és $\mathfrak{Y}_\omega$ üres halmazok.

Bevezetjük minden $i(=0, 1, \ldots, n)$-re a következő jelölést:

$$\hat{\mathfrak{A}}_i \equiv \overline{A^{**}_{i(A_0\mathfrak{A}A_\omega)}} \underset{s}{\llcorner} 0 \underset{t}{\llcorner} A_0\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_i \underset{s}{\lrcorner}, \ldots, A_n)A_\omega \underset{t}{\lrcorner};$$

speciálisan,

$$\hat{\mathfrak{A}}_0 \equiv 0 \underset{s}{\llcorner} 0 \underset{t}{\llcorner} A_0 \underset{s}{\lrcorner} \mathfrak{A} A_\omega \underset{t}{\lrcorner}.$$

Jelölje $\Gamma_{\mathfrak{Y}}(\alpha, \beta)$ a maximális olyan γ függvényt, amelyre $\gamma \leqq \alpha$ és $\max_{\mathfrak{Y}} \gamma \leqq \beta$, ahol $\mathfrak{Y}$ a logikai változók valamilyen halmaza, és a maximumot a $\mathfrak{Y}$-beli változók értékei összes lehetséges értékrendszerein kell venni. Világos, hogy $\Gamma_{\mathfrak{Y}}(\alpha, \beta)$ létezik bármely α, β függvénypárra.

01. 15. Jelöljük ω-t $n+1$-gyel és tekintsük a függvények következő rendszerét, amely $i=0, 1, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n+1$ esetén definiált.

$$\beta^0_{ij} = A^{\otimes}_{j(\hat{\mathfrak{A}}_i)}, \quad \gamma^0_{ij}\Gamma_{\mathfrak{Y}_i}(A^*_{i(A_0\mathfrak{A})}, \beta^0_{ij}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta^{\nu+1}_{ij} = \beta^\nu_{ij} \vee \bigvee_{m=0}^{n} \beta^\nu_{im}\gamma^\nu_{mj}; \quad \gamma^{\nu+1}_{ij} = \Gamma_{\mathfrak{Y}_i}(A^*_{i(A_0\mathfrak{A})}, \beta^{\nu+1}_{ij}).$$

Mivel bármely $i=0, 1, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n+1$ és $\nu=0, 1, \ldots$ esetén nyilvánvalóan $\beta^\nu_{ij} \leqq \beta^{\nu+1}_{ij}$, ezért található olyan λ természetes szám, hogy minden i, j $(0 \leqq i \leqq n$; $1 \leqq j \leqq n+1)$ párra: $\beta^{\lambda+1}_{ij} \equiv \beta^\lambda_{ij}$.

Bevezetjük a következő jelöléseket: $\beta_i = \beta^\lambda_{i,n+1}$ és

$$\tilde{\mathfrak{A}} \equiv \bar{\beta}_0 \vee q_0 \underset{j_0}{\llcorner} \ldots \bar{\beta}_n \vee q_n \underset{j_n}{\llcorner} \underset{t}{\lrcorner} 0 \underset{t}{\llcorner} A_0 \underset{j_0}{\lrcorner} \mathfrak{A}(p_1, \ldots p_k, A_1 \underset{j_1}{\lrcorner}, \ldots, A_n \underset{j_n}{\lrcorner})A_{n+1}.$$

Érvényes a következő tétel:

2. Tétel. *Az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$ és $\mathfrak{B}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$ sémák akkor és csakis akkor parciálisan ekvivalensek, ha $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ sémák gyengén ekvivalensek.*

E tétel bizonyítása világossá válik, ha megvizsgáljuk a β_i függvények jelentését.

01. 16. Az

(3) $$A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, A_{i_{m+2}}, \ldots$$

sorozat A_{i_m} *elemet követő maradékának* nevezzük az $A_{i_{m+1}}, A_{i_{m+2}}, \ldots$ sorozatot, amelyet (3)-ból az $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ szelet elhagyásával nyerünk.

Az 1. 1. és 2. 1. lemmák miatt nyilvánvaló, hogy az $\hat{\mathfrak{A}}_i(0 \leqq i \leqq n)$ sémák minden (nem üres) megengedett értéke az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma megengedett értékének az A_i operátort követő maradéka, és fordítva, az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma megengedett értékének minden — az A_i operátort követő — maradéka az $\hat{\mathfrak{A}}_i$ sémák megengedett értéke. Akkor nyilvánvalóan β^0_{ij} maximális a következő tulajdonsággal rendelkező függvények közül: ha az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ sémában valamely

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_{m-1}}, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_m}, \ldots, \Delta_{s_m}, \ldots$$

megengedett sorozatra a $\Delta_{s_{m-1}}$ értékrendszernél A_i operátor végrehajtásra kerül és $\beta_{ij}^0(\Delta_{s_m})=1$, akkor az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma értékének A_i-t követő maradéka tartalmazza az A_j operátort.

Más szóval β_{ij}^0 a maximális olyan függvény, hogy ha A_i operátorral kezdjük az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma végrehajtását a β_{ij}^0-t 1-re változtató értékrendszernél, akkor — az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma végrehajtása közben a logikai változók értékeit nem változtatva — szükségszerűen végrehajtjuk az A_j operátort. A 3. 1. lemma miatt γ_{ij}^0 maximális a következő feltételt kielégítő függvények közül: ha $\gamma_{ij}^0(\Delta_{s_m})=1$, akkor létezik az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ sémára megengedett olyan

$$\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots$$

értékrendszer-sorozat, hogy a Δ_{s_m} értékrendszernél végrehajtásra kerül az A_i operátor, és az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma értékének A_i ezen előfordulását követő maradéka tartalmazza az A_j operátort. Ebből következik, hogy bármely:

$$\Delta_{r_1}, \Delta_{r_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots$$

megengedett sorozatra fennáll, hogy ha $\gamma_{ij}^0(\Delta_{s_m})=1$ és a Δ_{s_m} értékrendszernél az A_i operátor vágrehajtásra kerül, akkor a $\Delta_{s_{m+1}}$ értékrendszer valamely előfordulásánál az A_j operátor is végrehajtásra kerül.

Hasonlóan látható, hogy β_{ij}^1 a maximális azon függvények közül, amelyekre az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma minden megengedett végrehajtásánál fennáll a következő: ha közvetlenül az A_i operátor végrehajtása után a $p_1, \ldots, p_k$ változók a β_{ij}^1-et 1-re változtató értékeket kaptak, akkor mindig van olyan megengedett folytatása az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma végrehajtása ezen eljárásának, amelynél a logikai változók értékei legfeljebb egyszer változnak meg és az A_j operátor végrehajtásra kerül.

Ezeket a meggondolásokat folytatva, azt kapjuk, hogy β_{ij}^ν maximális a következő feltételnek eleget tevő függvények közül: az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma minden megengedett végrehajtásánál fennáll, hogy ha az A_i operátor végrehajtása után a $p_1, \ldots, p_k$ változók a β_{ij}^ν-t 1-re változtató értékek rendszerét kapják, akkor ezen eljárásnak van olyan megengedett folytatása, amelynél a logikai változók értékei legfeljebb ν-ször változnak meg, és az A_j operátor végrehajtásra kerül. Következésképpen, a β_{ij}^λ függvények ($\beta_{ij}^{\lambda+1}$-gyel ekvivalensek minden $i(=0, 1, \ldots, n)$-re és $j(=1, 2, \ldots, n+1)$-re) maximálisak a következő tulajdonságú függvények között: az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma bármely megengedett végrehajtásának eljárásánál, ha az A_i operátor végrehajtása után a $p_1, \ldots, p_k$ változók egyszerre veszik fel értékek olyan rendszerét, amely a β_{ij}^λ függvényt 1-re változtatja, akkor van ennek az eljárásnak olyan megengedett folytatása, amelynél az A_j operátor végrehajtásra kerül. Az a tény, hogy a β_{ij}^ν-k maximálisak az említett tulajdonságú függvények között, azt jelenti, hogy a $p_1, \ldots, p_k$ értékeinek *minden* olyan rendszere, amely a felsorolt követelményeknek eleget tesz, a $\beta_{ij}^\nu(p_1, \ldots, p_k)$ függvényeket 1-re változtatja. A β $(i=0, 1, \ldots, n)$ függvények definíció szerint annak az esetnek felelnek meg, amikor $j=n+1$, és meghatározott értelemben jellemzik az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma értékeit, mivel ilyen séma értéke akkor és csak akkor véges, ha az A_{n+1} operátort tartalmazza.

Most bebizonyítjuk a 2. tételt.

Szükségesség. Legyen $\mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_n) \cong \mathfrak{B}(A_1, \ldots, A_n)$. A β_i függvényekről megállapítottak szerint ez azt jelenti, hogy $\beta_{i(\mathfrak{A})} \equiv \beta_{i(\mathfrak{B})}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$. Ezért az $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ sémák parciálisan ekvivalensek. Továbbá, bármely $(\Delta', \Delta_s), (\Delta', \Delta_s), \ldots$ $\ldots, (\Delta', \Delta_s), \ldots$ értékrendszer-sorozatra (ahol Δ' a $q_0, q_1, \ldots, q_n$ értékeinek rendszere, Δ_s a $p_1, \ldots, p_k$ értékeinek rendszere), amelyre $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ séma értéke nem üres periódusú, található olyan i, hogy $\beta_i(\Delta_s) = 1$, és így létezik olyan — (Δ', Δ_s)-sel kezdődő — megengedett sorozat, amelyre $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ sémák azonos véges értékűek. De mivel $\tilde{\mathfrak{A}} \cong \tilde{\mathfrak{B}}$, ez azt jelenti, hogy $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ sémák gyengén ekvivalensek.

Elégségesség. Tegyük fel, hogy $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ gyengén ekvivalensek. Kimutatjuk, hogy akkor $\beta_{i(\mathfrak{A})} \equiv \beta_{i(\mathfrak{B})}$. Valóban, ha $\beta_{i(\mathfrak{A})}(\Delta_s) = 0$, $\beta_{i(\mathfrak{B})}(\Delta_s) = 1$, akkor a (Δ', Δ_s), $(\Delta', \Delta_s), \ldots$ értékrendszer-sorozatra — ahol Δ' a $q_0, \ldots, q_n$ változók értékeinek olyan rendszerét jelenti, amelyben $q_i = 0$ és $q_j = 1$ $(j \neq i)$ —, $\tilde{\mathfrak{A}}$ séma értéke üres (üres periódusú), a $\tilde{\mathfrak{B}}$ sémáé pedig nem. (Mivel abból, hogy $\beta_{i(\mathfrak{B})}(\Delta_s) = 1$ következik olyan — az $A_0\mathfrak{B}A_{n+1}$-re megengedett — $\Delta_{r_1}, \ldots, \Delta_s, \Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots$ sorozat létezése, amelyre az $A_0\mathfrak{B}A_{n+1}$ séma értéke az A_{n+1} operátort tartalmazza.) Ezért, ha $\beta_{i(\mathfrak{A})}(\Delta_s) = 0$, akkor $\beta_{i(\mathfrak{B})}(\Delta_s) = 0$, azaz $\beta_{i(\mathfrak{B})} \to \beta_{i(\mathfrak{A})}$. Mivel ebben a meggondolásban az $\mathfrak{A}$ és a $\mathfrak{B}$ séma ekvivalens, így

$$\beta_{i(\mathfrak{A})} \to \beta_{i(\mathfrak{B})}, \quad \text{azaz} \quad \beta_{i(\mathfrak{A})} \equiv \beta_{i(\mathfrak{B})} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Legyen most valamely megengedett

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots$$

értékrendszer-sorozatra

$$A_0, A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, \ldots, A_{n+1}$$

az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma véges értéke. Továbbá legyen ugyanerre a sorozatra

$$A_0, A_{i'_1}, A_{i'_2}, \ldots, A_{i'_m}, A_{i'_{m+1}}, \ldots$$

az $A_0\mathfrak{B}A_{n+1}$ séma értéke. Tegyük fel, hogy $i_l = i'_l$ $(l \leqq m)$, és kimutatjuk, hogy akkor $i_{m+1} = i'_{m+1}$. Valóban, a β_i függvényekről megállapítottak szerint $\beta_{i_m}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1$. De akkor az $A_{i_{m+1}}$ és $A_{i'_{m+1}}$ operátorok az $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ sémák értékeinek első operátorai a

$$(\Delta', \Delta_{s_{m+1}}), (\Delta', \Delta_{s_{m+1}}), \ldots$$

értékrendszer-sorozatra, ahol Δ' a $q_0, \ldots, q_n$ értékeinek olyan rendszere, amelyben $q_{i_m} = 0$ és $(j \neq i_m)$-re $q_j = 1$. $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ sémák gyengén ekvivalens volta miatt ezeknek az operátoroknak egybe kell esniök, azaz $i_{m+1} = i'_{m+1}$, amit bizonyítani kellett.

2. §. Algoritmusok logikai sémáinak átalakításai

1. Elemi kifejezés logikai függvénynek való alárendeltsége

Ebben a paragrafusban olyan kalkulust építünk fel, amelyben az összes $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ alakú igaz állítások megkaphatók (adott változáseloszlásnál), ahol $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémák. Ehhez szükségünk van az elemi kifejezés logikai függvénynek való alárendeltsége fogalmára.

02. 1. Kiterjesztjük tetszőleges elemi kifejezésekre az A_i függvényeknek a 01. 12-ben operátorokra adott definícióját. Tekintsük a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezést és az $\mathfrak{A}(p_1, ..., p_k, A_1, ..., A_n)$ sémát $A_i - \mathfrak{Y}_i$ (1) változáseloszlásnál. Bevezetjük a következő jelölést:

$$\mathfrak{B}^* = \max_{q_1, ..., q_n} \mathfrak{B}^{\otimes}_{(\mathfrak{B})^{(\mu)}},$$

ahol $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ az $\mathfrak{A}$ séma stacionárius kibővítése az (1) változáseloszlásnál (l. 94. old.). Nyilvánvalóan üres változáseloszlásnál $\mathfrak{B}^* \equiv \mathfrak{B}^{\otimes}$.

02. 2. Akkor mondjuk, hogy az $\mathfrak{A}(p_1, ..., p_k)$ sémában $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés az $\alpha(p_1, ..., p_k)$ függvénynek alá van rendelve adott változáseloszlásnál, és ezt $\mathfrak{B} \prec \alpha$-val jelöljük, ha ennél a változáseloszlásnál

$$\mathfrak{B}^* \to \alpha.$$

Az alárendeltség fogalmának jelentése a következő. Ha

$$\mathfrak{B} \prec \alpha(p_1, ..., p_k),$$

akkor $p_1, ..., p_k$ értékeinek az α-t 0-ra változtató rendszerénél $\mathfrak{B}$ semmilyen megengedett sorozatra nem hajtható végre. Ha $\mathfrak{B}$ operátor, akkor ez az állítás az 1. §. 1. 1. lemmából közvetlenül következik. Abban az esetben, ha a $\mathfrak{B}$ logikai feltétel, akkor szükséges az 1. 1. lemmát úgy élesíteni, hogy az $\mathfrak{A}$ séma értékei helyett az összes végrehajtott elemi kifejezések sorozatát tekintjük. Akkor a Δ_{s_m} értékrendszernél $\mathfrak{B}_{i_m 1}, \mathfrak{B}_{i_m 2}, ..., \mathfrak{B}_{i_m j_m}$ elemi kifejezések valamely halmaza kerül végrehajtásra, amelyek közül a legutolsó az A_{i_m}. Azzal analóg módon, ahogy ezt az 1. §. 1. 1. lemmában tettük, bebizonyítható, hogy

$$\mathfrak{B}^*_{i_m j}(\Delta_{s_m}) = 1 \qquad (j = 1, 2, ..., j_m)$$

minden $m(=1, 2, ...)$-re, ahonnan állításunk már következik.

Nyilvánvaló, hogy a stacionárius kibővítések — és következőképpen a $\mathfrak{B}^*$ függvények — felépítéséhez tetszőleges változáseloszlásnál elegendő csak a $\mathfrak{B}^{\otimes}$ függvények ismerete (azaz üres változáseloszlásnál $\mathfrak{B}^*$ függvények ismerete), amelyeket mindig véges eljárással kaphatunk meg. Ebből következik, hogy az alárendeltségnek fentebb adott definíciója effektív.

A továbbiakban (2. pont) ekvivalenciák olyan rendszereit vezetjük be, amelyek megoldásai a $\mathfrak{B}^*$ függvények és amelyek biztosítják, hogy e függvényeket megkapjuk anélkül, hogy a stacionárius kibővítések felépítéséhez folyamodnánk. Ezenkívül nagyon gyakran — a definiált feltételek értelmében — adott változáseloszlásnál vett alárendeltség egybeesik az üres változáseloszlásnál vett alárendeltséggel, ezért az üres változáseloszlás esetére az 5. pontban úgy definiáljuk az alárendeltség fogalmát, hogy a séma topológiai felépítéséből indulunk ki, nem támaszkodva a séma értékének fogalmára.

Gyakorlatilag nem szükséges a $\mathfrak{B}^*$ függvények ismerete azon függvények meghatározásához, amelyeknek alá van rendelve valamely elemi kifejezés. Mint ismeretes, a tartalmi meggondolások felhasználása lehetővé teszi, hogy viszonylag könnyen találjunk olyan értékrendszereket, amelyeknél az adott elemi kifejezés nem hajtható végre semmiféle megengedett sorozatra, és akkor minden olyan függvény, amely ilyen értékrendszerek tetszőleges részhalmazán 0-val egyenlő, olyan függvény lesz, amelynek az adott elemi kifejezés alá van rendelve. Vizsgáljunk meg néhány példát. Megállapodunk abban, hogy valamely i indexű jobb félzárójelre azt mondjuk, hogy ahhoz a logikai feltételhez *hozzátartozik*, amelynek bal félzárójele ugyanolyan i indexű.

1. Az $\ldots\alpha\underset{i}{\llcorner}\mathfrak{B}\ldots$ alakú sémában nyilvánvalóan a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés az α függvénynek alá van rendelve tetszőleges változáseloszlásnál, emellett, ha $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ logikai feltétel alá van rendelve β függvénynek, akkor $\mathfrak{B}$ alá van rendelve $\alpha\cdot\beta$ függvénynek.

2. Az $\ldots\alpha\underset{i}{\llcorner}\underset{j_1}{\lrcorner}\underset{j_2}{\lrcorner}\ldots\underset{j_s}{\lrcorner}\mathfrak{B}\ldots$ alakú sémában, ahol a $\underset{j_1}{\lrcorner},\ldots,\underset{j_s}{\lrcorner}$ jobb félzárójelek hozzátartoznak a $\beta_1\underset{j_1}{\llcorner},\ldots,\beta_s\underset{j_s}{\llcorner}$ logikai feltételekhez, a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés nyilvánvalóan bármely változáseloszlásnál alá van rendelve $\alpha\vee\bar{\beta}_1\vee\ldots\vee\bar{\beta}_s$ függvénynek. Emellett, ha

$$\beta_l\underset{j_l}{\llcorner}\prec\gamma_l \qquad (l=1,2,\ldots,s),$$

akkor $\mathfrak{B}\prec\alpha\vee\gamma_1\bar{\beta}_1\vee\ldots\vee\gamma_s\cdot\bar{\beta}_s$.

3. Az $\ldots\alpha\underset{i}{\llcorner}A_j\mathfrak{B}\ldots$ alakú sémában $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés nyilvánvalóan alá van rendelve a $\max\limits_{\mathfrak{Y}_j}\alpha$ függvénynek az $A_j-\mathfrak{Y}_j$ változáseloszlásnál, mivel $A_j\prec\alpha$.

02. 3. *Kifejezésnek* nevezünk minden olyan véges sorozatot, amely operátorok szimbólumaiból, logikai feltételekből és jobb félzárójelekből áll úgy, hogy minden benne előforduló i természetes számra legfeljebb egy i indexű bal és jobb félzárójel van.

A kifejezéseket tartalmilag sémák részeinek kell tekintenünk.

Továbbiakban beszélni fogunk logikai függvényeknek alárendelt elemi kifejezésekről adott *kifejezésben* is, ezen az adott kifejezést tartalmazó minden sémában való alárendeltséget értve. Ez a fogalom nem annyira effektív, mint az alárendeltség fogalma sémában, mivel minden kifejezéshez lehet találni olyan sémát, amely azt tartalmazza, és ebben a sémában vett alárendeltség ekvivalens a tekintett kifejezésben vett alárendeltséggel.

2. Ekvivalenciák rendszerei a $\mathfrak{B}^*$ függvényekre

Jelen pontban olyan összefüggéseket vizsgálunk, amelyeket könnyen megkaphatunk a séma külső alakjából, és amelyek az esetek többségében lehetővé teszik a séma összes elemi kifejezéseire a $\mathfrak{B}^*$ függvények megtalálását.

02. 4. Legyen valamely $\mathfrak{A}$ kifejezés $\mathfrak{A}_l\mathfrak{B}\mathfrak{L}\mathfrak{J}\mathfrak{A}_2$ alakú, ahol $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$ és $\mathfrak{J}$ kifejezések. Akkor a $\mathfrak{B}\mathfrak{L}\mathfrak{J}$ kifejezést az $\mathfrak{A}$ kifejezés $[\mathfrak{B}\mathfrak{J}]$ *zárt intervallumának*, a $\mathfrak{L}$ kifejezést $(\mathfrak{B}, \mathfrak{J})$ *nyitott intervallumának* nevezzük.

02. 5. Valamely kifejezésben $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ logikai feltételt *egyenesnek* nevezünk, ha $\underset{i}{\lrcorner}$ jobb félzárójele ebben a kifejezésben a bal félzárójeltől jobbra áll, és *fordítottnak*, ha jobb félzárójele a bal félzárójeltől balra áll.

02. 6. Az $\mathfrak{A}(\alpha\underset{i}{\llcorner})$ kifejezésben $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ egyenes logikai feltétel *hatástartományának* az $(\alpha\underset{i}{\llcorner},\underset{i}{\lrcorner})$ intervallumot nevezzük. Az $\mathfrak{A}$ kifejezésben $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ fordított logikai feltétel hatástartományának az $\mathfrak{A}$ kifejezés azon részeit nevezzük, amelyek az $\underset{i}{\llcorner}$ bal fél-

zárójeltől jobbra és az $\underset{i}{\lrcorner}$, ezen logikai feltételhez tartozó, jobb félzárójeltől balra találhatók.

Az $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ logikai feltétel hatástartományát $\sigma(\alpha\underset{i}{\llcorner})$-val jelöljük.

Az $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ logikai feltétel hatástartományának a bal félzárójeltől jobbra fekvő részét $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ hatástartománya egyenes részének nevezzük, és $\sigma^{+}(\alpha\underset{i}{\llcorner})$-vel jelöljük.

Abban az esetben, ha $\mathfrak{A}(\alpha\underset{i}{\llcorner})$ kifejezés nem tartalmazza az $\underset{i}{\lrcorner}$ jobb félzárójelet, úgy tekintjük, hogy $\sigma^{+}(\alpha\underset{i}{\llcorner})$ egybeesik az $\mathfrak{A}$ kifejezésnek az $\underset{i}{\llcorner}$ bal félzárójeltől jobbra eső részével.

Nyilvánvaló, hogy minden kifejezésben bármely logikai feltétel hatástartományának egyenes része kifejezés.

02. 7. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{A}$ sémában $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ logikai feltétel a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezést *átfogja*, ha $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ a legjobboldalibb az $\mathfrak{A}$ séma azon logikai feltételei közül, amelyek $\mathfrak{B}$-t hatástartományuk egyenes részében tartalmazzák.

02. 8. A $\gamma\underset{k}{\llcorner}$ logikai feltételt az $\mathfrak{A}$ sémában $\mathfrak{B}$ elemi kifejezéshez *vezetőnek* nevezzük, ha az $\mathfrak{A}$-ban van olyan $\mathfrak{B}$-t átfogó $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ logikai feltétel, hogy

$$\gamma\underset{k}{\llcorner}\,\overline{\in}\,(\alpha\underset{i}{\llcorner},\mathfrak{B}) \quad \text{és} \quad \underset{k}{\lrcorner}\in(\alpha\underset{i}{\llcorner},\mathfrak{B}).$$

Vizsgáljuk először a $\mathfrak{B}^{*}$ függvények előállításának módszereit üres változáseloszlásnál, azaz amikor a függvények egybeesnek $\mathfrak{B}^{\otimes}$ függvényekkel.

Valamely $\mathfrak{A}(p_1, \dots p_k)$ sémában $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ logikai feltétel legyen $\mathfrak{B}$ elemi kifejezést átfogó, és az összes, $\mathfrak{A}$-ban $\mathfrak{B}$-hez vezető logikai feltétel: $\gamma_1\underset{k_1}{\llcorner}, \dots, \gamma_l\underset{k_l}{\llcorner}$. Akkor nyilvánvaló, hogy:

$$\mathfrak{B}^{\otimes}_{(\mathfrak{A})} \equiv \alpha\cdot(\alpha\underset{i}{\llcorner})^{\otimes} \vee \bar{\gamma}_1\cdot(\gamma_1\underset{k_1}{\llcorner})^{\otimes} \vee \dots \vee \bar{\gamma}_l\cdot(\gamma_l\underset{k_l}{\llcorner})^{\otimes}. \tag{1}$$

Valóban, az $\mathfrak{A}$ séma végrehajtásánál — $\Delta_s, \Delta_s, \dots$ stacionárius értékrendszersorozatra — $\mathfrak{B}$-hez eljuthatunk: vagy $\alpha\underset{i}{\llcorner}$-t végrehajtva $\alpha(\Delta_s)=1$ feltétel mellett, vagy $\gamma_j\underset{k_j}{\llcorner}$ $(1\leqq j\leqq l)$-k közül valamelyiket végrehajtva $\gamma_j(\Delta_s)=0$ feltételnél, azaz

$$\mathfrak{B}^{\otimes} \to \alpha\cdot(\alpha\underset{i}{\llcorner})^{\otimes} \vee \bar{\gamma}_1\cdot(\gamma_1\underset{k_1}{\llcorner})^{\otimes} \vee \dots \vee \bar{\gamma}_l\cdot(\gamma_l\underset{k_l}{\llcorner})^{\otimes}.$$

Fordítva, legyen Δ_s értékrendszernél az (1) ekvivalencia jobb oldala 1-gyel egyenlő. Ez azt jelenti, hogy vagy $\alpha(\Delta_s)=1$ és $(\alpha\underset{i}{\llcorner})^{\otimes}_{\Delta_s}=1$, vagy van olyan $j(1\leqq j\leqq l)$, hogy $\gamma_j(\Delta_s)=0$ és $(\gamma_j\underset{k_j}{\llcorner})^{\otimes}_{\Delta_s}=1$. Nyilvánvaló, hogy akkor a $\Delta_s, \Delta_s, \dots$ sorozatra a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés a $\mathfrak{B}$ sémában végrehajtásra kerül, azaz $\mathfrak{B}^{\otimes}(\Delta_s)=1$.

Ha nincs $\mathfrak{B}$-t átfogó logikai feltétel, azaz nem tartozik valamely hatástartomány egyenes részébe, akkor nyilvánvalóan

$$\mathfrak{B}^{\otimes}_{(\mathfrak{A})} \equiv 1. \tag{2}$$

Ily módon, ha az $\mathfrak{A}$ séma minden elemi kifejezésére felírjuk az (1) (vagy (2), ha nincs megfelelő átfogó logikai feltétel) alakú ekvivalenciát, akkor ekvivalenciák olyan rendszerét kapjuk, amelynek megoldása az $\mathfrak{A}$ séma összes elemi kifejezése végrehajtása első feltételeinek halmaza. Emellett, mivel az (1) és (2) ekvivalencia jobb oldala nem tartalmazza operátorok végrehajtása első feltételét, ezért a séma összes elemi kifejezése végrehajtása első feltételének megkapásához elegendő ekvivalenciák olyan rendszerének megoldását megtalálni, amely csak logikai feltételekre van felírva (ha ennek a rendszernek van egyetlen megoldása), és akkor az operátorok végrehajtása első feltételét egyértelműen meghatározzák az (1) és (2) formulák. Azokban az esetekben, amikor az említett rendszernek nincs egyetlen megoldása, a sémából kiegészítő feltételeket kell nyerni, például úgy, hogy megvizsgáljuk az értékeit bizonyos értékrendszerekre.

1. *Példa.* A

$$p_1 \underset{1}{\llcorner} A_1 p_2 \underset{2}{\llcorner} A_2 \underset{1}{\lrcorner} A_3 p_3 \underset{3}{\llcorner} A_4 \underset{2}{\lrcorner} A_5 p_4 \underset{4}{\llcorner} A_6 \underset{5}{\lrcorner} A_7 \underset{6}{\lrcorner} A_8 \underset{3}{\lrcorner} A_9 \underset{4}{\lrcorner} A_{10} p_5 \underset{5}{\llcorner} A_{11} p_6 \underset{6}{\llcorner}$$

sémára:

$$(p_1 \underset{1}{\llcorner})^{\otimes} \equiv 1,$$

$$(p_2 \underset{2}{\llcorner})^{\otimes} \equiv p_1 \cdot (p_1 \underset{1}{\llcorner})^{\otimes},$$

$$(p_3 \underset{3}{\llcorner})^{\otimes} \equiv p_2 \cdot (p_2 \underset{2}{\llcorner})^{\otimes} \vee \bar{p}_1 (p_1 \underset{1}{\llcorner})^{\otimes},$$

$$(p_4 \underset{4}{\llcorner})^{\otimes} \equiv p_3 \cdot (p_3 \underset{3}{\llcorner})^{\otimes} \vee \bar{p}_2 \cdot (p_2 \underset{2}{\llcorner})^{\otimes},$$

$$(p_5 \underset{5}{\llcorner})^{\otimes} \equiv 1,$$

$$(p_6 \underset{6}{\llcorner})^{\otimes} \equiv p_5 (p_5 \underset{5}{\llcorner})^{\otimes},$$

ahonnan

$$(p_3 \underset{3}{\llcorner})^{\otimes} \equiv p_2 p_1 \vee \bar{p}_1 \equiv p_2 \vee p_1; \quad (p_4 \underset{4}{\llcorner})^{\otimes} \equiv p_3 (p_1 \vee p_2) \vee p_1 \cdot \bar{p}_2 \equiv p_3 \vee p_1 \bar{p}_2.$$

Akkor, például:

$$A_8^{\otimes} \equiv p_4 (p_4 \underset{4}{\llcorner})^{\otimes} \vee \bar{p}_5 \vee \bar{p}_6 p_5 \equiv p_4 (p_3 \vee p_1 \bar{p}_2) \vee \bar{p}_5 \vee p_6.$$

A többi operátor végrehajtása első feltételét analóg módon kaphatjuk.

Megjegyezzük, hogy a logikai feltételek végrehajtása első feltételének meghatározásánál elegendő csak a séma „logikai váz”-át vizsgálni, azaz azt, ami az összes operátor törlése után a sémából marad.

2. *Példa.* Legyen a séma logikai váza a következő:

$$p_1 \underset{1}{\llcorner} \underset{3}{\lrcorner} \underset{5}{\lrcorner} p_2 \underset{2}{\llcorner} \underset{4}{\lrcorner} p_1 \vee \bar{p}_2 \underset{3}{\llcorner} \underset{1}{\lrcorner} \bar{p}_1 \underset{4}{\llcorner} \underset{2}{\lrcorner} \bar{p}_2 \underset{5}{\llcorner}.$$

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$x_1 = (p_1 \underset{1}{\llcorner})^{\otimes}, x_2 = (p_2 \underset{2}{\llcorner})^{\otimes}, x_3 = (p_1 \vee \bar{p}_2 \underset{3}{\llcorner})^{\otimes}, x_4 = (p_1 \underset{4}{\llcorner})^{\otimes}, x_5 = (p_2 \underset{5}{\llcorner})^{\otimes}.$$

Akkor, nyilvánvalóan:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv 1, \\ x_2 &\equiv p_1 \vee \bar{p}_1 p_2 x_3 \vee p_2 x_5, \\ x_3 &\equiv p_2 x_2 \vee p_1 x_4, \\ x_4 &\equiv (p_1 \vee \bar{p}_2) x_3 \vee \bar{p}_1, \\ x_5 &\equiv \bar{p}_1 x_4 \vee \bar{p}_2 x_2. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $p_1 = 0$. Akkor a rendszer ilyen alakú lesz:

$$\begin{aligned} x_2 &\equiv p_2 x_3 \vee p_2 x_5, \\ x_3 &\equiv p_2 x_2, \\ x_4 &\equiv 1, \\ x_5 &\equiv x_4 \vee \bar{p}_2 \cdot x_2 \equiv 1, \end{aligned}$$

ahonnan $x_2 \equiv p_2$ és következésképpen $x_3 \equiv p_2$.

Tegyük fel most, hogy $p_1 = 1$. Akkor

$$\begin{aligned} x_2 &\equiv 1, \\ x_3 &\equiv p_2 \vee x_4, \\ x_4 &\equiv x_3, \\ x_5 &\equiv \bar{p}_2, \end{aligned}$$

ahonnan $x_3 \equiv p_2 \vee x_3$, azaz vagy $x_3 \equiv 1$, vagy $x_3 \equiv p_2$. A szükséges megoldás kiválasztásához megvizsgáljuk a sémát. Mivel $p_1 = 1$, $p_2 = 0$-nál a $p_1 \vee \bar{p}_2 \underset{3}{\llcorner}$ logikai feltétel nem kerül végrehajtásra (azaz $x_3\ (1, 0) = 0$), így $p_1 = 1$-nél x_3-ra a második megoldást kell tekinteni: $x_3 \equiv p_2$.

Ily módon kapjuk:

p_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	p_2	p_2	1	1
1	1	p_2	p_2	$\bar{p}_2$

ahonnan

$$x_2 \equiv p_1 \vee p_2, \quad x_3 \equiv p_2, \quad x_4 \equiv \bar{p}_1 \vee p_2, \quad x_5 \equiv \bar{p}_1 \vee \bar{p}_2.$$

Vizsgáljuk most tetszőleges változáseloszlás esetét. Keressük ekvivalenciák olyan rendszerét, amelyet a $\mathfrak{B}^*$ függvények kielégítenek.

02. 9. Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés az $\mathfrak{A}$ sémában *alá van rendelve* az A_i operátornak, ha A_i az $\mathfrak{A}$ sémában a $\mathfrak{B}$-től balra álló operátorok közül a legjobboldalibb, továbbá az A_i-t és $\mathfrak{B}$-t átfogó logikai feltétel azonos (vagy egyiküknek sincs).

Vizsgáljuk az $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ sémát valamely $A_i - \mathfrak{Y}_i$ változáseloszlásnál. A következő esetek lehetségesek:

1. $\mathfrak{B}$ alá van rendelve valamelyik A_i operátornak. Legyen az összes $[A_i, \mathfrak{B}]$ zárt intervallumon kívül álló olyan logikai feltétel, amelyek jobb félzárójele ebben a zárt intervallumban van: $\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}$. Akkor, nyilvánvalóan

$$(3) \qquad \mathfrak{B}^* \equiv \max_{\mathfrak{Y}_i} A_i^* \vee \bar{\gamma}_1 \cdot (\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner})^* \vee \ldots \vee \bar{\gamma}_l \cdot (\gamma_l \underset{k_l}{\llcorner})^*.$$

2. $\mathfrak{B}$ egyetlen operátornak sincs alárendelve, de $\alpha \underset{i}{\llcorner}$ a $\mathfrak{B}$-t átfogó logikai feltétel. Legyen az összes $\mathfrak{B}$-hez vezető logikai feltétel: $\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}$. Akkor

$$(4) \qquad \mathfrak{B}^* \equiv \alpha \cdot (\alpha \underset{i}{\llcorner})^* \vee \bar{\gamma}_1 \cdot (\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner})^* \vee \ldots \vee \bar{\gamma}_l \cdot (\gamma_l \underset{k_l}{\llcorner})^*.$$

3. $\mathfrak{B}$ egyetlen operátornak sincs alárendelve, és nincs $\mathfrak{B}$-t átfogó logikai feltétel. Akkor nyilvánvalóan:

$$(5) \qquad \mathfrak{B}^* \equiv 1.$$

Ily módon, ha az $\mathfrak{A}$ séma minden $\mathfrak{B}$ elemi kifejezésére felírjuk a (3), (4) vagy (5) ekvivalenciát attól függően, hogy az (1)—(3) esetek közül melyik áll fenn, akkor ekvivalenciák olyan rendszerét kapjuk, amelynek megoldásai a $\mathfrak{B}^*$ függvények.

3. *Példa.* Tekintsük a következő sémát:

$$\mathfrak{A} \equiv p_1 \underset{1}{\llcorner} A_1 \underset{3}{\lrcorner} A_2 \underset{5}{\lrcorner} A_3 p_2 \underset{2}{\llcorner} \underset{4}{\lrcorner} A_4 p_1 \vee \bar{p}_2 \underset{3}{\llcorner} A_5 \underset{1}{\lrcorner} A_6 \bar{p}_1 \underset{4}{\llcorner} \underset{2}{\lrcorner} A_7 \bar{p}_2 \underset{5}{\llcorner},$$

amelynek logikai vázát a 102. oldal 2. példájában vizsgáltuk. Jelölések: $x_1 = (p_1 \underset{1}{\llcorner})^*$, $x_2 = (p_2 \underset{2}{\llcorner})^*$, $x_3 = (p_1 \vee \bar{p}_2 \underset{3}{\llcorner})^*$, $x_4 = (\bar{p}_1 \underset{4}{\llcorner})^+$, $x_5 = (\bar{p}_2 \underset{5}{\llcorner})^*$. Akkor az $A_3 - \{p_2\}$, $A_4 - \{p_1\}$, $A_i - 0$ $(i \neq 3, 4)$ változáseloszlásnál:

$$\begin{aligned}
x_1 &\equiv 1, & x_3 &\equiv \max_{\{p_1\}} A_4^*, \\
A_1^* &\equiv p_1, & A_5^* &\equiv (p_1 \vee \bar{p}_2) x_3, \\
A_2^* &\equiv A_1^* \vee \bar{p}_1 p_2 x_3, & A_6^* &\equiv A_5^* \vee \bar{p}_1, \\
A_3^* &\equiv A_2^* \vee p_2 x_5, & x_4 &\equiv A_6^*, \\
x_2 &\equiv \max_{\{p_2\}} A_3^*, & A_7^* &\equiv \bar{p}_1 x_4 \vee \bar{p}_2 x_2, \\
A_4^* &\equiv p_2 \cdot x_2 \vee p_1 x_4, & x_5 &\equiv A_7^*.
\end{aligned}$$

Innen a következőt kapjuk:

$$A_2^* \equiv p_1 \vee p_2 x_3,$$
$$x_2 \equiv \max_{\{p_2\}} A_2^* \vee x_5 \equiv p_1 \vee x_3 \vee x_5,$$
$$x_3 \equiv \max_{\{p_1\}} p_2 x_2 \vee x_4 \equiv p_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5,$$
$$x_4 \equiv (p_1 \vee p_2) x_3 \vee \bar{p}_1 \equiv \bar{p}_1 \vee x_3,$$
$$x_5 \equiv \bar{p}_1 x_4 \vee \bar{p}_2 x_2,$$

ahonnan

$$x_2 \equiv p_1 \vee p_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \equiv p_1 \vee p_2 \vee x_3 \vee \bar{p}_1 \vee x_5 \equiv 1,$$
$$x_5 \equiv A_7^* \equiv \bar{p}_1(\bar{p}_1 \vee x_3) \vee \bar{p}_2 \equiv \bar{p}_1 \vee \bar{p}_2,$$
$$x_3 \equiv p_2 \vee x_3 \vee \bar{p}_1 \vee \bar{p}_2 \equiv 1,$$
$$A_2^* \equiv p_1 \vee p_2,$$
$$A_3^* \equiv p_1 \vee p_2,$$
$$x_4 \equiv A_6^* \equiv 1,$$
$$A_4^* \equiv p_1 \vee p_2,$$
$$A_5^* \equiv p_1 \vee \bar{p}_2.$$

Univerzális változáseloszlásnál ugyanerre a sémára kapjuk:

$$x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \equiv x_5 \equiv 1, \quad A_1^* \equiv p_1, \quad A_4^* \equiv p_1 \vee p_2,$$
$$A_5^* \equiv p_1 \vee \bar{p}_2, \quad A_7^* \equiv \bar{p}_1 \vee \bar{p}_2, \quad A_2^* \equiv A_3^* \equiv A_6^* \equiv 1.$$

3. Algoritmusok logikai sémái átalakításainak teljes rendszere

Ebben a pontban axiómák (pontosabban, axiómák sémái) és következtetési szabályok olyan rendszerét vizsgáljuk, amely leírja algoritmusok logikai sémái ekvivalenciájának fogalmát adott változáseloszlásnál. A vizsgálandó kalkulus formulái

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$$

alakú sorozatok lesznek, ahol $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ kifejezések. Abban az esetben, amikor $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ alagoritmusok logikai sémái, az (1) alakú formulákban a $=$ jelet úgy interpretáljuk, mint ekvivalenciát adott változáseloszlásnál. Ha pedig $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ kifejezések, amelyek nem sémák, akkor az $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ alakú formulákat úgy lehet interpretálni, mint $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})=\mathfrak{L}(\mathfrak{B})$ alakú formulák egyszerűsített felírását, ahol $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ tetszőleges, az $\mathfrak{A}$ kifejezést tartalmazó séma, a $\mathfrak{L}(\mathfrak{B})$ olyan séma, amelyet $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$-ból $\mathfrak{A}$ kifejezésnek $\mathfrak{B}$ kifejezéssel való helyettesítésével nyerünk.[18] Az adott kalkulus axiómáit és követ-

[18] Az a tény, hogy $\mathfrak{L}(\mathfrak{B})$ szintén séma, azt jelenti, hogy a $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ sémában $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-vel való helyettesítésénél nem szükségszerű, hogy zárójelek vagy operátorok összeütközése történjék, azaz $\mathfrak{L}$-ben előforduljon két egynevű azonos indexű félzárójel vagy két azonos operátor.

keztetési szabályait úgy lehet tekinteni, mint sémák azonos átalakításainak szabályait, azaz, mint olyan szabályokat, amelyek a sémákat velük ekvivalensbe viszik át adott változáseloszlásnál. Például, ha $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ alakú következtetési formula adott, akkor minden $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ sémában $\mathfrak{A}$ kifejezést $\mathfrak{B}$ kifejezéssel pótólhatjuk (azon feltétel mellett, hogy nem történik összeütközés), amelytől a séma megengedett értékei nem változnak. Formálisan ezt a tényt a IX. szabály fejezi ki. A többi következtetési szabályt (VIII, X, XI) úgy fogalmaztuk meg, hogy közvetlenül sémák átalakítási szabályaiként foghatjuk fel őket.

Az alább ismertetendő axiómarendszerben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ betűk helyett állhatnak tetszőleges kifejezések azzal a feltétellel, hogy ilyen behelyettesítésnél az axiómák formulákba mennek át; az A betűvel tetszőleges operátort jelölünk; α, β a klasszikus ítételkalkulus tetszőleges formulái, 0 azonosan hamis formula, 1 azonosan igaz formula.

I. 1. $0 \underset{i}{\llcorner} A \underset{i}{\lrcorner} = 0 \underset{i}{\llcorner} \underset{i}{\lrcorner}.$

2. $1 \underset{i}{\llcorner} \mathfrak{A} \underset{i}{\lrcorner} = \mathfrak{A}.$

3. $3 \underset{i}{\lrcorner} \mathfrak{A} 1 \underset{i}{\llcorner} = \mathfrak{A}.$

II. 1. $\alpha\beta \underset{i}{\llcorner} \mathfrak{A} \underset{i}{\lrcorner} = \alpha \underset{i}{\llcorner} \beta \underset{j}{\llcorner} \mathfrak{A} \underset{i}{\lrcorner} \underset{j}{\lrcorner}.$

2. $\underset{i}{\lrcorner} \mathfrak{A}\alpha\beta \underset{i}{\llcorner} = \underset{i}{\lrcorner} \underset{j}{\lrcorner} \mathfrak{A}\alpha \underset{i}{\llcorner} \beta \underset{j}{\llcorner}.$

3. $\alpha \vee \beta \underset{i}{\llcorner} = \bar{\alpha} \underset{j}{\llcorner} \beta \underset{i}{\llcorner} \underset{j}{\lrcorner}.$

III. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0 \underset{i}{\llcorner} \underset{j}{\lrcorner} \mathfrak{B} 0 \underset{k}{\llcorner} \underset{i}{\lrcorner} \mathfrak{A} 0 \underset{j}{\llcorner} \underset{k}{\lrcorner}.$

IV. $\underset{i}{\lrcorner} \underset{j}{\lrcorner} = \underset{j}{\lrcorner} \underset{i}{\lrcorner}.$

V. $\alpha \underset{i}{\llcorner} \underset{i}{\lrcorner} = \Lambda$, ahol Λ üres kifejezés.

VI. 1. $\alpha \underset{i}{\llcorner} \mathfrak{A} \underset{i}{\lrcorner} \alpha \underset{j}{\llcorner} \mathfrak{B} \underset{j}{\lrcorner} = \alpha \underset{i}{\llcorner} \mathfrak{A}\alpha \underset{j}{\llcorner} \mathfrak{B} \underset{j}{\lrcorner} \underset{i}{\lrcorner}.$

2. $\alpha \underset{i}{\llcorner} \mathfrak{A} \underset{j}{\lrcorner} \mathfrak{B} \underset{i}{\lrcorner} \alpha \underset{j}{\llcorner} = \alpha \underset{i}{\llcorner} \mathfrak{A} \underset{j}{\lrcorner} \underset{i}{\lrcorner} \mathfrak{B}\alpha \underset{j}{\llcorner}.$

3. $\underset{j}{\lrcorner} \mathfrak{A}\alpha \underset{i}{\llcorner} \mathfrak{B} \underset{i}{\lrcorner} \alpha \underset{j}{\llcorner} = \underset{j}{\lrcorner} \underset{i}{\lrcorner} \mathfrak{A}\alpha \underset{i}{\llcorner} \mathfrak{B}\alpha \underset{j}{\llcorner}.$

4. $\underset{i}{\lrcorner} \alpha \underset{j}{\llcorner} \mathfrak{A}\alpha \underset{i}{\llcorner} \mathfrak{B} \underset{j}{\lrcorner} = \alpha \underset{j}{\llcorner} \mathfrak{A}\alpha \underset{i}{\llcorner} \mathfrak{B} \underset{j}{\lrcorner} \underset{i}{\lrcorner}.$

5. $\underset{i}{\lrcorner} \alpha \underset{j}{\llcorner} \mathfrak{A} \underset{j}{\lrcorner} \mathfrak{B}\alpha \underset{i}{\llcorner} = \alpha \underset{j}{\llcorner} \mathfrak{A} \underset{j}{\lrcorner} \underset{i}{\lrcorner} \mathfrak{B}\alpha \underset{i}{\llcorner}.$

6. $\underset{j}{\lrcorner} \mathfrak{A} \underset{i}{\lrcorner} \alpha \underset{j}{\llcorner} \mathfrak{B}\alpha \underset{i}{\llcorner} = \underset{j}{\lrcorner} \underset{i}{\lrcorner} \mathfrak{A}\alpha \underset{j}{\llcorner} \mathfrak{B}\alpha \underset{i}{\llcorner}.$

VII. $\quad \rfloor_i \alpha \lfloor_i \mathfrak{A} \rfloor_j \alpha \lfloor_j = \alpha \lfloor_i \mathfrak{A} \rfloor_i \rfloor_j \alpha \lfloor_j .$

VIII. $\quad \dfrac{\vdash \alpha \equiv \beta}{\vdash \mathfrak{A}(\alpha) = \mathfrak{A}(\beta)}$ [19]

IX. $\quad \dfrac{\vdash \mathfrak{A} = \mathfrak{B},\ \vdash \mathfrak{L}(\mathfrak{A}) = \vartheta}{\vdash \mathfrak{L}(\mathfrak{B}) = \vartheta}$

X. Az egy kifejezésbe tartozó $\lfloor_i, \rfloor_i$ félzárójel-pár tetszőleges $\lfloor_j, \rfloor_j$ párra átjelölhető, de csak úgy, ha félzárójelek összeütközése nem lép fel.

XI. Ha $\alpha \lfloor_i$ logikai feltétel β-nak alá van rendelve (a változások adott eloszlásánál), akkor $\alpha \lfloor_i$ helyettesíthető $\alpha \cdot \beta \lfloor_i$-vel.

A VI. 1—6 formulák azt jelentik, hogy ha $\alpha \lfloor_i$ logikai feltétel $\rfloor_i$ jobb félzárójele közvetlenül az $\alpha \lfloor_j$ logikai feltétel előtt áll, akkor $\rfloor_i$ áthelyezhető $\rfloor_j$-hez.

Az I—VII. formulák és a VIII—XI. szabályok helyessége a bennünket érdeklő értelmezésben nyilvánvaló. Világítsuk meg, például a XI. szabályt. Ha $\alpha \lfloor_i$ logikai feltétel alá van rendelve β-nak, azaz $(\alpha \lfloor_i)^* \to \beta$, akkor a 20. oldalon elmondottak szerint ez azt jelenti, hogy $\alpha \lfloor_i$ csak igaz β-nál kerül végrehajtásra, de igaz β-nál az $\alpha \cdot \beta$ formula ekvivalens α-val.

Mielőtt az I—XI rendszer teljességét bizonyítanánk, bevezetünk bizonyos formulákat és szabályokat.

1°. $\vdash \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ a VIII. szabály alapján $\beta \equiv \alpha$ mellett.

2°. $\dfrac{\vdash \mathfrak{A} = \mathfrak{B}}{\vdash \mathfrak{B} = \mathfrak{A}}$ a IX. szabály szerint $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}) \equiv \vartheta \equiv \mathfrak{A}$-nál.

3°. $\dfrac{\vdash \mathfrak{A} = \mathfrak{B},\ \vdash \mathfrak{A} = \mathfrak{L}}{\vdash \mathfrak{B} = \mathfrak{L}}$ a IX. értelmében $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A},\ \vartheta \equiv \mathfrak{L}$ mellett.

4°. $\dfrac{\vdash \mathfrak{A} = \mathfrak{B},\ \vdash \mathfrak{B} = \mathfrak{L}}{\vdash \mathfrak{A} = \mathfrak{L}}$ a 2° és 3° miatt.

5°. Ha $\alpha \lfloor_i$ logikai feltétel a β-nak alá van rendelve, akkor $\alpha \lfloor_i$ pótolható $\alpha \vee \bar{\beta} \lfloor_i$-vel. — Valóban, $\mathfrak{A} \equiv \alpha \lfloor_i$-nél I. 2-ből és 2°-ból kapjuk, hogy $\vdash \alpha \lfloor_i = 1 \lfloor_j \alpha \lfloor_i \rfloor_j$. IX értelmében a jobb oldalt az eredeti sémába beírva nyerjük, hogy $1 \lfloor_j$ logikai feltétel ugyanannak a logikai feltételnek van alárendelve, mint $\alpha \lfloor_i$, nevezetesen β-nak.

[19] A $\vdash$ jellel a következtetési formulákat jelöljük, miközben a VIII. szabály premisszájában, és mindenütt ahol logikai formulákról van szó, a következtethetőséget a klasszikus ítéletkalkulus értelmében tekintjük.

Akkor a XI. szabály alapján $1\llcorner_j$-t az $1\beta\llcorner_j$-vel pótoljuk, azaz a VIII. szabály miatt $\beta\llcorner_j$-vel; — II. 3. figyelembevételével kapjuk a kívánt szabályt.

6°. Ha egy logikai feltétel 0-nak van alárendelve, akkor az törölhető (jobb félzárójelével együtt). Ez a szabály 5°-ból és I. 2. és I. 3. axiómákból következik.

6^1. Ha egy operátor nullának van alárendelve, akkor törölhető. Valóban, a vizsgálandó A operátort az I. 2. axióma értelmében cseréljük fel az $1\llcorner_i A \lrcorner_i$ kifejezéssel. Az $1\llcorner_i$ logikai feltétel szintén alá van rendelve nullának, ezért a XI. szabály szerint pótolhatjuk $0\llcorner_i$-vel, azután az I. 1. és V. axióma alapján törölhetjük A-t és $0\llcorner_i \lrcorner_i$-t.

7°. $\vdash \alpha\llcorner_1 = \alpha\llcorner_j 0\llcorner_i \lrcorner_j$. Valóban, a VIII. szerint $\vdash \alpha\llcorner_i = \alpha\vee\alpha\llcorner_i$, azaz II. 3. értelmében $\vdash \alpha\llcorner_1 = \bar{\alpha}\llcorner_j \alpha\llcorner_i \lrcorner_j$. Innen, mivel $\alpha\llcorner_i \prec \bar{\alpha}$, ezért XI. szabály alapján a 7° formulát kapjuk. Azokat a kifejezéseket, amelyekben minden jobb (illetve bal) félzárójelhez található ugyanolyan indexű, bal (jobb) félzárójel, *bal-* (illetve *jobb-*) kifejezéseknek nevezzük.

Legyen $\mathfrak{A}_l$ bal kifejezés, amely nem tartalmaz olyan operátorokat, amelyeknek az adott változáseloszlás a logikai változók nem üres halmazát felelteti meg. Akkor a következő formulákat kaphatjuk:

8°. $\vdash \alpha\llcorner_i \mathfrak{A}_l \lrcorner_i \alpha\llcorner_j \mathfrak{B} \lrcorner_j = \alpha\llcorner_i \mathfrak{A}_l \mathfrak{B} \lrcorner_i$,

8^1. $\vdash \lrcorner_j \mathfrak{B}\alpha\llcorner_i \mathfrak{A}_l \lrcorner_i \alpha\llcorner_j = \lrcorner_j \mathfrak{B}\alpha\llcorner_i \mathfrak{A}_l$.

Ha a jobb oldalakon az $\llcorner_i, \lrcorner_i$ félzárójeleket átjelöljük $\llcorner_j, \lrcorner_j$-re, akkor 8°-at és 8^1-et egy formula alakjában írhatjuk fel:

8. $\alpha\llcorner_i \mathfrak{A}_l \lrcorner_i \alpha\llcorner_j = \alpha\llcorner_j \mathfrak{A}_l$.

Tekintsük például a 8°-at. A VI. 1-ből

$$\vdash \alpha\llcorner_i \mathfrak{A}_l \lrcorner_i \alpha\llcorner_j \mathfrak{B} \lrcorner_j = \alpha\llcorner_i \mathfrak{A}_l \alpha\llcorner_j \mathfrak{B} \lrcorner_j \lrcorner_i .$$

A jobb oldalon nyilvánvalóan $\alpha\llcorner_j \prec \alpha$. Akkor 5° és I. 2. alapján a 8° formulát kapjuk. A 8^1 formula analóg módon adódik.

9°. $$\frac{\vdash \bar{\alpha}\to\beta}{\vdash \alpha\llcorner_i \beta\llcorner_j = \beta\llcorner_j \alpha\llcorner_i}$$

Valóban, $\dfrac{\vdash \bar{\alpha}\to\beta}{\vdash \alpha \equiv \alpha\vee\beta}$. Akkor VIII értelmében

$$\frac{\vdash \bar{\alpha} \to \beta}{\alpha \llcorner_i \beta \llcorner_j = \bar{\beta} \vee \alpha \llcorner_i \beta \llcorner_j}, \quad \text{azaz} \quad \frac{\vdash \bar{\alpha} \to \beta}{\vdash \alpha \llcorner_i \beta \llcorner_j = \beta \llcorner_k \alpha \llcorner_i \lrcorner_k \beta \llcorner_j},$$

ahonnan 8-at figyelembe véve kapjuk 9°-at.

10°. $\vdash \alpha \llcorner_i \mathfrak{A}_l \alpha \llcorner_j = \alpha \llcorner_i \mathfrak{A}_l$, ahol $\mathfrak{A}_l$ olyan balkifejezés, amely kielégíti ugyanazokat a feltételeket, amelyek a 8°-ban is szerepelnek. Valóban, nyilvánvalóan $\alpha \llcorner_j \prec \alpha$, mivel $\mathfrak{A}_l$ nem tartalmaz olyan operátorokat, amelyek a logikai változók értékeit megváltoztathatnák. De akkor, 5°-t tekintve, $\vdash \alpha \llcorner_i \mathfrak{A}_l \alpha \llcorner_j = \alpha \llcorner_i \mathfrak{A}_l \alpha \vee \bar{\alpha} \llcorner_j$, ahonnan I. 1, 2. alapján kapjuk 10°-et.

Megjegyezzük, hogy az összes levezetett formulák és következtetési szabályok, amelyek sémák átalakításai szabályainak tekinthetők, megfordíthatók, azaz minden levezethető átalakításhoz a fordított átalakítás is levezethető. Formulákra a 2° alapján ez nyilvánvaló. A VIII., IX., X. szabályok megfordíthatósága szintén nyilvánvaló. Megmutatjuk, hogy a XI. szabály is megfordítható. Lényegében, ha az $\alpha \cdot \beta \llcorner_i$ logikai feltétel a β függvénynek alá van rendelve, akkor 5° miatt helyettesíthetjük azt $\alpha \cdot \beta \vee \bar{\beta} \llcorner_i$-vel, azaz $\alpha \vee \bar{\beta} \llcorner_i$-val. A legutolsó logikai feltételt II. 3. miatt $\beta \llcorner_j \alpha \llcorner_i \lrcorner_j$ alakban előállíthatjuk. Akkor a 5° szabály szerint $\beta \llcorner_j$-t pótolhatjuk $\beta \vee \bar{\beta} \llcorner_j$-vel, azaz $1 \llcorner_j$-vel, amelyet I. 2 miatt törölhetünk ($\lrcorner_j$-vel együtt).

IRODALOMJEGYZÉK

1] А. А. Марков, Теория алгорифмов, Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР XLII (1954).

[2] А. А. Ляпунов, О логических схемах программ, Проблемы кибернетики 1 (1958).

[3] С. С. Камынин, Э. З. Любимский, М. Р. Шура—Бура, Об автоматизации программирования, Проблемы кибернетики 1 (1958).

[4] Ю. И. Янов, О равносильности и преобразованиях схем программ, ДАН 113, № 1 (1957).

[5] Ю. И. Янов, О матричных схемах ДАН 113, № 2 (1957).

[6] Ю. И. Янов, О равносильности и преобразованиях схем программ. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук.

[7] Д. Гильберти В. Аккерман, Основы теоретической логики, ИЛ, Москва, 1947.

Fordította: Gyuris László aspiráns

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1968. I. 12. — Terjedelem: 9,4 (A/5) ív, 4 ábra

68-5829 — Szegedi Nyomda

Ára: 20,– Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

INDEX

FROM THE FOREIGN LITERATURE

Megjelent 1968. III. 30.

Index: 26 498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVIII. KÖTET 2. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1968

III. OSZT. KÖZL.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVIII. kötet 2. szám.

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

GYULAI ZOLTÁN
1887—1968

1968. július 13-án elhunyt GYULAI ZOLTÁN Állami- és Kossuth-díjas akadémikus, ny. egyetemi tanár, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke, a Göttingai Tudományos Akadémia levelező tagja, a Munkaérdemrend arany fokozata és a Szocialista Munkáért Érdemérem tulajdonosa. Kiváló munkásságot fejtett ki mind a fizikai kutatások, mind a fiatal fizikus generáció nevelése terén. Halála napjáig vezetője volt a Magyar Tudományos Akadémia Kristálynövekedési Tanszéki Kutató Csoportjának.

Szerkesztőbizottság

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYA OSZTÁLYVEZETŐSÉGI BESZÁMOLÓJA*

Az Osztály intézményeiben az elmúlt évben elért legfontosabb kutatási eredményeket, a testületek tevékenységéről szóló tájékoztatást, a könyv- és folyóiratkiadási, valamint a tudományos tanácskozásokra vonatkozó adatokat a melléklet tartalmazza.

A következőkben csupán néhány igen lényeges kérdésről és fontosabb feladatról adunk vázlatos áttekintést, továbbá tájékoztatjuk az osztályülést néhány olyan kiemelkedőbb tudománypolitikai, tudományszervezési tevékenységről, amelyet az Osztály, illetve testületei és intézményei a beszámolási időszakban folytattak.

1. Az elmúlt években jelentős eseményeknek voltunk tanúi, amelyek lényegesen befolyásolják Osztályunk tevékenységét is. Hazánk eddigi gazdasági fejlődésének áttekintése és a jövőbeli haladás útjának az a vizsgálata, amely a *gazdasági mechanizmus reformjához* vezetett, a tudomány számára is előnyös változásokat készített elő. Számos olyan intézkedés történt, illetve készül, amelynek a kutatómunkát serkentő hatása a következő években fog kibontakozni.

Az új gazdasági mechanizmus egyebek között lehetővé teszi a kutatóhelyek önállóságának további növelését. Az áttérés az eddigi szigorú költségvetési gazdálkodásról a költségvetési folyószámlás gazdalkodásra, valamint a kutatási szerződésekre vonatkozó új rendelkezések nemcsak gazdaságilag adnak nagyobb szabadságot a szakmai vezetőknek, nemcsak erősítik a gyakorlattal való kapcsolatot, hanem lehetővé teszik a kutatási kapacitásnak a költségvetés nyújtotta kereteken túlmenő kibővítését. A szerződési bevételekből adódó nyereségnek az intézetfejlesztésre jutó része felhasználható az alapkutatások kiterjesztésére, a személyi díjazásra fordítható 50%-a pedig módot ad az időszerű témákkal sikeresen foglalkozók anyagi érdekeltségének a fokozására.

A gazdaságirányítás új rendszerének a tudomány művelésére gyakorolt kedvező hatása természetesen nem azonnal és önmagától érvényesül. Az Osztály vezetésének minden szintjén aktívan és kezdeményezően kell feltárni a lehetőségeket és kielégíteni a társadalmi szükségleteket. Mivel azonban nem kitaposott úton járunk, munkánk során előreláthatóan számos nehézséggel fogunk találkozni.

Intézményeink az új gazdasági mechanizmusra történő *áttérésre* általában időben és felelőségteljesen felkészültek. Különösen vonatkozik ez a *Központi Fizikai Kutató Intézetre.* Alaptevékenységét az Akadémia állami költségvetésből finanszírozza, az Intézet ezenkívül kutatási eredményeinek, módszereinek és a rendelkezésre álló egyedi nagy berendezéseknek a hasznosítására megbízásokat vállal, szer-

* Elhangzott az 1968. évi akadémiai közgyűlés keretében május 7-én megtartott nyilvános osztályülésen.

ződéseket köt. Ez kedvezően befolyásolja mind az alaptevékenység továbbfejlődését, mind a népgazdasági, társadalmi felhasználás kiszélesedését. Az új gazdálkodási rendszer belső alapelveit az említett szempontok, valamint a tudományos kutatómunka hatékonyságnövelő tényezőinek figyelembevételével alakította ki az Intézet. Az alapelvek meghatározásánál számításba vették azt is, hogy a költségvetési szervek finanszírozási és gazdálkodási rendszerét szabályozó, ez idő szerint érvényes pénzügyi rendelkezések továbbfejlesztésével miként lehetne a tudományos kutatás speciális feltételeinek jobban megfelelő rendszert kialakítani. Minthogy az Intézet a nagyságrendet, sajátos összetételét és sokirányú tevékenységét tekintve a többi akadémiai intézettől eltérő jellegű, célszerűnek látszott finanszírozási és gazdálkodási rendszerének e sajátosságok figyelembevételével való meghatározására javaslatokat kidolgozni.

A kutatás érdemi, valamint gazdálkodási hatáskörének decentralizálása, az intézetek önállóságának és cselekvési szabadságának a növelése mindinkább előtérbe helyezi a tudománypolitika érvényesítésének a módját. Nyilvánvalóan a kutatóhelyek nagy önállóságának a viszonyai között is kellő mértékben kell érvényesülniök az országos tudománypolitikai irányelveknek, valamint az Osztályvezetőség elhatározásainak. Nem a részletekre vonatkozó beavatkozásról van itt szó, hanem a legfontosabb tudományágak művelését és fejlesztésének fő irányait és arányait érintő elgondolásokról. Ez azonban nem valósítható meg csak határozatokkal és utasításokkal; a formális intézkedések helyett az elgondolások tudományos fórumokon való megvitatásával, meggyőzéssel kell odahatni, hogy a vezetők saját elhatározásukból irányítsák úgy intézményeik munkáját, ahogyan azt a társadalmi haladás megköveteli.

2. Az Akadémia az Országos Tervhivatallal megállapodott egy *nagyteljesítményű elektronikus számológép* közös beszerzésében. A beszerzés előkészítésére az Országos Tervhivatal elnöke és az Akadémia főtitkára e két intézmény képviselőiből operatív tanácsadó bizottságot létesített. Az eddig lefolytatott tárgyalások eredményeképpen úgy látszik, hogy a számológép az 1969. év végéig, esetleg 1970 első felében üzembehelyezhető lesz.

A számológép típusának kiválasztásánál abból kellett kiindulni, hogy a géppel kapcsolatos igények jelenleg csak főbb vonásokban ismeretesek, és a számológép üzembehelyezése után csak 1—2 év múlva várható a tényleges szükséglet kialakulása. Ezért olyan gép megvásárlása kívánatos, amely viszonylag hosszú időn át korszerű marad, illetve korszerűsége aránylag nem nagy volumenű évenkénti beruházással fenntartható. A gép típusának meghatározásában alapvető szempontnak kell lennie annak is, hogy a szállító cég mekkora program-könyvtárral látja el a gépet. Arra is kell gondolni, hogy az országban már meglevő számolóközpontokkal biztosítható-e maximális koordináció, továbbá illeszkedik-e a megvásárolandó gép típusa az országos fejlesztési elképzelésekhez.

Természetesen ezen szempontokon túlmenően kereskedelempolitikai, pénzügyi és politikai megfontolások is szerepet játszanak a megvásárlásra kerülő gép típusának meghatározásában.

Az eddigi tájékozódás alapján a szállítás lebonyolítására mintegy 4—6 cég látszik alkalmasnak, amelyek részletes ajánlataikat megtették, jelenleg az ajánlatok feldolgozása folyamatban van. A megfelelő céget az arra illetékesek több céggel folytatandó tárgyalás és helyszíni megtekintés után fogják kiválasztani.

Az Osztály — osztályülés keretében, nagyszámú szakértő bevonásával — a gép fogadásának előkészítése érdekében a közelmúltban újból foglalkozott a Számítástechnikai Központ feladatkörével és vezetésének elvi kérdéseivel, valamint javaslatot készített a vezetés konkrét problémáinak a megoldására is. A feladatkörre és a vezetés elvi kérdéseire vonatkozóan kétféle álláspont merült fel.

Az egyik álláspont az volt, hogy az Akadémián olyan számítástechnikai központ működjék, amely üzemelteti a beszerzésre kerülő számológépet, magas szintű szolgáltató tevékenységet fejt ki elsősorban az akadémiai intézmények, de szükség szerint a népgazdaság más területei részére is, emellett alap- és alkalmazott kutatásokat folytat a számítástechnikában és az ezzel kapcsolatos területeken, elsősorban a numerikus analízis és az operációkutatás területén.

A másik álláspont szerint az Akadémia keretében alakuljon egy új, automata számolóközpont, amelynek feladata a gép üzemeltetése és szolgáltató tevékenység folytatása. A számológép kiegészítő berendezések révén közvetlen kapcsolatban lenne az Akadémia különböző intézményeivel, ezek között a jelenlegi Számítástechnikai Központtal, amely kizárólag alap- és alkalmazott kutatásokat folytatna.

A vita során az a vélemény alakult ki, hogy nem indokolt új intézmény létesítése, hanem a jelenlegi Számítástechnikai Központ szervezetét kell úgy kialakítani, hogy az elláthassa az automata számolóközpont feladatait, és egyúttal alap- és alkalmazott kutatásokat folytató matematikai intézmény is legyen. Egységes vélemény alakult ki abban a tekintetben, hogy magas szintű szolgáltató tevékenység csak magas szintű számítástechnikai kutatásokra épülhet. Ahhoz, hogy a Számítástechnikai Központ a beszerzendő számológépet az elmondottak szerint üzemeltethesse, szükséges, hogy mind a vezetésben, mind pedig a létszámban erősíttessék meg, illetve fejlesztessék fel, hogy kettős feladatának mindenben eleget tudjon tenni. A Központ szolgáltató tevékenységével kapcsolatban szükségesnek látszik egy felügyelő, illetve koordináló bizottság alakítása az Akadémia tudományos osztályai és az Országos Tervhivatal képviselőiből, hogy az össz-akadémiai és népgazdasági érdekek a számológép üzemeltetésénél megfelelően érvényesüljenek. A tudományos tevékenység testületi felügyeletére, illetve irányítására megfelelőnek látszik a Matematikai Bizottsághoz tartozó Operációkutatási és Számítástechnikai Albizottság.

3. Gondos előkészítés után ez év elején újból sor került *a magyar és szovjet matematikusok közötti együttműködés továbbfejlesztésére* vonatkozó javaslatok kialakítására. Első lépésként az Osztályvezetőség közös magyar—szovjet kollokvium megrendezését határozta el, amelyre hazánkban 1969-ben a konstruktív függvénytan és alkalmazásai tárgykörben kerül sor. A matematika más ágaiból közös kollokviumok megrendezése ugyancsak tervbe van véve a későbbi években. A fontosabb közös kutatási témákban munkaértekezletek megszervezését szorgalmazzuk, és elősegítjük. Gyümölcsöző lenne, ha az Akadémia az eredeti elgondolásoknak megfelelően központi keretből lehetővé tenné egyes kiváló szovjet matematikusok hosszabb időtartamú meghívását.

Foglalkozott a Matematikai Bizottság egy, a szocialista országokkal közös matematikai intézet megalakításának gondolatával. Ebben az intézetben meghatározott munkaterv alapján közös kutatások, kollokviumok, konzultációk rendezésére kerülhetne sor oly módon, hogy a szocalista országok matematikusai fél vagy egész éves tagságot kapnának megfelelő munkakörülmények biztosítása mellett.

Felmerült szorosabb együttműködés kialakításának szükségessége szovjet matematikusokkal a könyv- és folyóiratkiadás és szerkesztés terén. Indokoltnak találjuk, hogy a két Akadémia a matematika tárgyú könyvkiadási tervét tájékoztatásul időben megküldje egymásnak, hogy sor kerülhessen monográfiák vagy monográfiasorozat közös kiadására.

Ez év őszén matematikus delegáció utazik a Szovjetunióba, hogy a szovjet matematikusokkal az együttműködés konkrét formáiban megállapodás szülessék.

4. Az Akadémia III. és VI. Osztálya felkérte a Szilárdtestfizikai Komplex Bizottságot, hogy készítsen értékelő áttekintést *a hazai félvezető-kutatások* helyzetéről.

A Bizottság a helyzetfelmérést gondos előkészítő munka után készítette el. Meglátogatta azokat az akadémiai és ipari kutatóhelyeket, ahol félvezető-kutatások folynak; a helyszíni látogatások során elemezte az ott folyó munkákat. A meglátogatott intézmények: MTA Központi Fizikai Kutató Intézete, MTA Műszaki Fizikai Kutató Intézete, Félvezető és Lumineszcencia Akadémiai Tanszéki Kutató Csoport (Szeged), MTA Központi Kémiai Kutató Intézete, ELTE Atomfizikai Tanszék, Egyesült Izzólámpa és Villamossági Rt., Híradástechnikai Ipari Kutató Intézet Félvezető Laboratóriuma, Villamosipari Kutató Intézet Félvezető Laboratóriuma és a Távközlési Kutató Intézet laboratóriumai. Ezt követően a Bizottság a hazai eredményeket, célkitűzéseket összehasonlította a külföldi eredményekkel és célkitűzésekkel.

Mindezek alapján kiderült, hogy a hazai félvezető-ipar nem tartott lépést a külföldi fejlődéssel, nem követte a népgazdaság egyes területein mutatkozó gyors fejlődést. Az elmaradásnak több oka van, ezek közül a legjelentősebbek a következők:

a) A külföldhöz képest hazánkban az ipari félvezető-kutatás több év késéssel kezdődött el, és ekkor is az érdekelt szervek igen nagy ellenállását kellett leküzdeni.

b) Évekig csak nagyon kis kutatási kapacitás állt rendelkezésre az alapvető feladatok megoldására, az is szétszórtan, a legkülönbözőbb kutatási helyeken.

c) Az ipari kutatás főleg a napi problémák megoldására, a külföldön már forgalomba került „céltípusok" hazai kifejlesztésére kényszerült. Ez a helyzet az utóbbi években — a Műszaki Fizikai Kutató Intézet és a Híradástechnikai Ipari Kutató Intézet felfejlesztése révén — jó irányban kezd megváltozni.

A hazai félvezető-kutatások mai helyzete a következő:

A Híradástechnikai Ipari Kutató Intézet tevékenysége révén germánium félvezető eszközök gyártása folyik, és ebből az Egyesült Izzó komoly, egyre növekvő forgalmat bonyolít le; emellett jelentős mennyiségű szilícium egyenirányítót gyárt a hazai gyengeáramú ipar ellátására. Ezen eredményeket a MÜFI-ben elért ama tudományos felismerés tette lehetővé, hogy a diódák és tranzisztorok tulajdonságainak időbeli változását a felületen adszorbeált vízréteg okozza. Az ezáltal kiváltott hatások ismeretében jelenleg gyártott félvezető eszközök már jó minőségűek, és kielégítő élettartamúak, de a stabilitást és a megbízhatóságot további kutatásokkal még javítani kell. Nem ez a helyzet a mikrohullámú félvezető eszközök terén, ti. a

Távközlési Kutató Intézetben az e területen folyó kutatások eredményei nem kielégítőek.

A korszerű félvezető eszközök alapanyaga a szilícium, s így a félvezető-ipar fejlesztéséhez ma a legfontosabb teendő a megfelelő paraméterekkel rendelkező szilícium egykristály biztosítása. A fűzfői Nitrokémiai Ipartelepeken már sikerült megfelelő tisztaságú szilícium alapanyagot előállítani, amelyből a Villamosipari Kutató Intézet ipari célokra alkalmas kristályokat állított elő, de a hazai szilíciumgyártás az importnál ma még drágább.

A világszerte gyártott félvezető eszközök anyaga túlnyomórészt szilícium, kisebb mértékben germánium. E két fő alapanyag mellett mind jelentősebb szerepet kapnak bizonyos speciális követelményeknek eleget tevő intermetallikus kristályok, ezek közül is különösen a GaAs. A Fémipari Kutató Intézet a GaAs alapanyag kutatása terén bizonyos részeredményeket ért el, megfelelő minőségű GaAs egykristályt azonban nem sikerült még előállítani. Az ilyen egykristályokat az ipar a Szovjetunióból szerzi be.

Félvezető-iparunknak el kell látnia a hazai műszer- és elektronikus ipar szükségletét. Az összes elektronikus készülékek világszerte a tranzisztorizálódás irányában fejlődnek. Elektronikai iparunk exportlehetőségeit is ez az irányzat szabja meg. Igen fontos tehát, hogy az itthon gyártott félvezető eszközök stabilitása és minősége kedvező legyen, ehhez viszont a felületi jelenségekkel és a kristályhibákkal foglalkozó igen intenzív alapkutatásokra van szükség.

A Szilárdtestfizikai Komplex Bizottság az említett feladatok megoldása érdekében több átgondolt és megalapozott javaslatot dolgozott ki. A félvezető-kutatásokról szóló tanulmányt, továbbá a javaslatokat megküldtük az Országos Műszaki Fejlesztési Bizottságnak, a Kohó- és Gépipari Minisztériumnak és a Nehézipari Minisztériumnak.

5. A Szilárdtestfizikai Komplex Bizottság az Akadémia III. és VI. Osztályának testülete ugyan, de a jövőben erőteljes kapcsolatot kell kiépítenie az Akadémia Kémiai Tudományok Osztályával is, mert a hazai szilárdtest-kutatások érdekében nagy súlyt kell vetni a nagytisztaságú anyagok előállítására.

A Bizottság ezért több alkalommal szorgalmazta a jövő szempontjából igen fontos *nagyérzékenységű fizikai analitikai kutatások* megszervezését, anyagi okok miatt azonban még nem valósulhatott meg az a javaslat, hogy nagyérzékenységű szilárdtest-tömegspektrometriát és mikroszondás analitikai laboratóriumot létesítsünk a KFKI-ban. Eme igen fontos laboratórium létesítésének a költségigénye olyan nagy, hogy azt egyetlen akadémiai osztály sem tudja egyedül a saját keretéből fedezni. A beruházás megvalósításához azonban egyaránt érdeke fűződik az Akadémia III., VI. és VII. Osztályának és az iparnak is, s ezért célszerű lenne annak a megvizsgálása, hogy a három osztály közös erőfeszítése és az OMFB, továbbá a KGM bevonása révén sor kerülhetne-e a laboratórium létrehozására.

6. Az Akadémia alapkutatásokkal kapcsolatos feladatainak ellátását nagymértékben elősegítette Kormányunknak az a határozata, amely a *Központi Fizikai Kutató Intézetet* az Országos Atomenergia Bizottságtól az Akadémiának adta át, 1967. január 1-én. Ezzel az ország legnagyobb alapkutatási intézete, amelyet annak idején az Akadémia alapított, újra a III. Osztály keretébe került vissza, ami elősegítette, hogy a jelentős tudományos eredményeket felmutató, nagytekintélyű intézet szervesen illeszkedjék be az Akadémia alapkutatási koncepciójába, és még szorosabbá váljanak kapcsolatai a többi akadémiai kutatóhelyekkel. Az Intézetnek a III. Osztályhoz való csatolása nagymértékben növelte kutatási kapacitásunkat, de egyúttal felelősségünket is azért, hogy e kutatóhely munkája minél nagyobb mértékben szolgálhassa a társadalmi haladást.

Mint ismeretes, az Osztály annak érdekében, hogy a KFKI felügyeletét és testületi irányítását eredményesen megvalósíthassa, vezető tudósokból és népgazdasági szakemberekből álló testületet alakított, a KFKI Bizottságot, amely az Osztályvezetőségnek van alárendelve.

A KFKI Bizottság és az Osztályvezetőség igen nagy gonddal és felelősséggel foglalkozott számos, az Intézettel kapcsolatos kérdéssel.

A múlt év közepén vitatta meg a KFI Bizottság az Intézet tudományos tevékenységéről szóló beszámolót és a 3. ötéves terv időszakára vonatkozó távlati tudományos tervet. A beszámolót és a távlati tervet előzőleg az Akadémia III., VI. és VII. Osztályához tartozó szakbizottságok és külső szakemberek véleményezték. A vita során megállapítást nyert, hogy az új, önálló tudományos eredmények mind tartalmukban, mind számszerűleg tovább növekedtek, és az alapkutatások mellett intenzív alkalmazott és fejlesztési kutatások folynak az Intézetben. Egészségesen fejlődött a kutatások nemzetközi kapcsolata, eredményesen valósult meg néhány kutatási területen a nemzetközi kooperáció. Egyes műszaki jellegű, illetve alkalmazott kutatások területén a publikációk száma viszonylag kevés volt; ennek oka a műszaki jellegű tevékenység intézeten kívüli megfelelő elismerésének a hiánya is. Bár az Akadémia intézkedéseket hozott már arra vonatkozóan, hogy az említett jellegű tevékenység révén a kutatók megfelelő elismerésben részesüljenek (pl. tudományos fokozat megszerzése stb.), ennek megvalósítása még ma is nehézkes.

Hosszú és gondos előkészítő munka során kialkultak a *KFKI új szervezeti, működési és vezetési alapelvei.* Az alapelvek kialakítása során az Osztályvezetőség többek között a következő szempontokat vette figyelembe:

a) Az Inétzet nagyságrendje, az Intézetben művelt kutatási főirányok különbözősége, viszonylagos önállósága, az Intézet speciális technikai felszereltsége, elhelyezési körülményei stb. az Intézetnek *kutatóközpont* jelleget adnak.

b) Az egyedi körülmények, illetve a komplexitás lehetővé és szükségessé teszik a különböző kutatási irányok, valamint a különböző szakképzettségű és szemléletű kutatók közötti együttműködést.

c) Az önállóság növelése az Intézet szervezetének minden vezetői szintjén.

d) Az egyszemélyi felelős vezetés elvének helyes érvényre juttatása mellett *a vezetés demokratizmusának* növelése, a vezető kutatók alkotó módon történő bekapcsolása az irányítási, döntési és ellenőrzési feladatok ellátásába.

e) Szükségessé vált az Intézet eddigi működése során kialakított vezetési és működési módszerek továbbfejlesztése, a minden huzamosabb ideje működő szervezetnél jelentkező mozdulatlanság feloldása, a gyakorlatban életképtelennek bizonyult szervek és működési elvek megszüntetése, az életképesnek ítélt funkciók erősítése.

Mindezek figyelembevételével az Osztályvezetőség olyan álláspontra jutott, hogy a kutatóközpont vezetésének, működése irányításának alapvető egysége a kutató főosztály, ill. önálló laboratórium legyen. A kutatási irányok műveléséért felelős szervezeti egységek vezetői az Intézet vezetőjével osztják meg a vezetés gondját. A tudományos főirányok vezetőinek legyen áttekintésük és javaslattételi lehetőségük a tudománypolitika és a vezetéspolitika alakítása, a kutatási irányok közti helyes arányok formálása és az Intézet rendelkezésére álló anyagi eszközök elosztása, illetve felhasználása terén.

A vezetés általános decentralizációja mellett a különböző igények optimális kielégítése érdekében biztosítani kell — éppen a kutatóközpontból adódó előnyök kihasználása érdekében — a közös szolgáltatások (számológép, műszaki szolgáltatások stb.) központi irányítását, valamint a nagyvolumenű, összetett feladatok ellátására komplex kutatócsoportok létrehozását.

Az Intézet Kollégiumát az Osztályvezetőség hivatalosan is megszüntette. A túlságosan nagylétszámú Kollégium már két éve nem működött, feladatkörét részben a KFKI Bizottság, részben pedig az igazgatói értekezlet vette át. Az igazgatói értekezleten azonban jelentős tudományos főirányok nem voltak közvetlenül képviselve, és ezért az Osztályvezetőség egy új, kb. 10 fős szerv, az *Igazgató Tanács* létrehozását határozta el.

Az Igazgató Tanács az igazgató (távollétében az első helyettes) elnöklete alatt, az igazgató helyetteseinek és a tudományos főirányok (főosztályok) vezetőinek részvételével működik. Az Igazgató Tanács státuszának meghatározásánál az Osztályvezetőség abból indult ki, hogy a döntés joga az igazgatóé, de szükséges, hogy alapvető kérdésekben (pl. költségvetés, beruházás, központi szolgáltatások elosztása a főosztályok, laboratóriumok között) döntés előtt kötelezően kikérje a Tanács véleményét. A Tanács tagjai bizonyos időszakonként rendszeresen beszámolnak a Tanácsnak a vezetésük alatt álló testület működéséről.

Kutatási irányonként (főosztályokon, laboratóriumokban) *Tudományos Tanácsok* létrehozását látja szükségesnek az Osztályvezetőség.

Az Osztályvezetőség az igazgató feladatává tette, hogy az Intézet működésének rugalmasságát, egységét és egyöntetűségét biztosító vezetés érvényrejuttatása érdekében a szervezet mélységi tagolását a különböző tudományos területeket összefogó igazgatóhelyettesi felügyeleti rendszer fokozatos megszüntetésével egyszerűsíteni kell.

7. A Központi Fizikai Kutató Intézet a Nehézipari Minisztériummal egyetértésben felmérte azokat a feladatokat, amelyek a jelenlegi ismeretek birtokában az Intézetre hárulnak a *800 MW-os atomerőmű* létesítése során. E feladatok egy csoportja az atomerőmű létesítéséhez feltétlenül szükséges hazai tudományos és műszaki kultúra színvonalának emelésére irányul. Az adott helyzetben e feladatkör az Intézetben eddig folytatott reaktorkutatások bizonyos fokú fejlesztését és az adott célra való fokozottabb orientálását igényli. A feladatok másik, ma még részleteiben kevésbé specifikálható csoportja a létesítés munkáiban való konkrét részvételt irányozza elő azokon a területeken, amelyeken az Intézet speciális lehetőségekkel és tapasztalatokkal rendelkezik.

Az ATOMKI ugyancsak felajánlotta, hogy az atomerőmű létesítéséhez bizonyos szakmai problémák megoldásával, kutatási szerződés formájában segítséget nyújt a Nehézipari Minisztériumnak.

8. A radioaktív izotópoknak a tudományos kutatásban, az iparban, valamint a gyakorlati életben való akalmazásánál, kísérleti kritikus rendszerek, kutató reaktorok és energiatermelő atomreaktorok üzemeltetésénél számos *sugárvédelmi és*

biztonsági kérdés merül fel. Az ez irányú feladatok tudományos kutatás és műszaki fejlesztés segítségével oldhatók meg. A tudományos és műszaki eredményeknek a gyakorlatba történő bevezetése és folyamatos ellenőrzése tudományos és műszaki hatósági felügyelet segítségével történhetik.

Hazánkban a sugárvédelem hatósági felügyeletének jelenlegi rendszere nem kielégítő, és nincs felkészülve a reaktorbiztonság problémáira.

Az atomenergia békés felhasználásának egyre növekvő üteme, a hazai atomerőmű építésének elkezdése feltétlenül megköveteli a sugárvédelemmel és reaktorbiztonsággal kapcsolatos tudományos kutatás és műszaki fejlesztés fokozását, valamint az ezekhez szükséges hatósági felügyelet szabályozását.

A sugárvédelem elméleti kérdései a fizikai, kémiai és biológiai alaptudományokkal kapcsolatosak, gyakorlata pedig több műszaki tudományra és az orvostudományra támaszkodik. A sugárvédelem megvalósítása megfelelő műszaki előfeltételek biztosításából, speciális munkamódszerek alkalmazásából, fizikai és műszaki, kis részben pedig orvosi ellenőrzésből és balesetelhárítás biztosításából áll.

Az atomenergia-program növekedésével kapcsolatban a sugárvédelem fejlesztése iránt fellépő fokozott igény hatásosan kielégíthető lenne, ha

a tudományos kutatás irányítását a Magyar Tudományos Akadémia,
a műszaki fejlesztés irányítását az Országos Műszaki Fejlesztési Bizottság,
a tudományos és műszaki hatósági felügyeletet, valamint a kapcsolatos jogszabályalkotást e két szerv, az egyes témákban érintett szaktárcák (elsősorban az Egészségügyi Minisztérum, a Belügyminisztérium és a Nehézipari Minisztérium) bevonásával látná el.

9. *A kisenergiájú atommagfizikai kutatások* területein lelkes és eredményes kutatómunka folyik lényegében hasonló technikai keretek között a KFKI Magfizikai Főosztályán és Debrecenben az ATOMKI-ban. Szerényebb keretben kutatások folynak még az MTA Elméleti Fizikai Kutató Csoportjában, az ELTE Elméleti Fizikai Tanszékén, az Akadémia Izotóp Intézetében és a debreceni KLTE Kísérleti Fizikai Intézetében.

Jelentős beruházás kezdődött az ATOMKI-ban egy öt millió voltos elektrosztatikus gyorsító hazai kifejlesztése érdekében. Az építkezések ez évben már meg is kezdődnek.

A felsorolt intézményekben foglalkoztatott magfizikus kutatók száma nem haladja meg lényegesen a 100 főt, és így — a technikai felszereltséget is figyelembe véve — változatlanul fennáll az az aggasztó helyzet, hogy Magyarország lemaradt az atomkutatásban a szomszédos, hasonló lehetőségekkel rendelkező országokhoz képest.

Rendkívül hiányoznak a nagyobb és kisebb méretű korszerű gyorsítók. Így például a szomszédos országokkal szemben egyedül hazánkban nincs ciklotron, pedig nem lehet a kutatások fejlesztését teljesen külföldön működő gyorsítókra alapozni. Magfizikusaink szerint feltétlenül szükséges az ország teherbíróképességével arányban álló, legalább közepes teljesítményű ciklotron és egyéb nagyobb méretű magfizikai kutatóberendezés felállítása. Csak ilyen feltételek megteremtésével biztosítható a folyamatos tudósképzés, a hazai tudományok számára csak így válhatnak hasznosíthatókká az atommagfizika közismerten nagy jelentőségű eredményei. Nem kétséges, hogy hazánknak egyre nagyobb lemaradása az atomkutatásban nemcsak e tudományban érezteti káros hatását, hanem a többi tudományban és az általános ipari, technikai színvonal fejlődésében is.

10. A *Csillagvizsgáló Intézet* mátrai állomásának a tíz év előtti terv alapján előirányzott felfejlesztése befejeződött. Csillagászaink már tíz évvel ezelőtt is szorgalmazták egy nagyobb (150—200 cm tükörátmérőjű) parabolikus reflektor beszerzését. Erre nemcsak azért lenne szükség, mert csillagspektroszkópiával enélkül nem foglalkozhatnának, hanem a Schmidt-távcső lehetőségeinek teljes kihasználása érdekében is.

A *Napfizikai Obszervatórium* felszerelése teljesen elavult, túlnyomórészt közel százéves műszerekből áll. Ez az oka annak, hogy az Obszervatórium főleg idegen anyag statisztikai feldolgozásával foglalkozik. Modern napfizikai kutatás a Nap mágneses terének vizsgálata nélkül elképzelhetetlen, ezért ilyen mérőműszer beszerzése nélkülözhetetlen és sürgős feladat.

A mesterséges holdak megfigyelésein alapuló tudományos kutatások elnevezésű multilaterális együttműködésben résztvevő szocialista Akadémiák mindegyike beszerezte, vagy a közeljöbőven beszerzi a Zeiss-féle korszerű szputnyikmegfigyelő távcsövet; egy ilyen távcső hazánkban is beszerzendő, esetleg az Űrkutatási Kormánybizottság segítségével. Célszerűnek látszik, hogy az említett Zeiss-fotokamera beszerzése után az Osztály vizsgálja meg az általa irányított optikai szputnyikmegfigyelő állomások helyzetét, vegye át a városi, illetve megyei tanácsoktól az arra érdemes megfigyelőállomásokat, és a csillagászati feladatokat ellátó űrkutatási megfigyelőállomásokból önálló szervezetet hozzon létre.

A III. Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának tevékenysége

FŐBB KUTATÁSI EREDMÉNYEK

Matematika

Matematikai Kutatóintézet

Az intézet kutatómunkája öt fő témacsoportba összefoglalt célok megvalósítására irányult. A vizsgálatok az öt témacsoporton belül 24 konkrétan körülhatárolt témában folytak.

Újabb eredményeket sikerült elérni a valószínűségszámítási módszerek számelméleti, analízisbeli, kombinatorikai, gráfelméleti és geometriai alkalmazásaiban. Sikerült az entrópiamegmaradás törvényét változó költségű jelek esetére általánosítani. Értékes eredmények születtek pontatlanul megfigyelt rekurrens folyamatok jellemzőinek egyetlen realizációból való meghatározása, absztrakt változók és pontfolyamatok dimenziójával és entrópiájával kapcsolatos vizsgálatok, véletlen matrixok, egycsúcsúsági vizsgálatok és keverékfelbontási problémák kapcsán. — További eredmények születtek a matematikai statisztika információelméleti felépítésében. — Sikerült a másodrendű Pólya-sűrűségfüggvénnyel bíró eloszlásokra Csebisev-típusú egyenlőtlenségeket találni, valamint martingálokra vonatkozó iterált logaritmustételt bizonyítani. Eredmény született továbbá a „becslés választás után" témakörben.

Az analízis témakörben újabb eredmények jöttek létre a Mikusinski-féle operátorszámításnak nemlineáris, szinguláris és konvolúció típusú integrálegyenletek megoldására való alkalmazásában, a torziós szilárdsági vizsgálatokban hővezető rendszerekkel összefüggő problémák kapcsán, valamint bizonyos közönséges másodrendű differenciálegyenletek megoldásai zérushelyeinek eloszlásával és a megoldásuk aszimptotikus viselkedésével kapcsolatban. Eredményes vizsgálatok folytak elliptikus differenciálegyenletek perem- és sajátérték-feladatainak numerikus megoldása terén. — Jelentős új eredményeket sikerült elérni a racionális törtfüggvényekkel való approximációban és általában az approximációelméletben; így a jól interpoláló sorozatok vizsgálatában, a próbafüggvények módszere messzemenő kifejlesztésében, valamint az erős approximációval kapcsolatban. — Szép eredmények születtek a komplex függvénytan eszközeinek a matematika egyéb területein való felhasználásában; így az analitikus számelméletben, a Goldbach- és ikerprímproblémákban, a Riemann-féle ún. „pontos" prímszámformulákkal analóg előállítást sikerült adni és a Riemann-féle sejtés feltételezése nélkül igazolni. Analitikus módszer kidolgozására került sor a multiplikatív számelméleti függvények értékeloszlásának vizsgálatában, és igen nehezen igazolhatónak látszó sejtéseket sikerült bizonyítani. Az algebrai egyenletek gyökeinek olyan közelítő meghatározását adták meg, amely gépi számításra felhasználható algoritmust szolgáltat; ezen módszer iránt külföldön — különösen fizikusok között — nagy érdeklődés mutatkozott. Eredmények jöttek létre az abszolút konvergens Fourier-sorok transzformációjának elméletében, amelyek klasszikus tételek általánosításához vezettek.

Az operációkutatással kapcsolatban módszert sikerült kidolgozni a valószínűségileg korlátozott, sztochasztikus programozási modell megoldására. Az algoritmus számológépre való programozása és gyakorlati jelentőségű feladatokra való felhasználása folyamatban van. Algoritmus készült az általános fix-költséges lineáris programozási feladat megoldására kombinatórikus módszerekkel; az elmúlt évben a probléma egy speciális esetének megoldása járt csak sikerrel. Tovább fejlődött az ún. ortogonális vektor-pár módszer, és sikerült bebizonyítani az eljárás végességét.

Az intézetben folyó algebrai kutatások mindenekelőtt az univerzális algebrák területén a teljes algebrai hálók és alkalmazásaik vonatkozásában, gyűrűk maximális féloldali ideáljai terén és a hézagos polinomokkal összefüggésben voltak eredményesek. — További értékes eredmények jöttek létre a diszkrét geometriában, főleg körelhelyezési problémák kapcsán. — Sikerült megállapítani, hogy csak a klasszikus nem-euklideszi geometria esetében lehetséges alkalmasan megválasztott felület segítségével történő olyan modellalkotás, amely az illető geometria metrikáját szolgáltatja. — Jelentős eredmények születtek a szintopogén terek kettős kompaktifikációjával, valamint az iránydimenzió elméletével kapcsolatban.

A matematikai logikai kutatásokban sikerült a sztochasztikus logikai műveletek megbízhatóságát alkalmas módon értelmezni és becsléseket adni a szuperponált függvény megbízhatóságára a szuperpozícióban szereplő függvények megbízhatósága alapján. — A didaktikai csoport eredményesen vett részt az általános iskolai matematikaoktatás fejlesztésére irányuló kísérleti munkában, valamint a speciális matematikai tantervű osztályok problémáinak megoldásában. A tanárok továbbképzésére feldolgozásra kerültek a számkörbővítés elvi és didaktikai problémái. — A matematikatörténeti kutatások eredményeként elkészült a görög matematika kezdeteit tárgyaló monográfia.

Megélénkült az intézet tevékenysége a konkrét alkalmazási problémák megoldásával kapcsolatban; a munkatársak 14 megbízásos feladat megoldásával foglalkoztak. A korábbi évekhez képest 1967-ben nagyobb számban fordultak az intézethez olyan jellegű problémákkal, amelyek ténylegesen lehetővé teszik a tudományos felkészültség kiaknázását, és amely feladatok kapcsán nem a matematika valamilyen mechanikus alkalmazásáról van csak szó, hanem ténylegesen elmélyült kutatómunkát igénylő problémákról. — A matematika alkalmazásai érdekében végzett munka távolról sem csak szerződés alapján, külső megbízásra folyik, hanem a matematikai módszerek felhasználását igénylő más intézményekkel, ill. kutatókkal való tudományos együttműködés formájában is. Ilyen munka folyik többek között a matematika orvosi, biológiai alkalmazása terén, amely az elmúlt évben is több eredménnyel járt. — A külső megbízási rendszer igen jól bevált, és ez is hozzájárult, hogy az intézet elmélyítse kapcsolatait más intézményeknél dolgozó matematikusokkal és más, a matematika alkalmazásával foglalkozó szakemberekkel.

Az intézet munkatársai — kis részben társszerzőkkel — túlnyomórészt idegen nyelven 122, a külső munkatársakat is beleszámítva 154 tudományos dolgozatban publikálták azokat az új tudományos eredményeiket, amelyek 1967-ben kerültek megfogalmazható formába. A dolgozatokon kívül 10 tudományos könyv, ill. egyetemi jegyzet megírására került sor (ezek közül 8 idegen nyelvű), valamint 35 egyéb népszerűsítő, ill. ismeretterjesztő munka jelent meg. Az intézet 5 kutatója védte meg kandidátusi disszertációját. A munkatársak 40 előadást tartottak külföldön rendezett tudományos tanácskozásokon és 15 alkalommal szerepeltek hazai tudományos rendezvényeken; ezenkívül 38 előadást tartottak külföldi tudományos intézményeknél, egyesületekben, 14 alkalommal pedig előadást tartottak hazai tudományos egyesületekben. — Ezeken kívül 44 népszerűsítő és ismeretterjesztő előadást tartottak. Az adatok nem tartalmazzák az intézet belső szemináriumain a hazai, ill. külföldi felsőoktatási intézményekben, valamint a szakmai tanfolyamokon kifejtett működést. — 1967-ben az intézeti szemináriumokon kívül 14 osztályszeminárium működött, ez utóbbiak keretében 294 ülésre került sor; ezeken számos másutt dolgozó matematikus is rendszeresen részt vett. — A kutatók 21 szaktanfolyamon összesen 502 előadást tartottak.

Számítástechnikai Központ

A központ a korábbi évekhez hasonlóan kettős feladatot látott el; egyrészt szolgáltatói jellegűt, másrészt pedig kutatási feladatot.

A kutatás főleg az elméleti jellegű matematikai vizsgálatok, továbbá az elektronikus számológépek és a matematika alkalmazása témakörben folyt. Eredmények születtek az algoritmusok approximalizációja, optimalizálása és stabilitása, valamint az automaták elmélete terén. A „Matematikai nyelvészeti modellek kidolgozása" c. téma a KGST „Természetes nyelvű szövegek elemzése és feldolgozása tudományos műszaki információk fordítása céljából a technikai eszközök optimális felhasználásával "című témacsoport keretében hazánkban a központban folyik.

A szolgáltatás keretében az URAL-2 elektronikus számológépet üzemeltették, és akadémiai, továbbá külső intézetek felkérésére matematikai modelleket, programokat készítettek a központ kezelésében levő URAL-2, valamint a más tárcák tulajdonában levő ICT és GIER gépekre. A munkatársak 6 akadémiai és 31 külső intézmény részére több mint 200 feladatot oldottak meg. A külső megbízásos munkák kisebbik része rutinjellegű volt, nagyobbik része azonban kutatómunkát is igényelt.

A megoldott feladatok jelentős részének gyakorlati hasznosítására már sor került, így pl. az Országos Tervhivatal és az Árhivatal részére készített modellek egy része alapul szolgált a konkrét tervek kidolgozásához. Az ÉVM Pécsi Tervező intézete részére kidolgozott modell és a számítások eredményei alapján tervezték meg a város perspektivikus rendezését, és ezen tapasztalatok alapján készíti az UVATERV az ország valamennyi nagyobb városának a rendezési és fejlesztési tervét. A Beloiannisz gyár a telefonközpontok tervezésében, a Telefongyár pedig a szűrők méretezésében használja fel a központtól kapott eredményeket.

A munkatársak kutatásaik eredményeiről 19 magyar és 25 idegen nyelvű dolgozatot jelenttettek meg, illetve küldtek be közlésre. Megjelentettek továbbá 2 programozási munkáról szóló rövid közleményt, 16 könyvet, ill. jegyzetet és 6 ismeretterjesztő cikket.

MTA Analízis Tanszéki Kutatócsoport

(működik a JATE Bolyai Intézetében)

A csoport 1967-ben alakult az Analízis Tanszék és a Geometriai Tanszék egyes, kutatómunkát végző tagjaiból, továbbá az MTA Matematikai Kutató intézetének addig Szegeden működött funkcionálanalízis és alkalmazásai osztálya tudományos munkatársaiból.

A kutatóhelyen négy témacsoportban folyt kutatómunka.

A tudományos tevékenység eredményei közül kiemelendő, hogy 1967-ben az Akadémiai Kiadó és a Masson et Cie (Paris) közös kiadásában megjelent Szőkefalvi-Nagy Béla akadémikus és C. Foias román professzor „Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert" c. monográfiája, amely a szerzők azon eredményeit tartalmazza, amelyeket a Hilbert-tér operátorainak struktúrájával kapcsolatban az utóbbi években elértek; a monográfiát világszerte nagy érdeklődéssel fogadták.

A csoport feladata az Acta Scientiarum Mathematicarum c. idegen nyelvű matematikai folyóirat kiadása is. 1967-ben a folyóirat 28. kötete jelent meg; e kötetben is — hasonlóan az előzőekhez — a hazai szerzők dolgozatai mellett számos külföldi szerző dolgozata is megjelent. A folyóirat nemzetközi színvonalú, világszerte elismert szaklap.

A csoport tagjaitól egy magyar és tíz idegen nyelvű dolgozat, valamint két idegen nyelvű könyv jelent meg.

MTA Matematikai logikai és automataelméleti tanszéki kutatócsoport

(működik a JATE Bolyai Intézetében)

A csoport 1967-ben alakult az MTA Matematikai Kutatóintézete Szegeden levő Matematikai logikai és alkalmazásai osztályának tagjaiból. A csoport kutatómunkájában részt vesznek a Matematika alapjai és Számítástechnikai Tanszék, az Algebrai Tanszék egyes, kutatómunkát végző tagjai, továbbá az MTA Matematikai Kutatóintézete algebrai osztályának egy munkatársa.

A kutatóhelyen tíz témacsoportban folyt eredményes kutatómunka. A csoport tagjaitól 3 magyar és 14 idegen nyelvű dolgozat jelent meg.

ELTE matematikai tanszékei

Az ELTE Természettudományi Karán működő 6 matematikai tanszéken az 1967. évben a következő témakörökben folytak eredményes kutatások:

Diszkrét geometria, véges geometriák, a geometriai hálózatok elmélete, statisztikus csoportelmélet, új számelméleti szitamódszerek, számelméleti függvények egyértelműségi halmazai, részben rendezett csoportok, approximáció racionális függvényekkel, Riemann-típusú formulák a Goldbach- és ikerprímszámproblémára, gráfelmélet, diofanatikus approximáció, partícióelmélet, a mérhető számosságok elmélete, a szintopogén terek elmélete, számossági problémák az általános topológiában, valós függvénytani problémák, komplex függvénytan, a topologikus mértékterek elmélete, klasszikus és modern variációszámítás, a Banach-algebrák elmélete, az általánosított függvények elmélete, függvénysorok, közönséges és parciális differenciálegyenletek és -rendszerek, matematikai didaktika, Lagrange-féle és trigonometrikus interpoláció, kategóriaelmélet, algebrai topológia, pontfolyamatok, matematikai statisztika, információelmélet, véletlen tagszámú határeloszlástételek, elágazó folyamatok, Kolmogorov—Szmirnov próba, operációkutatás.

1967-ben megjelent a tanszékek dolgozóitól összesen 91 tudományos dolgozat és több könyv.

Fizika

Központi Fizikai Kutatóintézet

A korábbi évekhez hasonlóan az intézet kutatómunkája a fizika és ezenkívül a kémia, továbbá a matematika területére összpontosult.

A nagyenergiájú kölcsönhatások és kozmikus sugárzások témakörben tudományos szempontból kiemelkedő és világviszonylatban is elismert eredményt sikerült elérni az erős kölcsönhatású elemi részecskék vizsgálatában. — A Regge-pólusok elméletében kidolgozták a szükséges parciális hullámkifejtési módszereket és az ábrázoláskeverés elméletét. Sikerült az $I = {}^1/_2$ és $I = {}^3/_2$ nukleonrezonanciákat osztályozniuk az SL(2, C) kevert ábrázolásai szerint. Kezdeményezői voltak a Regge-pólusok ún. „konspiráció" elméletének, amely a nagyenergiájú fizika egyik új és egyre növekvő jelentőségű irányzata. Ez az elmélet a szórási amplitúdók analitikus tulajdonságait és Lorentz-invarianciáját felhasználva, mind a szórási hatáskeresztmetszetek tulajdonságaira, mind a hadronspektrumra vonatkozóan értékes információkat szolgáltat. — Kísérleti vonatkozásban sikeres előkészületek folytak a Szerpuhovi (Szovjetunió) gyorsító segítségével 1968-ban meginduló buborékkamrás és magemulziós kísérletekhez. — Befejeződtek a 2,5 és 10 GeV-es protonok emulziós nyomain végzett „spurions scattering" mérések az irodalomban közölt eddigi vizsgálatoknál nagyságrenddel nagyobb statisztikus anyagon.

Az elméleti fizikai kutatások terén eredményesen folytatódtak a Lorentz-elvre és az általános relativitáselméletre vonatkozó vizsgálatok, amelyek nemzetközileg is nagy érdeklődést keltettek. A vizsgálatok során megmutatható volt, hogy egy térben kiterjedt fizikai rendszer gravitációs térbeli viselkedését a rendszer belső struktúrája lényegesen befolyásolja. Sikerült a korábban homogén tartományra megfogalmazott Lorentz-elvet gravitációs teret is tartalmazó tartományokra kiterjeszteni. — Sikeresen befejeződött az elektron-spin kölcsönhatást figyelembe vevő hidrodinamikai modell kidolgozása; a hidrodinamikai változókra felírt mozgásegyenletekben fellépő külső és belső erőkifejtések egyaránt fizikai értelmezést kaptak.

A magfizikai kutatások terén eredményesen befejeződött az izobár analóg rezonanciák vizsgálata több atommagon. A munkatársak megállapították a $^{28,29}Si(d, p)$ és a $^{14}N(d, p)$ reakciók differenciális hatáskeresztmetszetének energiafüggését az 1—2,5 MeV bombázóenergia-tartományban. Meghatározták a Coulomb-gerjesztéssel létrehozott magállapotok giromágneses faktorait a vas-fém ötvözetek belső mágneses terének felhasználásával. A reaktor neutronnyalábjának segítségével megmérték a ^{132}Xe izotópra vonatkozó hatáskeresztmetszet viszonyt, valamint sok izotópra a neutronbefogást követő gammasugárzás multiplicitását. Eredményesen befejeződött a 14 MeV-es neutronok kisszögű rugalmas szórásánál fellépő anomália kísérleti és elméleti vizsgálata. — A maghasadási vizsgálatok keretében eredményesen befejeződött az alfarészecskékkel járó hármas hasadás relatív gyakoriságának mérése különböző hasadó magoknál és különböző neutronenergiáknál. Számítások végzésére került sor a hasadási neutronok kipárolgási mechanizmusára vonatkozóan. — A Mössbauer-effektus sikeres alkalmazására került sor Mn-Zn ferritek tulajdonságainak, valamint Sn és Dy ionok lefagyasztott oldatban fellépő fázisátalakulásainak tanulmányozása során.

Elsőként sikerült kimutatni azt a jelenséget, hogy a fény akkor is kiválthat fotoelektront fémekből, ha egy fénykvantum energiája kisebb, mint a kilépési munka. Részletes vizsgálatokra kerülhet sor a fotoelektronok áramának az alkalmazott fény intenzitásától, polarizációjától és az alkalmazott fémfelület anyagi minőségétől való függésére vonatkozóan; a kapott eredményeket nemzetközi viszonylatban nagyra értékelik. — Befejeződtek a gerjesztett héliumatom alapállapotban levő héliumatommal való ütközési hatáskeresztmetszetének mérései; a gerjesztett He atom az ütközés következtében eredeti szinglet állapotából triplet állapotba megy át. Minthogy optikai pumpálás alkalmazásával sikerült a zavaró kaszkád folyamatoktól megszabadulni, az irodalomban eddig ismertetett hatáskeresztmetszet értékénél több nagyságrenddel alacsonyabb érték adódott; így sikerült alacsony főkvantumszámok esetén igazolni a Wigner-féle spin megmaradási szabályt. — A gázlaserekkel kapcsolatos optikai mérések során jó eredményt értek el a vékony rétegek optikai tulajdonságainak (reflexióképesség, szórt fény) meghatározására alkalmas módszerek kidolgozásában, valamint gázlaserek intenzitásának interferometriás modulálásával kapcsolatban.

A mágneses fázisátalakulásokkal kapcsolatos vizsgálatok során a Szilárdtestfizikai Laboratórium munkatársai meghatározták az ekviatomhoz közeli összetételű Mn-Pt ötvözetek mágneses szerkezetének és fázisátalakulásának hőmérséklet- és koncentráció-, valamint a Mn-Pd rendszer szerkezetének és fázisátalakulásának koncentrációfüggését. Újabb kísérleti módszerek alkalmazásával tovább folytatták az Fe_3Al és Fe-Rh rendszerek szerkezetének és fázisátalakulásának vizsgálatát, finomítva a rendszerekről alkotott korábbi elképzeléseket. A rendelkezésre álló kísérleti módszerek felhasználásával meghatározták a Mn-Ni és egyes, iparilag is érdekes összetételű Cu—Mn—Ni rendszerek mágneses szerkezetének, fázisátalakulásának természetét. A kritikus jelenségek tanulmányozására neutronspektroszkópiai méréseket végeztek a MnO Néel-pontja, valamint a CO_2 és CS_2 folyadék-gáz fázisátalakulás környékén. — Híg ötvözetekkel végzett kísérleti alapkutatásaik során elsőként mutatták ki a virtuális spinhullámnívók létezését a Fe alapú Fe—Mn, Fe—Er és Fe—Cr ötvözetekben. Sikerült kísérletileg bizonyítani, hogy Cu alapú Cu—Pt ötvözetben a szennyezés és az atommagok között legalább az 50. szomszédig terjedő kölcsönhatás lép fel. — Elméleti vizsgálatok során bebizonyosodott, hogy híg ötvözetek alacsonyhőmérsékleti fajhő anomáliáját homogén spin polarizáció nem okozhatja. Elméletileg értelmezték a paramágneses szennyezést tartalmazó oxidrétegű alagútdiódák karakterisztikáin fellépő óriásanomáliákat is. Az Al alapú Al—Ta híg ötvözeteknél kapott kísérleti eredményeiket virtuális elektronállapotok és esetleg lokalizált fononállapotok feltételezésével magyarázták. — A kísérleti technika fejlesztése során a mérések hőmérséklettartományát sikerült 2 °K-ig kiterjeszteni. A korrelációs elv és a spin flipperes neutronszaggatás összehasonlításával, valamint egy sokcsatornás analizátor speciális kiegészítésével új típusú, nagy fényerejű neutronspektrométert építettek.

A kémiai főosztály keretében működő aktivációs analitikai részleg — mint e kutatások hazai bázislaboratóriuma — tovább folytatta az országos igények kielégítését célzó tevékenységet. Speciális kutatási feladatok megoldásával és egyre növekvő volumenű szolgáltatásaikkal elsősorban a híradástechnika és a finomkohászat számára nyújtottak értékes segítséget. A Dunai Vasműbe telepített, acélok oxigéntartalmának express elemzésére szolgáló — világviszonylatban is újszerű — céllaboratóriumuk gyártásközi ellenőrzésére és adagvezérlésére történő alkalmazása eredményesen megkezdődött. Kidolgoztak egy gázkromatográfiás izotópnyomjelzési módszert, amely előnyösen alkalmazható stabil izotópokkal jelzett vegyületek előállításánál. — Kifejlesztettek egy nagy pontosságú izotóp aránymérési módszert, amely geofizikai és hidrológiai alkalmazása révén fontos szerepet tölthet be az adott területeken. — Értékes eredményeket értek el a ritkaföldek ioncserés elválasztásában; a kapott eredmények ritkaföld célanyagok tisztítása és feldolgozása, valamint a ritkaföldek technológiája számára jelentősek. — Eredményesen lezáródott a wolframban történő szilíciummeghatározás neutrongenerátoros módszerének kidolgozása.

A reaktorfizikai és technikai kutatások elsősorban a kutatóreaktor rekonstrukciójához kapcsolódtak. A rekonstrukció előkészítése céljából megépítettek egy kritikus rendszert (ZR—3), és elvégezték rajta a rekonstruált kutatóreaktor teljes zárókísérletét; kísérleti úton meghatározták az optimális zónakonfigurációt, több különböző konfigurációjú zónában Rossi-féle alfa-módszerrel mért értékek alapján vizsgálták a berillium reflektorhatását a zóna kinetikai viselkedésére, továbbá fóliás mérésekkel meghatározták az elemi cellák mikrofluxus eloszlását, s ebből a cellák hőtermelését. A reaktorral szemben támasztott új igények kielégítése csakis egy nagyobb volumenű rekonstrukcióval volt megoldható; a rekonstrukció során sikerült biztosítani a hasznosítható neutronfluxus megkétszerezését, a kísérleti és besugárzási lehetőségek korszerűsítését, valamint a reaktor további üzemeltetéséhez feltétlenül szükséges berendezések létesítését. — A hazánkban építendő 800 MW-os atomerőmű létesítésével kapcsolatban tudományos és technikai problémák elemzése alapján meghatározták a várhatóan az intézetre háruló tudományos szintű feladatokat az atomerőmű biztonságos és gazdaságos üzemeltetésével kapcsolatban.

A sugárvédelem keretében folytatott dozimetriai kutatások során sikeresen befejeződtek a termolumineszcens típusú üvegek előállítására és dozimetriai felhasználására vonatkozó vizsgálatok. A kifejlesztett doziméter bevezetésre került az intézetben a nagy, baleseti jellegű dózisok mérésére. Eredményesen kidolgozták a mérés és védekezés módjait a triciumtargetekkel foglalkozó munkahelyek számára.

— Eredményes számításokat és méréseket végeztek félvezető detektoroknak gyorsneutrondózisintenzitás mérésére való alkalmazásával kapcsolatban.

A matematikai kutatások során értékes eredményeket értek el a speciális és általános relativitáselmélettel kapcsolatos algebrai vizsgálatok során a Lorentz-ekvivalencia fogalmának pontosabbá tételére és a Lorentz-ekvivalens rendszereket összekötő transzformációkra vonatkozóan. — Új numerikus eljárást dolgoztak ki normális eloszlású sűrűségfüggvények keverésének komponensekre való bontására, valamint nemlineáris regressziós feladatok megoldására. Tovább folytatódott a leképezés-félcsoportok elméletére vonatkozó vizsgálat, és foglalkoztak a kapott eredményeknek az információk gazdaságos tárolásánál való alkalmazhatóságával. Elkészült egy, az események térbeli visszaállítását végző geometriai, valamint egy, a Bole-függvények minimalizálására vonatkozó program.

Kiemelkedő eredmények születtek az intézet ICT-1905 elektronikus számológépének alkalmazásával kapcsolatban. Befejeződött az intézeten belüli adatfeldolgozási célokra kifejlesztett kis számológép (TPA) központi egységének és lyukszalagberendezésének felépítése; a megépített számológépmodell 1967 végén tartós üzemi próbára került. A modell software-jéhez kidolgoztak egy olyan szimulátorprogramot, amelynek segítségével a TPA utasításrendszeréhez írt programok az ICT-1905 számológépen lefordíthatók és futtathatók. — Sikerült végrehajtani a számológép első on-line üzemeltetését a reaktorzajméréssel kapcsolatban. — A számológépek alkalmazása során az egyes feladatoknál a feldolgozásra kerülő adatokat fizikai keletkezési helyüktől közvetlenül elektronikus úton kell a számológép memóriájába juttatni, ill. a feldolgozás eredményét a számológéptől közvetlenül a rendeltetéshelyre továbbítani. Ilyen on-line kapcsolat esetén az elektronikus adatátviteli kód és a számológép szokásos számábrázolása között átalakító szubrutin rendszert kell készíteni; ennek megfelelően elkészültek az intézetben a szükséges kódfordító programok (telex, ELIOT, GIER), valamint az on-line mérés kiértékelésekhez szükséges input-output rendszer.

Az intézet munkatársai által publikált tudományos cikkek száma — túlnyomórészt idegen nyelven — 190, a könyvek száma 10 volt, a megtartott tudományos előadások száma pedig 156. Az Országos Találmányi Hivatal által 1967-ben megadott szabadalmak száma 9, az újonnan bejelentett találmányok száma 6 volt. A megelőző évekhez hasonlóan az intézet 46 munkatársa kapcsolódott be az egyetemi oktatásba. Mintegy 60 diplomamunkás kapott lehetőséget az intézetben folyó fizikai, kémiai, matematikai és elektronikus kutatásba való bekapcsolódásra. Az elmúlt évben több egyetem, kutatóintézet munkatársának lehetőséget biztosítottak, hogy vendégkutatóként bizonyos ideig az intézetben dolgozzanak. — Igen kiterjedt, széles körű belföldi és nemzetközi kapcsolata van az intézetnek. Ezek közül első helyen említendő a dubnai Egyesített Atomkutató Intézet; a kapcsolat egyik formája, hogy több munkatárs dolgozik hosszabb ideig a dubnai intézetben. A CERN-től emúlziós anyagot, valamint buborékkamrás felvételeket kapott az intézet feldolgozásra. A magkémiai kutatások nagy részét, valamint az aktivációs analitikai módszerek vizsgálatát KGST együttműködés keretében végzik. Jó kapcsolat alakult ki a moszkvai Kurcsatov Atomenergia Intézettel, az Alma-Ata-i és a taskenti fizikai intézetekkel, az obnyinszki Fizikai Energetikai Intézettel stb. — 1967-ben 23 belföldi rendezvényen 173, külföldi tanulmányúton pedig 182 munkatárs vett részt.

Az intézet költségvetési létszáma 1200 fő, ebből tudományos munkatárs 277 fő.

A külső megbízásos dolgozók létszáma 320 fő, ebből 33 fő tudományos dolgozó. Az intézet összlétszáma tehát 1520 fő. A tudományos dolgozók közül 132 fizikus, 22 matematikus, 48 kémikus, 83 villamosmérnök, 22 gépészmérnök. A tudományos fokozattal rendelkező dolgozókra vonatkozó adatok: akadémikus 1 fő, akadémiai levelező tag 1 fő, a tudományok doktora 6 fő, a tudományok kandidátusa 37 fő. Az intézetből 1967-ben 7 kandidátusi disszertáció került továbbításra a Tudományos Minősítő Bizottsághoz.

Atommagkutató Intézet

Az intézet tudományos tevékenysége hat téma köré csoportosult. Kiemelkedő eredmények:

— A $^{19}F(d, p)\,^{20}F$ magreakcióból eredő protoncsoportok szögeloszlásainak mérése, és az eredmények DWBA analízise;

— $^{24}Mg(d, p)\,^{25}Mg$ magreakcióból eredő protoncsoportok szögeloszlásának mérése;

— $^{19}F(d,$ alfa$)\,^{17}O$ magreakciókból eredő alfa csoportok szögeloszlásának mérése a bombázó energia függvényében;

— Szilárdtest nyomdetektorok tulajdonságainak vizsgálata és módszer kidolgozása ezen detektorok magreakciókból származó alfa-részek szögeloszlásának mérésére;

— Neutronok polarizációjának vizsgálata a $D(d, n)^3He$ reakciónál;

— Gyorsneutronok radiációs befogásának vizsgálata;

— (n, t) magreakciók hatáskeresztmetszetének meghatározása;

— A tiszta pozitron emittáló ^{11}C bomlásában belső fékezési sugárzás kimutatása;

— A ^{22}Na bomlásában az elektronbefogás és a pozitronemittálás közötti elágazási viszony nagypontosságú meghatározása;

— A ^{54}Mn bomlásában 10^{-7}/bomlás nagyságrendű felső határ megállapítása a pozitronok jelenlétére;

— A ^{27}Mg és a ^{145}Sm bomlási sémájának vizsgálata során új gammavonalak felismerése;

— A ^{143}Pm konverziós vonalaira vonatkozó vizsgálatok;

— A toroid-szektor típusú béta-spektrométer paramétereinek lényeges javítása;

— A légkör ^{85}Kr-től eredő radioaktivitásának vizsgálata;

— Jelentős továbbhaladás történt annak a tudományos felismerésnek a hasznosítására, hogy láptalajokon tőzeghumuszsavak a nyomtápelemeket megkötik és így a növények éheznek. Kooperációs kísérletek indultak a keszthelyi Agrártudományi Főiskola Növénytermesztési Tanszékével, amelyek eredményesen folynak;

— A felszínközeli kontamináció szerepének közvetlen kimutatása a Tokajhegység kőzettípusainak kialakításában;

— Félvezető detektorokhoz szolgáló kis zajszintű spektroszkópiai elektronika kifejlesztése.

Népgazdasági szempontból is kiemelkedő eredménynek tekinthető a nyomtápelemek tőzeghumuszsavakon történő szorpciójának a megállapítása. A laboratóriumi kísérletek eredményei arra utalnak, hogy a tőzeges láptalajokon a kultúrnövényeknél tapasztalható hiánybetegségek oka a mikrotápelemeknek a talaj humuszsavtartalmán való megkötődése, mielőtt még a növények hasznosítanák őket. A nyomtápelemek megkötődésének laboratóriumi kvantitatív meghatározása után 1967-ben a keszthelyi Agrártudományi Főiskola Növénytermesztési Tanszékével a gyakorlati hasznosítás módjának megvizsgálására közösen melegházi tenyészedény-kísérletek kezdődtek. Mivel hazánkban százezer hektár a terméketlen lecsapolt lápos talajok területe, az ilyen vizsgálatok népgazdasági jelentősége igen nagy.

Az intézet kutatóitól és a vendégkutatóktól 54 magyar és 58 idegen nyelvű dolgozat jelent meg, ill. van megjelenés alatt. A hazai és külföldi tudományos rendezvényeken megtartott előadások száma: 34. A beszámoló évében kandidátusi disszertációt 3, egyetemi doktori disszertációt 9 fő adott be, vagy védett meg. Ezzel az intézet 41 kutatója közül 29 főnek van egyetemi doktorátusa, vagy ennél magasabb tudományos fokozata, illetve képesítése.

A gyorsneutronokkal létrehozott magreakciók vizsgálata c. témát az intézet 1967 végén a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Tanszékének adta át; ezzel az intézetben megszűnt a neutronfizikai osztály működése, és ugyanakkor sor került nukleáris elektronikus osztály szervezésére.

Az intézet nemzetközi kapcsolata jelentős. Több témában eredményes kutatások folytak, így pl. a dubnai Egyesített Atomkutató Intézettel való együttműködésben a magspektroszkópia, a proton-radioaktivitás, valamint a nukleáris elektronika terén.

Az intézet kapcsolata a gyakorlattal jól fejlődik, így pl. 1967-ben 3 találmányi bejelentésre került sor. Egy korábban elfogadott találmány — eljárás és berendezés elemi részecskék fajta szerinti azonosítására — ipari átvétele folyamatban van. Az intézetben kifejlesztett nukleáris elektronikai műszerek 1967-ben kiállításra kerültek Dubnában, amelynek eredményeként a Szovjetunió Tudományos Akadémiája megrendeléssel fordult a Magyar Tudományos Akadémiához. A műszerek ipari gyártásba vételére a GAMMA Művekkel tárgyalások folynak.

Elméleti Fizikai Kutatócsoport

A csoportban nyolc témakörben folyt kutatómunka. A főbb eredmények a következők:

Gombás Pál akadémikus a pszeudopotenciálok elmélete és alkalmazásuk tárgykörről — melyben 1935-től úttörő munkásságot végzett — egy monográfiát írt Pseudopotentiale címmel, melyben elsősorban saját és munkatársai eredményeit ismerteti, de részletesen kitér az e területen külföldi szerzők által elért eredményekre is, sőt a könyv eddig nem publikált új eredményeket is tartalmaz, többek között a kicserélődési potenciálok egy korrekcióját, amely máris igen élénk külföldi visszhangot keltett.

A csoport által kidolgozott egyszerűsített self consistent field módszert alkalmazták a periódusos rendszer első 54 elemére.

A csoport munkatársai kidolgozták egy olyan statisztikus magmodell alapegyenleteit, amely összhangban állt a két nukleon közti magerők ma ismert legjobb közelítésével, az ún. softcore potenciálokkal, másrészt figyelembe veszi a végtelen maganyag szerkezetének kutatásában elért eredményeket.

Vizsgálat tárgyává tették a többvalenciás szilárd testekben a potenciál self consistent field jellegét és megállapították, hogy az kis módosítással lényegesen javítható.

Megvizsgálták az egzakt 2N-elektron hullámfüggvény sorbafejtésének lehetőségét erősen orthogonális többrészecske-függvényekből felépített hullámfüggvények szerint. Kimutatták, hogy egyszerű szorzat-típusú hullámfüggvény használata esetén elhanyagolt tagok perturbációszámítás segítségével könnyen figyelembe vehetők.

A trion-modell dinamikai sajátságait vizsgálták nemlineáris spinoregyenlet segítségével. Az effektív tömegoperátort és az általánosított formafaktorokat egy variációs probléma megoldásaiként definiálták.

Vizsgálatok folytak a nemlokális szeparálható magerő-potenciálmodellen alapuló maganyag elméletével kapcsolatban. Könnyű magok esetére Unrestricted Hartree-Fock számítások folynak.

Megvizsgálták csoportfüggvények alkalmazási lehetőségeit a kvantummechanikai többtest problémában. Kimutatták, hogy ebben az esetben a teljes hullámfüggvénynek a Hamilton operátor és bizonyos kicserélődési operátorok egyidejű sajátfüggvényének kell lennie.

Kimutatták, hogy a Lorentz-csoport pszeudo-Young-Mills típusú. Ha a gravitációs tér egy nem-vákuum Einstein sokaság, akkor a Lorentz-csoport 6 paraméteres, a csoport tere pedig 6 dimenziós metrikus tér. A tereket összekötő transzformációk pszeudocsoportot alkotnak.

A csoport tagjaitól 2 magyar nyelvű és három idegen nyelvű dolgozat és 1 idegen nyelvű monográfia jelent meg.

MTA Elméleti Fizikai Tanszéki Kutatócsoport
(működik az ELTE Elméleti Fizikai Intézetében)

A csoport kutatómunkája két témakörben folyt.

A gyenge kölcsönhatásokra vonatkozó kutatások során a csoport tagjai megvizsgálták, miként jelentkezik a neutretto véges nyugalmi tömege a müonbomlásnál, ha a sugárzási korrekciók figyelembevételére is sor kerül. — Az elemi részek algebrai rendszerezésével kapcsolatban befejezték annak a vizsgálatát, hogy miként sorolhatók be a magasabb rezonanciák egy SU (6)-szkémába. Eredményesen vizsgálták a pozitív paritású mezonok bomlásait, és a negatív paritású barionok tömegspektrumát. A CP-sértő kölcsönhatás vizsgálata során annak a lehetőségét analizálták, hogy a CP-sérülés forrása egy delta $I=3$ izospin kiválasztási szabállyal jellemzett erős kölcsönhatás. —

Az áramalgebrákban és térelméletben folyó kutatások kiszélesedtek.

Eredményesen folyt a kollektív rendszerek általános törvényszerűségeinek a tanulmányozása statisztikai és fenomenológiai módszerekkel; ennek keretében foglalkoztak az atommagok szintsűrűsége meghatározásának problémájával félklasszikus és kvantummechanikai módszerekkel, az atommagok kötési energiájával, amelynek során a szilárdtestek kohéziós energiája számításának kérdését állították párhuzamba. Kiszámították a maganyag szimmetria és átrendezési energiáját; meghatározták a neutron csillagok energiáját. A perturbációs sor szerkezetének elemzésével kapcsolatot mutattak ki a He^4 folyadék egyrészecske és kollektív gerjesztései között. Vizsgálták a sokrészecske rendszerek kritikus hőmérséklet körüli viselkedését; dinamikai skálatörvényeket javasolták, és ezeket a hélium folyadék lambda fázisátalakulásának leírására alkalmazták. A kísérletekkel való jó egyezés a dinamikai skálatörvények feltételezését alátámasztja. — Az előző években megkezdett vizsgálatok folytatásaképpen 1967-ben a plazmák statisztikus leírása terén a plazmarezgésekre irányult a figyelem. Ennek keretében megvizsgálták a relativisztikus Boltzmann-egyenlet relaxációs időközelítéses megoldását, és ily módon levezették a plazma elektromos és hővezetőképességének képleteit.

A csoport tagjaitól számos magyar és 29 idegen nyelvű dolgozat jelent meg, ezeken kívül az elemi részek elméletéről monográfia is készült.

MTA Kristálynövekedési Tanszéki Kutatócsoport

(működik a BME Építőmérnöki Karának Kísérleti Fizikai Tanszékén)

A magképződés és a kristálynövekedés vizsgálata keretében tovább folytatódott a „lavinajelenség" tanulmányozása. Sikeresen befejeződtek a nagyméretű NaCl kristályok növesztését célzó kísérletek és folytatódik a tűkristályok növekedési feltételeinek vizsgálata. Eredményesek voltak a kristályhibákra vonatkozó vizsgálatok is. Jó ütemben haladtak a fizikatörténeti kutatások, amelyek nagyban hozzájárulnak az egyetemes tudománytörténet előrehaladásához.

A csoport tagjaitól 12 magyar és 1 idegen nyelvű dolgozat jelent meg.

MTA Lumineszcencia és Félvezető Tanszéki Kutatócsoport

(működik a szegedi JATE Kísérleti Fizikai Intézetében)

A kutatócsoport munkája két fő területre, nevezetesen a lumineszcencia-kutatásokra és a félvezető-kutatásokra irányult. A kutatóhelyen 7 témacsoportban folyt kutatómunka.

A lumineszcencia általános jellegű kérdéseinek vizsgálata során kísérletileg meghatározták igen kicsiny koncentrációjú oldatok hatásfokfüggvényét, és összehasonlították ezt az entrópiatörvény alapján kiszámított korlátfüggvényekkel. A lumineszcencia hatásfokának tanulmányozása keretében rendszeres kutatások folytak a hatásfok hullámhosszfüggésére, a csillapodási időre és e két lumineszcencia jellemzőnek a színképekkel való kapcsolatára vonatkozóan. Az intra- és intermolekuláris energiaátadás vizsgálata terén sor került az energiaátadást jellemző paraméterek spektrofotometriai alapon való meghatározására.

A germánium és szilícium kilépési munkájának, felületi potenciáljának és sávfelhajlásának kutatása keretében a szükséges mérések megtörténtek. Eredményeket sikerült elérni a Ge-elektrolit határfelületek felületi rekombinációs viszonyaira vonatkozóan. Megvalósult egy új metodika is a felületi rekombinációs sebesség mérésére.

Eredményesen folytak a fizikatanítás korszerű struktúrájával kapcsolatos vizsgálatok is.

MTA Kristályfizikai Tanszéki Kutatócsoport

(működik a BOTE Orvosi Fizikai Intézetben)

A kutatómunka két főterületre irányult: szilárdtestfizikai és orvosi vonatkozású fizikai és biofizikai vizsgálatok.

A kristályhibák tulajdonságainak és természetének vizsgálata keretében — különös tekintettel az ionizáló sugárzások hatására — a röntgenezett KCL (Ca) rendszer esetén abszorpciós ESR és ITC mérések alapján a csoport munkatársai modellt állítottak fel a szobahőmérsékleten stabil V_2^M-centrumokra, valamint a szobahőmérsékleti színezés mechanizmusára vonatkozólag. A modell alapján meghatározták a V_K^M és V_2^M sávok oszcillátorerősségét. — Tanulmányozták az ionkristályok elektromos töltéssel rendelkező diszlokációit és deuteronokkal besugárzott kristályok esetében igazolták, hogy a deformáláskor észlelt elektromos feszültség különböző irányú elemi erőterek eredőjeként jön létre.

Az NaCl egykristályok előállítására szükséges anyag tisztaságának fokozása érdekében összehasonlították a különböző tisztítási eljárásokat (többszörös átkristályosítás teflonedényben, vákuumban való desztillálás, ioncserélő gyantán átbocsátás segítségül vétele stb.) és ennek során nemcsak elvi jelentőségű, hanem az ipari előállításban is értékesíthető eredményekhez jutottak (10^{-7} mol/mol tisztaság).

Több értékes eredményt értek el az egyes fizikai ágensek által kiváltott struktúra- és funkcióváltozások tanulmányozása során, amelyet biológiailag fontos makromolekulákon, illetve egyszerű biológiai rendszereken végeztek.

Az Egyesült Gyógyszer- és Tápszergyár felkérésére a csoport vizsgálatokat végzett egyes új magyar gyógyszerek (Halidor és Egy. T-739) szétesési, felszívódási és eliminiciós viszonyainak tisztítására. A csoportban kidolgozott Na J (Tl) szcintillációs kristályok és a szabadalmat is nyert szcintigráf ipari gyártása az 1967. évben is tovább folyt.

A csoport tagjaitól 24 dolgozat, könyv, könyvrészlet jelent meg (ebből 8 idegen nyelven).

Csillagászat

Csillagvizsgáló Intézet

Az 1967. év a derült éjjelek számban az intézet fennállása óta maximális volt, úgyhogy mindegyik használatban levő teleszkóppal igen sok megfigyelést sikerült gyűjteni.

Az új 50 cm-es Cassegrain-teleszkóppal megkezdődtek a megfigyelések. Kedvezően haladt 1967-ben az intézet mérőműszerekkel való felszerelése; ily módon az intézet műszerekkel való felszerelése jelenleg komplettnek tekinthető, de továbbra is fennáll egy nagyobb tükörteleszkóp beszerzésének a problémája.

Az intézetben — amelyhez a budapesti, a mátrai és a bajai obszervatóriumok, valamint a budapesti, bajai, miskolci, szombathelyi szputnyikmegfigyelő állomások tartoznak — öt témacsoportban végeztek kutatómunkát.

A változócsillagok témakörben a Blasko-effektusra vonatkozó vizsgálatok keretében sikerült meghatározni az AR Ser RRab-csillag szekundér periódusát. Megállapították, hogy a TT Cnc és CZ Lac RRab változók is Blasko-effektust mutatnak, viszont az AN Ser és a XX And külföldi megfigyelők állításával szemben nem mutat ilyen effektust. — Folytatódtak a kozmogóniai szempontból fontos RU Cam II. populációs cefeida fényelektromos megfigyelései; az intézet munkatársai által megjósolt amplitúdónövekedés bekövetkezett. — Eredményesen foglalkoztak a változócsillagok irreguláris és periódusos osztályának olyan egységes elképzeléseivel, melyek szerint az alapvető fizikai folyamatok minden valódi változónál a Nap-aktivitáshoz hasonló jelenségek.

A stellarstatisztika témakörben mintegy 850 felvétel készült a mátrai Schmidt-teleszkóppal. A spektrálfelvétel kiértékelése révén az OB klasszifikáció során kiderült, hogy az OB csillagok gyakorisága a H I ködökben igen alacsony, területenként csupán 2—3. — A szupernova program a mátrai obszervatóriumban levő Schmidt-teleszkóppal rendszeresen folyt; ennek keretében 1967-ben sikerült az NGC 3899 orsós spirálisban egy 14. rendűnél is fényesebb szupernovát találni.

Eredményesen folytak a mesterséges holdak rendszeres vizuális és fotografikus megfigyelései; így pl. a bajai állomás sikerrel vett részt az ún. „afrikai kampányban", amelynek keretében sok felvételt sikerült Malival és Egyiptommal szinkronban készíteni. — A munkatársak numerikus eljárást dolgoztak ki az égi egyenlítőn való áthaladás időpontjának pontosabb meghatározására a Lozinszkij-módszer finomítása érdekében. — Sikerült az Interobs-észlelések feldolgozásában általánosan használt módszert két irányban is általánosítani. — Francia kutatókkal közösen végzett vizsgálatok során kimutatták, hogy a klasszikus alapok révén kifejlesztett Barlier-féle módszer az Interobs-nál használt módszerekkel egyező eredményeket ad.

A magneto-hidrodinamika témakörben sikerült a Nap-ciklus 22 éves és 80 éves periódusa között kapcsolatot találni. Ezenkívül kiszámították a poláris térerősség változását is kb. 200 éves szakaszra.

Az extragalaxisok statisztikus vizsgálata keretében folytatódott a galaxis-halmazok struktúrájának empirikus kutatása a Palomar Sky Atlas segítségével és ennek keretében meghatározták az összes ismert vöröseltolódású gazdag galaxis-halmazok átmérőjét. Ezek segítségével megkonstruálták a látószög-vöröseltolódás kozmológiailag fontos relációit 40%-os fénysebességig; a vizsgálatok több érdekes eredményre vezettek.

Az intézet kutatói 3 magyar és 15 idegen nyelvű publikációt készítettek. Ezeken kívül az intézet kiadta az Informationen Bulletin on Variable Stars Nemzetközi Csillagászati Unió kiadvány 176—240. számát.

Napfizikai Obszervatórium

Az obszervatórium életében — mind tudományos, mind pedig a nemzetközi együttműködést illetően — a legjelentősebb eseményre 1967-ben került sor; ugyanis a Nemzetközi Csillagászati Unió a 35. szimpóziumát Nap-fizikai témakörből az obszervatóriumra telepítve 1967-ben Magyarországon rendezte meg. A szimpózium szűkebb témaköre a szoláris aktív vidékek szerkezete és fejlődése volt.

A munkatársak a Nap-foltokra vonatkozó statisztikai jellegű kutatásaik legújabb eredményeit a szimpóziumon ismertették; az erről szóló közlemény a Hollandiában kiadásra kerülő „IAU Symposium No. 35." kiadványban jelenik meg. A vizsgálatok végeredménye, hogy a Nap-foltjelenség oka nem, vagy legalábbis nem teljesen olyan folyamattól ered, amely a Nap külső felületén — fotoszférájában — játszódik le.

A TESTÜLETEK TEVÉKENYSÉGE

A testületek rendszeresen foglalkoztak a hozzájuk tartozó intézmények tudományos beszámolóival és terveivel, az illető tudományág belföldi és nemzetközi kapcsolataival, könyv- és folyóiratkiadási ügyekkel, egyetemi tanári és docensi pályázatok elbírálásával. Ezen rendszeresen visszatérő feladatokon kívül a testületek tevékenysége a következő kérdésekre irányult:

Matematika

A Matematikai Bizottság javaslatot készített a *hazai biometriai kutatások* rendezésére vonatkozóan, és ennek keretében többek között indítványozta, hogy az Egészségügyi Minisztérium létesítsen egy biometriai központ szerepét betöltő intézményt. — Szorgalmazta, hogy a magyar és a szovjet matematikai intézmények az eddigieknél szélesebb körű és közvetlenebb kapcsolatot létesítsenek; javasolta közös tudományos tanácskozások rendezését. — Véleményezte a Budapesti Műszaki Egyetem által megküldött „BME Műszaki Matematikai Intézete" létesítésére vonatkozó javaslatot. — Javaslatára az Osztályvezetőség megalakította az *Operációkutatási és Számítástechnikai Albizottságot.* A megalakított testület a Matematikai Bizottság irányításával végzi feladatát. Az albizottság egyik legfontosabb és legsürgősebb teendője, hogy javaslataival, tanácsaival segítséget nyújtson a Számítástechnikai Központnak az Akadémia által a közeli időben beszerzendő elektronikus számológép fogadására vonatkozó felkészülésben.

Fizika

A Fizikai Bizottság — a Szovjetunió Tudományos Akadémiája küldöttségének magyarországi tapasztalataival megegyezően — megállapította, hogy a *félvezetők vizsgálata* terén a magyar kutatók párhuzamos kutatásokat folytatnak nemcsak a Szovjetunióval és a szocialista országokkal, de országon belül is. Ezek rendezésére javaslat készült. — Fontosnak tartja a bizottság, hogy a szép hagyományokkal rendelkező *hazai kristályfizikai kutatásokra* a jövőben nagyobb gond fordíttassék, mert e vizsgálatok az elektronikai kutatások nagy részét meghatározzák. — A bizottság felmérést készít a hazai fizikai intézmények műszerhelyzetéről és azt a közeli időben megvitatja. — Foglalkozott a külföldi kiküldések politikájával, a kiküldések hasznosításával kapcsolatos problémával. — Foglalkozott a bizottság az 1971-ben hazánkban tartandó Nemzetközi Akusztikai Kongresszus előkészítésével (a kongresszust az MTA VI. Osztálya szervezi), és előkészítette a Nemzetközi és Alkalmazott Fizikai Unió szocialista országokban működő nemzeti bizottságai titkárainak Varsóban tartott tanácskozásán a magyar részvételt.

A Szilárdtestfizikai Komplex Bizottság foglalkozott a *ritka földfémek* hazai helyzetével, több alkalommal megvitatta a *hazai félvezető-kutatások* helyzetét; az utóbbival kapcsolatban a sokrétű és nehéz problémák megoldására javaslat készült. — Megkezdte a bizottság az 1969-ben Budapesten tartandó „Félvezető heteroátmenetek és rétegszerkezetek fizikája és kémiája" témakörű nemzetközi konferencia előkészítését (a konferenciát az MTA VI. Osztálya szervezi).

A KFKI-Bizottság értékelte a KFKI 1966. évi tudományos tevékenységét és megvitatta a 3. ötéves terv időszakára szóló távlati tudományos tervet; előzőleg a beszámolót és a tervet az Akadémia III., VI. és VII. Osztályához tartozó, szakmailag illetékes testületek és külső szakemberek is véleményezték. — Foglalkozott a bizottság az intézet szervezeti és működési szabályzatának alapelveivel; ezen belül az új vezetési módszerekre vonatkozóan javaslatok elfogadására került sor. Kialakította a bizottság az intézet új gazdálkodási rendjének alapelveit. Megvitatta azt a javaslatot, amely azzal foglalkozott, hogy a KFKI maximális segítséget nyújtson a hazai első atomerőmű létesítéséhez.

Az Atomhéjfizikai Albizottság előkészítette az 1967-ben Debrecenben és Balatonszéplakon tartott 2 hetes Nemzetközi Kvantumkémiai Nyári Iskolát. — Megtekintette a Vegyipari Tröszt Számolóközpontját és tájékozódott az ott folyó atomhéjfizikai kutatásokról.

A Magfizikai Albizottság meglátogatta Debrecenben az Atommagkutató Intézetet és értékelte az intézet eddigi tevékenységét. Foglalkozott a Debrecenben létesítendő 5 MeV-os gyorsító fejlesztési programjával és a gyorsító tudományos jellegű felhasználásával. — Megvitatta az albizottság az egyetemekről kikerülő fizikusok továbbképzésére vonatkozó sokrétű problémát. — Előkészítette a Sárospatakon tartott magfizikai tárgykörű munkaértekezletet.

A Nagyenergiájú és Elemi Részecskék Fizikájának Albizottsága elméleti fizikai iskolák tudományos programjának kialakításával foglalkozott.

A Spektroszkópiai Albizottság foglalkozott az 1967-ben Debrecenben megrendezett XIV. CSI előkészítésével; a nemzetközi tanácskozáson — amellyel egy időben külföldi cégek részvételével műszerkiállításra is sor került — 140 előadás hangzott el. — Az albizottság Debrecenben megszervezte a szocialista országok spektroszkópiai kutatói képviselőinek munkaértekezletét.

A Nemzetközi Sugárvédelmi Társulat (IRPA) Magyar Nemzeti Bizottsága javaslatára az Akadémiai Kiadó idegen nyelvű Sugárvédelmi Kiadvány-t jelentet meg. — Megállapította az albizottság, hogy az Egészségügyi Minisztérium által kiadott sugárvédelmi óvórendszabály a fordítási hibák mellett számos szakmai hibát is tartalmaz; az albizottság javaslatára az Akadémia felhívta a minisztérium figyelmét a tudományos alaposságú rendezés szükségességére. — Foglalkozott a személyi filmdozimetriai ellenőrzésnek a betasugárzásra és más sugárzások mérésére való kiterjesztésével. — Az albizottság Ausztria felkérésére 1968-ban Ausztriában közös magyar—osztrák sugárvédelmi tanácskozást szervez.

A Nemzetközi Krisztallográfiai Unió Magyar Nemzeti Bizottsága foglalkozott az Uniónak azzal a programjával, amelynek keretében a krisztallográfia felsőfokú tanítása színvonalának emelését szolgáló oktatási anyag összeállítását javasolta. Ennek keretében a magyar szakemberek kirstálynövesztési praktikum összeállítására vállalkoztak, amelynek felelőse az albizottság.

A Nemzetközi Elméleti és Alkalmazott Fizikai Unió (IUPAP) oktatási bizottságának magyar nemzeti albizottsága kedvezően fogadta azt a külföldi javaslatot, hogy 1970-ben a középiskolai fizikatanárok képzésével foglalkozó nemzetközi konferencia megrendezésére Budapesten kerüljön sor. (A konferencia fő rendezője a Művelődésügyi Minisztérium lenne.) — Az egyetemi oktatás elősegítése érdekében az UNESCO két évenként egy-egy kötetben ismerteti a matematika, a fizika, a kémia és a biológia oktatásában kialakult új irányzatokat. Az albizottság szorgalmazza, hogy a fizika későbbi köteteiben magyar szakemberek kísérletek leírásával szerepeljenek.

Csillagászat

A Csillagászati Bizottság előkészíti a Csillagvizsgáló Intézet és a Napfizikai Obszervatórium 10 éves műszerfejlesztési tervét.

A Szputnyikmegfigyelési Albizottság szoros együttműködést alakított ki az optikai és rádiós megfigyelőállomások között. Lehetővé tette geodéta szakemberek kiképzését az optikai megfigyelőállomásokon. Félévenként kiadta a magyar és az Interobs-program keretében végzett külföldi megfigyeléseket tartalmazó kiadványokat. — Az adatfeldolgozás korszerű módszerei tárgykörben az albizottság nagysikerű tanfolyamot rendezett, továbbá megkezdte a havonként egy előadásból álló égi mechanikai tanfolyam megrendezését.

A Cospar Bizottság számos nemzetközi vonatkozású ügyön kívül megvitatta a közös magyar—francia Deppler-geodéziai űrkísérlet problémáit.

KÖNYVKIADÁS

Matematika:

Ádám András: Truth functions and the problem of their realization by twoterminal graphs.

Theory of graphs.
Proceedings of the colloquium held at Tihany Hungary.
Szerkesztették: Erdős Pál és Katona Gyula.
Közös kiadás az Academic Press-szel, New York and London.

Kertész Andor: Vorlesungen über artinsche Ringe.
Közös kiadás a lipcsei B. G. Taubner kiadóval.

Péter Rózsa: Recursive Functions. 3. kiadás.
Közös kiadás a New York-i Academic Press-szel.

Rédei László: Algebra I.
Közös kiadás az oxfordi Pergamon Press-szel.

Rédei László: The Foundation of Euclidean and Non-Eucliden Geometries.

Révész Pál: The Laws of Large Numbers.
Közös kiadás a New York-i Academic Press-szel.

Studies in Mathematical statistics.
Theory and applications.
Szerkesztették: Sarkadi Károly és Vincze István.

Szőkefalvi-Nagy Béla—Foias Ciprian: Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert.
Közös kiadás a párizsi Masson et Cie kiadóval.

Fizika:

Absorption Spectra in the Ultraviolet and Visible Region VIII. kötet.
Szerkesztő: Láng László.
Közös kiadás a New York-i Academic Press-szel.

Absorption Spectra in the Ultraviolet and Visible Region IX. kötet.
Szerkesztő: Láng László.
Közös kiadás a New York-i Academic Press-szel.

Gombás Pál—Kisdi Dávid: Bevezetés a hullámmechanikába és alkalmazásaiba.

Elnökségi keretben:

Rényi Alfréd: Levelek a valószínűségről. (Korunk tudománya sorozat.)

Rényi Alfréd: Dialoge über Mathamatik. (Korunk tudománya sorozat.)
Közös kiadás a baseli Birkhäuser Verlaggal és a berlini VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften-nel.

Nívó-díj

Az Akadémiai Kiadó 1967. évi nívó-díjában az osztály alábbi két kiadványa részesült:

Szász Gábor: Introduction on Lattice Theory (20 000,— Ft).

Fenyves Ervin— Haimann Ottó: Die physikalischen Grundlagen der Kernstrahlungsmessungen (16 000,— Ft).

FOLYÓIRATKIADÁS

Acta Mathematica XVIII. kötet.
Acta Physica XXII. és XXIII. kötet.
Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica II. kötet.
Osztály Közleményei XVII. kötet.
Magyar Fizikai Folyóirat XV. kötet.

RENDEZVÉNYEK

Tanácskozások

Operációkutatási Konferencia (Veszprém, 1967. szeptember 26—30.). A tanácskozás témája a matematika műszaki és gazdasági alkalmazásaival kapcsolatos hazai kutatási eredmények ismertetése volt. A konferencián többségében érdekes és színvonalas előadások hangzottak el a népgazdaság tervezésére, irányítására, a gazdasági optimumok meghatározására vonatkozóan. A konferencia iránt igen nagy volt az érdeklődés; azon 180 matematikus, közgazdász és műszaki szakember vett részt 52 előadással.

Nemzetközi Kvantumkémiai Iskola (Debrecenben és Balatonszéplakon 1967. szeptember 4—16.). Az iskola témaköre az atomok és molekulák kvantumelmélete terén nemzetközi viszonylatban elért legújabb eredmények áttekintése volt. Az iskolán 40 előadás hangzott el, és ezek többségét nemzetközileg kiemelkedő kvantumkémikusok tartották. Az iskola nagyon jól szolgálta azt a célt, hogy lehetőséget nyújtott a szocialista országokból érkező fiatal kutatóknak a legújabb kutatási eredmények megismerésére. Az iskolán a hazai szakembereken kívül 106 külföldi vett részt, ezek közül 80-an a szocialista országokból érkeztek.

Nemzetközi Napfizikai Szimpózium (Budapest, 1967. szeptember 4—8.). A szimpózium témája a Nap aktív vidéke fejlődésének és szerkezetének vizsgálata volt, amelynek keretében kiértékelték az 1965—66-ban ezzel a céllal vizsgált nemzetközi Nap-megfigyelési észleléssorozatokat. A szimpóziumon 98 előadás hangzott el; a 22 országból érkezett külföldi résztvevők száma 208 volt. E témakörben eddig ez a rendezvény volt a legsikeresebb.

Székfoglaló előadás

Kovács István akadémikus: „Molekuláris kölcsönhatások általános alakjai" (1968. február 14.).

A HIPERGEOMETRIKUS ELOSZLÁS ÁLTALÁNOSÍTÁSA*

F. E. BINET**

Bevezetés

Tekintsük a

$$p_{k+1} = \frac{(a+k)(b+k)}{(1+k)(c+k)} p_k \qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{1}$$

rekurziós formulával és a

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1; \quad p_k \geqq 0 \qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{2}$$

feltétellel meghatározott $p_k = P(\xi = k)$ diszkrét eloszlások családját. Könnyű látni, hogy a hipergeometrikus eloszlás eleget tesz az (1) és (2) feltételnek, ennek megfelelően az (1) és (2) által meghatározott eloszlásokat általánosított hipergeometrikus eloszlásnak fogjuk nevezni.

Az általánosítás alapgondolata már A. NOACK [1] alatti cikkében megtalálható, részletes kidolgozását KEMP és KEMP [6] adta meg. SARKADI [3] egyszerűsítette KEMP és KEMP osztályozását és több, az irodalomban addig önálló esetként tárgyalt eloszlásról mutatta ki, hogy az általános hipergeometrikus eloszlásokhoz tartozik.

Dolgozatunk 1. fejezetében az általánosított hipergeometrikus eloszlás osztályozását tárgyaljuk. A 2. fejezetben a hipergeometrikus, binomiális és Poisson-eloszlás kapcsolatáról lesz szó: megmutatjuk, hogy határátmenettel, keveréssel és feltételes eloszlás képzésével ezek az eloszlások egymásból előállíthatóak. Végül áttekintjük a fenti eloszlásoknak a homogén születési folyamatok körében való alkalmazását.

Itt mondok köszönetet Dr. R. T. LESLIEnek (Division of Mathematical Statistics, C. S. I. R. O) munkám elkészítéséhez nyújtott szívélyes segítségéért, valamint TUSNÁDY GÁBORnak (MTA Matematikai Kutató Intézet) a dolgozat magyar nyelven való megfogalmazásában nyújtott segítségéért.

1. Az általánosított hipergeometrikus eloszlás osztályozása

Ha az a, b, c paraméterek egyike sem negatív egész, (1) alapján az eloszlás generátorfüggvénye

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(a+i)(b+i)}{c+i} = p_0 F(a,b,c;z). \tag{3}$$

* Elhangzott az AUSZTRÁL MATEMATIKAI TÁRSASÁG rendes évi ülésén, a MONASH-Egyetemen (Clayton, Ausztrália) 1963. máj. 30.-án.

** C. S. I. R. O. Division of Animal Genetics. Eppening, N. S. W. Australia.

Ismeretes (lásd pl. [25]), hogy a (3) alatti $F(a, b, c; z)$ hipergeometrikus sor konvergencia-sugara 1, a $z=1$ pontban akkor és csakis akkor konvergens a sor, ha

$$a+b < c \tag{4}$$

teljesül. Ebben az esetben (2) alapján

$$p_0 = \frac{1}{F(a,b,c;1)} = \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}, \tag{5}$$

(ahol $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$; $\Gamma(n)=(n-1)!$ ha n természetes szám). Tehát p_k általános alakja

$$p_k = \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)} \cdot \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(1+k)\Gamma(c+k)}. \tag{6}$$

Ahhoz, hogy a $p_k \geqq 0$ feltétel is teljesüljön, a

$$\frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)} \tag{7}$$

hányadosnak pozitívnak kell lennie $k=0, 1, 2, \ldots$ mellett. Ennek megfelelően az alábbi eseteket különböztethetjük meg.

I. Ha a, b negatív, c csak pozitív lehet $\frac{ab}{c}>0$ folytán, tehát $(a+k)$ és $(b+k)$ előjele-azonos k mellett válik pozitívvá, ami csak úgy lehet, ha $[a]=[b]$ (ahol $[x]$ az x-nél nem nagyobb egész számok legnagyobbikát jelöli). Ebben az esetben (4) automatikusan teljesül, tehát feltételeink:

$$\mathrm{H}^+: \quad [a]=[b]<0; \qquad c>0.$$

II. Ha a, b közül csak az egyik negatív, szimmetrikus szerepük miatt feltehetjük, hogy $a<0$. Mivel (7) pozitivitása szempontjából a, b, c egyikének sincs kitüntetett szerepe, ebben az esetben alkalmazhatjuk előbbi eredményünket (abban b és c szerepét felcserélve): (7) akkor és csakis akkor pozitív, ha $[a]=[c]$. (4)-et is figyelembe véve kapjuk, hogy esetünkben a feltétel:

$$\mathrm{H}^-: \quad [a]=[c]<0; \qquad 0<b<c-a.$$

III. Ha a, b pozitívak, (4) alapján c is pozitív, így (7) is pozitív lesz, feltételünk tehát

$$\mathrm{H}^{--}: \quad a>0,\ b>0,\ c>a+b.$$

Ha az a, b paraméterek közül valamelyik negatív egész, szimmetrikus szerepük miatt feltehetjük, hogy az $a=-n$. (Ha mindkettő negatív egész, válasszuk a-t a nagyobbiknak.) Ebben az esetben csak azt kell biztosítanunk, hogy (7) nevezője ne legyen 0 ha k a $0, 1, \ldots, (n-1)$ értékeket veszi fel. Célszerű módon (7) értékét 0-nak tekintjük $k=n$ mellett akkor is, ha $c=a=-n$, azaz (7) nevezője is 0. Mivel ebben az esetben a (3) alatti hipergeometrikus sor csak véges sok 0-tól különböző tagot tartalmaz, a $z=1$ pontbeli konvergenciához (4)-et nem kell feltennünk. Feltételeink tehát:

$$\mathrm{H}_0^+:\quad a=-n \quad \text{(negatív egész)}, \quad b<a+1, \quad c>0,$$

$$\mathrm{H}_0^-:\quad a=-n \quad \text{(negatív egész)}, \quad c<a+1, \quad b>0.$$

Ezekben az esetekben (5) a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(-n+i)(b+i)}{c+i} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b+n)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c+n)}$$

összefüggést jelenti; amit $\dfrac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)\Gamma(n+1)}$-nel szorozva a következő azonosságot kapjuk:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{-b}{k}\binom{c+n-1}{n-k} = \binom{c-b+n-1}{n}, \tag{9}$$

amely az $(1+x)^{-b}(1+x)^{c+n-1} = (1+x)^{c-b+n-1}$ azonosságban x^n együtthatói közti összefüggésnek felel meg. Fenti formuláink tehát az $a=-n$ esetben is érvényesek, anélkül hogy a konvergenciát biztosítanánk.

Felhasználva a $\Gamma(z)$ függvényre érvényes

$$\frac{\Gamma(-a+1)}{\Gamma(-a-k+1)} = (-1)^k \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \tag{8}$$

összefüggést (ha a természetes szám, (8)-at célszerű definíciónak tekinthetjük) az egyes esetekben p_k célszerű alakja a következő:

I. A H^+ és a H_0^+ esetben

$$p_k = \frac{\binom{-b}{k}\cdot\binom{c-a-1}{-a-k}}{\binom{c-a-b-1}{-a}}$$

$\left(\text{ahol } \binom{\alpha}{\beta} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right.$, ill. ha β természetes szám $\binom{\alpha}{\beta} = \left.\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\beta+1)}{\beta!}\right)$, mely a H_0^+ esetben a $N=c-a-b-1$, $M=-b$, $n=-a$ jelölésekkel a hipergeometrikus eloszlás közismert formáját adja. A H^+ esetben $k=0, 1, 2, \ldots$; H_0^+ esetben $k=0, 1, 2, \ldots, -a$.

II. a H^- és H_0^- esetben

$$p_k = \binom{-a}{k}\frac{B(b+k, 1-c-k)}{B(b, a-c+1)},$$

ahol $B(\alpha, \beta)$ a beta-függvény: $B(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. H^- esetben $k=0, 1, 2, \ldots$, H_0^- esetben $k=0, 1, 2, \ldots\ -a$.

III. A H^{--} esetben

$$p_k = \binom{b-k-1}{k} \frac{B(c-a,a+k)}{B(a,c-a-b)} \qquad (k = 0,1,2,\ldots).$$

Itt jegyezzük meg, hogy a fenti eloszlások approximációját a [11] és [13] dolgozatok tárgyalják.

2. A hipergeometrikus, binomiális és Poisson-eloszlás kapcsolata

Ha $|b|$, $|c|$ tart ∞-hez, miközben a rögzített és $\frac{b}{c}$ tart ω-hoz, az (1) összefüggés átmegy az

$$(1^*) \qquad p_{k+1} = \frac{a+k}{1+k}\omega p_k \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

összefüggésbe. Így (1)-nek azok a megoldásai, melyek (2)-nek is eleget tesznek, (1*) azon megoldásaiba mennek át, amelyek (2)-nek eleget tesznek. (1*) generátorfüggvénye:

$$(3^*) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-\omega z)^k = p_0(1-\omega z)^{-a},$$

ahol (2) miatt $p_0 = (1-\omega)^a$, ha (3*) konvergens $z=1$ mellett.

Ha tehát H_0^+ esetén $b \to -\infty$, $c \to +\infty$, ill. ha H_0^- esetén $b \to +\infty$, $c \to -\infty$, miközben a rögzített negatív egész: $a = -n$, és $\frac{b}{c} \to \omega < 0$, akkor a határeloszlás generátorfüggvénye $(px+q)^n$ lesz, ahol $p = \frac{-\omega}{1-\omega}$, $q = \frac{1}{1-\omega}$, tehát a határeloszlás binomiális:

$$B^+ : p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (k = 0,1,\ldots,n).$$

Ha pedig (a és b szerepét felcserélve) H_0^- esetén a, c tart $(-\infty)$ felé, ill. H^{--} esetén a, c tart $(+\infty)$-hez, miközben b rögzített és $\frac{a}{c} \to p$, ahol $0<p<1$, akkor a megfelelő eloszlás tart az $\left(\frac{1-px}{1-p}\right)^{-b}$ generátorfüggvényű negatív binomiális eloszláshoz, melyre

$$B^- : p_k = \binom{-b+k-1}{k} p^k (1-p)^{-b} \qquad (k = 0,1,2,\ldots).$$

Megjegyezzük, hogy — mint az a feltételekből könnyen kiolvasható — H^+ és H^- esetén ilyen határátmenetek nem lehetségesek.

Ha (1)-ben $|a|$, $|b|$, $|c|$ tart ∞-hez, miközben $\frac{ab}{c} \to \lambda > 0$, illetve (1*)-ban $|a| \to \infty$, $\omega \to 0$, miközben $a\omega \to \lambda > 0$, akkor a (2)-nek eleget tevő megoldások tartanak

$$\text{(1**)} \qquad p_{k+1} = \frac{\lambda}{k+1} p_k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

(2)-nek eleget tevő megoldásához, melyre

$$\mathrm{P}: \; p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ha tehát B^+ esetén $n \to \infty$, $p \to 0$ miközben $np \to \lambda$, illetve ha B^- esetén $b \to \infty$, $p \to 0$ miközben $bp \to \lambda$, a megfelelő eloszlások tartanak a λ paraméterű *Poisson*-eloszláshoz.

A fenti határátmenetek a következő ábrával szemléltethetőek:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
H^{--} \arrow[dr] & & H_0^- \arrow[dl] \arrow[dr] & & H_0^+ \arrow[dl] \\
& B^- \arrow[dr] & & B^+ \arrow[dl] & \\
& & P & &
\end{tikzcd}$$

A következőkben a fordított irányú átmeneteket tekintjük át. Erre a célra két módszert használunk: eloszlások keverését és feltételes eloszlás képzését. Előbbivel kapcsolatban megemlítjük a [4] dolgozatot, mely — többek között — a negatív binomiális eloszlás *Poisson*-eloszlásból való előállítását tárgyalja.

Az eloszlások keverésében a generátorfüggvényükre érvényes alábbi összefüggéseket használjuk:

$$\text{(10)} \qquad \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)} F(a, b, c; z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1}}{B(b, c-a-b)} \left(\frac{1-tz}{1-t}\right)^{-a} dt \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{a-c}}{B(b, a-c+1)} (tz+1-t)^{-a}\, dt \end{cases}$$

feltéve, hogy $c > b > 0$, vagy pedig a negatív egész és $b > 0$, $c < a+1$, valamint

$$\text{(11)} \qquad \left(\frac{1-pz}{1-p}\right)^{-\mu} = \frac{\lambda^\mu}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-\lambda t} e^{t(z-1)}\, dt,$$

ahol

$$\lambda = \frac{1-p}{p}, \quad \mu > 0, \quad 0 < p < 1.$$

(10) szerint tehát H^{--} illetve H_0^- előállítható B^- illetve B^+ eloszlásokból beta eloszlással keverve, (11) szerint B^- előállítható P eloszlásból gamma eloszlással keverve, hiszen (10), (11) épp a megfelelő generátorfüggvények összefüggését adja.

A hiányzó három átmenet előállítása érdekében megjegyezzük, hogy ha ξ, η független valószínűségi változók és lehetséges értékeik nemnegatív egészek, akkor

$$P(\xi = k|\xi+\mu = n) = \frac{P(\xi = k)P(\eta = n-k)}{\sum_{i=0}^{n} P(\xi = i)P(\eta = n-i)} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Ennek alapján ha ξ, η rendre λ_1, λ_2 paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változók, akkor az

$$\frac{\dfrac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} \cdot \dfrac{\lambda_2^{n-k} e^{-\lambda_2}}{(n-k)!}}{\sum_{i=0}^{n} \dfrac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!} \cdot \dfrac{\lambda_2^{n-i} e^{-\lambda_2}}{(n-i)!}} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

azonosság alapján feltéve, hogy ha $\xi+\eta = n$ rögzített, ξ feltételes eloszlása B^+ eloszlás lesz n és $p = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ paraméterekkel. Hasonló módon kapjuk (9) alapján, hogy ha ξ, η B^- ill. B^+ eloszlású valószínűségi változók, akkor ξ feltételes eloszlása a $\xi+\eta = n = -a$ feltétel mellett H_0^- ill. H_0^+ lesz.

Ottestand [14] mutatott rá, hogy a hipergeometrikus eloszlás momentumainak előállításakor legcélszerűbb először faktoriális momentumokat meghatározni: legyen

$$\mu^{(j)} = E\{\xi(\xi-1)\cdot \dots \cdot(\xi-j+1)\}.$$

Mint ismeretes, a generátorfüggvény alapján $\mu^{(j)}$ egyszerűen előállítható:

$$\mu^{(j)} = \frac{F^{(j)}(a,b,c;1)}{F(a,b,c;1)} = \frac{a(a+1)\cdot \dots \cdot(a+j-1)b(b+1)\cdot \dots \cdot(b+j-1)}{(c-a-b-1)(c-a-b-2)\cdot \dots \cdot(c-a-b-j)}.$$

Így speciálisan az eloszlás *Poisson*-indexe

$$V(\xi) = \frac{D^2(\xi)}{E(\xi)} = \frac{\mu^{(2)}+\mu^{(1)}-[\mu^{(1)}]^2}{\mu^{(1)}} =$$

$$= \frac{(a+1)(b+1)}{c-a-b-2}+1-\frac{ab}{c-a-b-1} = \frac{(c-a-1)(c-b-1)}{(c-a-b-1)(c-a-b-2)}.$$

H^+, H^-, H^{--} esetében $\mu^{(j)}$ létezésének feltétele, hogy $a+b < c-j$ teljesüljön, H_0^+, H_0^- esetén $\mu^{(j)}$ mindig létezik. A fenti alakból könnyen kiolvasható, hogy H_0^+, B^+ esetén $V<1$; H^{--}, B^- esetén $V>1$, P eloszlásra $V=1$, H_0^- eloszlásra V lehet 1-nél nagyobb is, kisebb is, 1-gyel egyenlő is. Ez utóbbi körülmény különösen figyelemre méltó, hiszen sokszor előfordul a statisztikai gyakorlatban, hogy a *Poisson*-eloszlást $V(\xi)=1$ ellenőrzésével verifikálják.

Dolgozatunk végén numerikus példával szemléltetjük ezt az esetet: Az I. táblázatban az $a = -4$, $b=1$, $c= -4$ paraméterű H_0^- eloszlást hasonlítjuk össze a $\lambda=2$ paraméterű *Poisson*-eloszlással; a II. táblázatban az $a = -9$, $b=2$, $c = -9$.

I. táblázat

k	$10^5\ p_k$	
	Poisson $\lambda=2$	Negatív hipergeometrikus $a=-4,\ b=1,\ c=-4$
0	13534	20000
1	27067	20000
2	27067	20000
3	18044	20000
4	9022	20000
5	3609	20000
6	1203	0
7	344	0
8	85	0
8	25	0

Faktoriális momentumok	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Poisson	1	2	4	8	16	32
Negatív hipergeometrikus	1	2	4	6	4.8	0

II. táblázat

j	Faktoriális momentumok	
	Negatív hipergeometrikus $a=-9,\ b=2,\ c=-9$	Poisson $\lambda=6$
0	1	1
1	6	6
2	36	36
3	201·6	216
4	1008	1296
5	4320	7776
6	15120	46656
7	40320	279936
8	72576	$1679\cdot62\cdot10$
9	65978·2	$1007\cdot77\cdot10^4$
10	0	$6046\cdot62\cdot10^4$
11	0	$36279\cdot71\cdot10^4$
11	0	6^j
k	$10^5\cdot p_k$	
0	1818	248
1	3637	1487
2	5455	4461
3	7273	8924
4	9091	13385
5	10909	16062
6	12727	16062
7	14545	13768
8	16363	10326
9	18182	6884
10	0	4130
11	0	2253
11	0	2009

III. táblázat

Negatív hipergeometrikus, $a=-2,\ c=\frac{b^2+1}{b-1}$

$$p_0=1-b+\frac{b^2}{2};\quad p_1=b-b^2;\quad p_2=\frac{b^2}{2}$$

$10^3\,b$	$10^5\,p_k$ $k=0$	$k=1$	$k=2$
100	90500	9000	500
200	82000	16000	2000
250	78125	18750	3125
500	62500	25000	12500
667	55556	22222	22222
750	53125	18750	28125
800	52000	16000	32000
900	50500	9000	40500
1000	50000	0	50000

paraméterű H_0^- eloszlást a $\lambda=6$ paraméterű *Poisson*-eloszlással. A III. táblázat az $a=-2,\ c=\frac{b^2+1}{b-1}$ paraméterekhez tartozó H_0^- eloszlásokat mutatja be különböző $0<b<1$ mellett: ezekre $V(\xi)=1$ minden b mellett, első két faktoriális momentumuk megegyezik a b paraméterű *Poisson*-eloszlás megfelelő faktoriális momentumával, a további faktoriális momentumuk 0, míg a *Poisson*-eloszlás j-edik faktoriális momentuma b^j.

A fenti eloszlásokkal kapcsolatban megemlítjük a [2], [5], [7], [8], [9], [10], [12], [15], [16] dolgozatokat.

3. Homogén születési folyamatok

Ha a $\xi(t)$ sztochasztikus folyamat lehetséges állapotai a nemnegatív egész számok, és

$$\text{(12)}\qquad P\big(\xi(t+\Delta t)=n\,|\,\xi(t)=n\big)=1-\lambda_n\Delta t+o(\Delta t)$$
$$P\big(\xi(t+\Delta t)=n+1\,|\,\xi(t)=n\big)=\lambda_n\Delta t+o(\Delta t)\qquad (n=0,1,2,\dots)$$

teljesül, ahol λ_n a t időtől független konstans, a $\xi(t)$ folyamatot homogén születési folyamatnak nevezzük. Ez a folyamat igen gyakori az irodalomban: Mc KENDRICK [17] volt az első, aki tárgyalta, a további cikkek közül O. LUNDBERG [24], M. A. WOODBURY [18] munkáit említjük.

Jelöljük $P_k(t)$-vel a $\{\xi(t)=k\}$ esemény valószínűségét, és $\mu^{(k)}(t)$-vel a $\xi(t)$ változó k-adik faktoriálás momentumát. Tegyük fel, hogy $\xi(0)=0$. Igen általános feltételek mellett teljesül, hogy

$$\text{(13)}\qquad \begin{aligned} P_k(t)&=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_{k-1}}{k!}t^k+o(t^k)\\ \mu^{(k)}(t)&=\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}t^k+o(t^k).\end{aligned}$$

Fenti összefüggéseket konkrét fizikai folyamatokkal kapcsolatban J. O. IRWIN [19] mutatta ki, bizonyításukat P. ARMITAGE [20] adta meg.

Abban az esetben, amikor a λ_n paraméterek értéke egyenlő: $\lambda_n = \lambda$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ a $\xi(t)$ változó — mint ismeretes — *Poisson*-eloszlású λt paraméterrel:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}; \qquad \mu^{(k)}(t) = (\lambda t)^k. \tag{14}$$

Ha a *Poisson*-folyamat λ paramétere maga is valószínűségi változó $P(\lambda < x) = G(x)$ eloszlásfüggvénnyel, $\xi(t)$ eloszlása ún. kevert *Poisson*-eloszlás:

$$P_k(t) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} G(d\lambda). \tag{15}$$

Ennek az eloszlásnak a faktoriális momentumai megegyeznek a keverő eloszlás momentumaival:

$$\mu^{(k)}(t) = \int_0^\infty (\lambda t)^k G(d\lambda) = \mu_k(t), \tag{16}$$

mint ahogy azt már KERRICH [21] kimutatta. FELLER [22], [23] vetette fel először a kérdést, hogy melyek azok a születési folyamatok, amelyeket elő lehet állítani *Poisson*-folyamatok keverékeként. A kevert *Poisson*-folyamat már nem lesz időben homogén — tehát a (12) jobb oldalán álló λ_n tényező függ az időtől — de a (13) alatti összefüggések érvényesek tetszőleges születési folyamatra, ha bennük λ_n értékét $t = 0$ mellett vesszük. Általánosabban kérdezhetjük azt is, hogy melyek azok a születési folyamatok, amelyek $P_k(t)$ eloszlása előállítható kevert *Poisson*-eloszlásként, megengedve azt is, hogy a (15) alatti $G(x)$ keverő eloszlás a t időtől függjön.

Összefoglalva tehát az eddig mondottakat: annak szükséges feltétele, hogy a születési folyamat $P_k(t)$ eloszlása minden t mellett kevert *Poisson*-eloszlás legyen az, hogy a

$$\mu^{(k)} = \lim_{t \to 0} \frac{\mu^{(k)}(t)}{t^k} = \lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1} \tag{17}$$

faktoriális momentumok eleget tegyenek mindazoknak a feltételeknek, amelyeknek egy nemnegatív eloszlás momentumaira teljesülniük kell. Így például a

$$\mu^{(2)} = \lambda_0 \lambda_1 \geqq [\mu^{(1)}]^2 = \lambda_0^2,$$

azaz $\lambda_1 \geqq \lambda_0$ feltétel épp annak felel meg, hogy a keverő eloszlás szórása nemnegatív legyen, tehát *Poisson*-eloszlások keverékére a $V(\xi)$ *Poisson*-index értéke legalább 1.

IRODALOM

[1] A. NOACK: A class of random variables with discrete distributions, *Ann. Math. Stat.* **21** (1950) 127—132.

[2] W. L. STEVENS: Mean and variance of an entry in a contingency table, *Biometrika,* **38** (1952) 468—470.

[3] K. SARKADI: Generalized hypergeometric distributions, *Publ. Math. Inst. of the Hung. Acad. Sci.* **2.** (1957) 59—69.

[4] J. GURLAND: Some interrelations among compound and generalized distributions, *Biometrika* **44** (1957) 265—268.

[5] J. G. SKELLAM: A probability distribution derived from the binomial distribution by regarding the probability of success as variable between the sets of trials, *J. R. Stat. Soc. B.* **10** (1948). 257—261.

[6] C. D. és A. W. KEMP: Generalized hypergeometric distributions, *J. R. Stat. Soc. B.* **18** (1956) 202—211.

[7] G. I. BATEMAN: The power of the X^2 indice of dispersion test when Neyman's contagious distribution is the alternative hypothesis. *Biometrika* **37** (1950) 59—63.

[8] M. THOMAS: Some tests for randomness in plant populations, *Biometrika* **38** (1951) 101—114.

[9] J. NEYMAN: On a new class of „contagious" distributions, applicable in entomology and bacteriology, *Ann. Math. Stat.* **10** (1939) 35—57.

[10] G. BEALL—R. R. RESCIA: *Biometrics* **9** (1953) 355—386.

[11] M. F. WISE: The incomplete beta-function asa contourintegral and a quickly converging series for its inverse. *Biometrika* **37** (1950) 208—218.

[12] M. S. RAFF: On approximating the point binomial, *Journal Am. Stat. Ass.* **51** (1956) 293—303.

[13] P. F. SANDIFORD: A new binomial approximation for use in sampling from finite populations, *Journal Am. Stat. Ass.* **55** (1960) 718—722.

[14] P. OTTESTAD: *Skand. Aktuarietid.* (1939) 22—31.

[15] J. B. S. HALDANE: On a method of estimating frequencies, *Biometrika* **33** (1945) 222—225.

[16] M. SANDELIUS: *Kungl. Lantbronkshogsk Ann.* **18** (1952) 123—127.

[17] A. G. MCKENDRICK: *Proc. London Math. Soc.* (2) **13** (1914) 401—416.

[18] M. A. WOODBURY: On a probability distribution, *Ann. Math. Stat.* **20** (1949) 311—313.

[19] J. O. IRWIN: On the „Lautition probabilities" Corresponding to any accident distribution, *J. R. Stat. Soc. B.* **15** (1953) 87—89.

[20] P. ARMITAGE: A note on the time-homogeneus birth process, *J. R. Stat. Soc. B.* **15** (1953) 90—91.

[21] J. E. KERRICH: *Biometrics* **7** (1947) 402

[22] W. FELLER: On a general class of „contagious" distributions, *Ann. Math. Stat.* **14** (1943) 389—399.

[23] W. FELLER: On the theory of stochastic processes, with particular reference to applications, *Proc. Berkeley Symposium on Stat. and Prob.* (1949) 403—433.

[24] Ø. LUNDBERG: *On random processes and their application to Sickness and accident statistics,* Almquist & Wiksells, Upsala.

[25] W. MAGNUS—F. OBERHELTINGER: *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik,* 2. kiad. Berlin, Springer, (1948).

PRÍMOSZTÓK SZÁMÁNAK BECSLÉSE DIOFANTIKUSAN SÍMA SOROZATOKON

Írta: KÁTAI IMRE

1. $U(n)$ jelentse n különböző prímosztóinak a számát. HARDY és RAMANUJAN tétele szerint [1] majdnem minden n-re $U(n) = (1+o(1)) \log \log n$. E tételre TURÁN PÁL igen egyszerű bizonyítást adott [2]. Nem sokkal később HARDY és RAMANUJAN tételét általánosítva kimutatta [3], hogy ha $f(x)$ irreducibilis, egész együtthatós polinom, akkor $U(f(n)) = (1+o(1)) \log \log n$ majdnem minden n-re. ERDŐS megmutatta [4], hogy majdnem minden p prímszámra $U(p-1) = (1+o(1)) \log \log p$. H. HALBERSTAM bebizonyította [5], hogy $U(f(p)) = (1+o(1)) \log \log p$ majdnem minden p-re.

Természetes kérdés, hogy mit lehet mondani azon n-ek sűrűségéről, amelyekre $U(n) = c(1+o(1)) \log \log n$, $c \neq 1$ esetén. Az $U(n)$-re vonatkozó centrális határeloszlástétel „nagy-eltéréses" alakjából (l. [6]) megadható az ezen relációt kielégítő n-ek száma aszimptotikusan $c \leqq c_0 (\leqq 2)$ esetén. A $c > 2$ esetben csak szerényebb eredmények vannak. E kérdések vizsgálata polinom helyettesítési értékeinek halmazán, vagy a prím plusz konstans típusú számok halmazán lényegesen nehezebb. Tekintsük például a $\{p+2\}$ halmazt. Míg az az állítás, hogy az $U(n) = 1$, $n \leqq x$ relációt kielégítő természetes számok száma aszimptotikusan $x/\log x$ a prímszámtétellel azonos, addig az az állítás, hogy az $U(p+2) = 1$ reláció végtelen sok p prímre fennáll, az ikerprím problémával. Ebben az irányban még az sem ismeretes, hogy $U(p+2)$ végtelen sok p-re páratlan.

Az $U(p+2) = c(1+o(1), \log \log p$ relációt kielégítő prímek sűrűségéről keveset tudunk, különösen, ha $c < 1$.

E dolgozatban a $c > 1$ esetet vizsgáljuk.

2. *Jelölések.* 2. 1. $c, c_1, c_2, \ldots$ alkalmas pozitív állandókat, $p, p_1, p_2, \ldots$ prímszámokat jelölnek. $p(\mu)$ jelentse μ legnagyobb prímosztóját.

2. 2. Legyen $g(n)$ egészegyütthatójú irreducibilis polinom, amely pozitív n-ekre pozitív értékű. Tegyük fel, hogy $g(x) \not\equiv cx$. Jelölje $\lambda(m)$ a $g(n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ m)$ kongruencia m-hez relatív prím megoldásainak a számát.

2. 3. Legyen $x_1 = \log x$, $x_2 = \log x_1$, $x_3 = \log x_2$. A $\ll$ szimbólum jelentése ugyanaz, mint VINOGRADOVnál.

2. 4. Legyen a_n a természetes számok monoton növő sorozata,

$$A(x) = \sum_{a_n \leqq x} 1; \quad A(x, D, l) = \sum_{\substack{a_n \equiv l(D) \\ a_n \leqq x}} 1.$$

Az a_n sorozatot diofantikusan simának nevezzük, ha

$$A(x) \gg x \cdot x_1^{-c}, \tag{2.1}$$

és

$$\sum_{D \leqq x^{\alpha}} \max_{\substack{l(D) \\ (l,D)=1}} \left| A(x, D, l) - \frac{A(x)}{\varphi(D)} \right| \ll A(x) \cdot x_1^{-B} \qquad (x \to \infty) \tag{2.2}$$

alkalmas pozitív α-val és minden B állandóval.

2.5. Legyen $h(x)$ tetszőleges monoton növekvő függvény, $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$. Legyen $z > 1$ állandó, $w = z - 1$. Jelölje $N(x, z, h)$ azon $a_n(\leqq x)$-ek számát, amelyekre

$$|U(g(a_n)) - zx_2| \leqq h(x)\sqrt{x_2}.$$

Érvényes a következő

TÉTEL. *Ha a_n a 2.4. alatt definiált sorozat, s $g(x)$ 2.2. alatti polinom, akkor*

$$\left| \log \frac{N(x, z, h)}{A(x) \cdot x_1^{w - z \log z}} \right| \ll h(x)\sqrt{x_2}.$$

3. Tételünk *bizonyítása* A. I. VINOGRADOV és LINNIK [7], ERDŐS PÁL [8] és BARBAN [9] módszerének kombinálásával történik.

1. LEMMA [10]. *Ha $g(x)$ irreducibilis polinom és $\not\equiv cx$, akkor*

$$\sum_{p \leqq x} \frac{\lambda(p)}{p} = x_2 + O(1). \tag{3.1}$$

2. LEMMA [11]. $u > 0$, $0 < \delta < 1$ *esetén*

$$e^{-u} \sum_{|m-u| > \delta u} \frac{u^m}{m!} = O(e^{-\gamma u}), \qquad \gamma = \frac{1}{3}\delta^2. \tag{3.2}$$

3. LEMMA. *Legyen $\eta(k)$ monoton növekvő függvény, $\lim_{k\to\infty} \eta(k) = \infty$. Ekkor*

$$z^k = (1 + o(1)) \sum_{\left| r - \frac{w}{z}k \right| \leqq \eta(k)\sqrt{k}} w^r \binom{k}{r} \qquad (k \to \infty). \tag{3.3}$$

(3.3) a valószínűségszámításban használatos *Csebisev*-egyenlőtlenségből azonnal következik.

A következő állítás M. BARBANtól származik [9].

4. LEMMA. *Legyen $t(n)$ multiplikatív függvény, amelyre*

$$t(p^k) \leqq c_2 k^{c_1}, \quad t(p^{k+1}) \geqq t(p^k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.4}$$

a_n *2. 4. alatt definiált diofantikusan sima sorozat,* $g(x)$ *2. 2. alatti polinom. Ekkor*

$$c_3 \leqq \sum_{a_n \leqq x} t(g(a_n))/A(x) \exp\left(\sum_{p \leqq x} \frac{\lambda(p)(t(p)-1)}{p}\right) \leqq c_4, \tag{3. 5}$$

ahol c_3 *és* c_4 *csupán az* a_n *sorozattól, a* $g(x)$ *polinomtól és a* c_1, c_2 *állandóktól függő pozitív állandók.*

Jelöljük B-vel azon a_n-ek halmazát, amelyre $g(a_n)$ nem tartalmaz az $(y, x^{\alpha/32})$ intervallumba eső prímosztót.

5. Lemma. $y = x^{1/x_3}$ *választással*

$$\sum_{\substack{a_n \leqq x \\ a_n \in B}} z^{U(g(a_n))} = o(1) A(x) x_1^w. \tag{3. 6}$$

Bizonyítás. Definiáljuk a $t(n)$ multiplikatív függvényt a következő módon: $t(p^k) = z$, ha $p \notin (y, x^{\alpha/32})$ és $t(p^k) = 1$, ha $p \in (y, x^{\alpha/32})$. Világos, hogy (3. 6) bal oldala

$$\leqq \sum_{a_n \leqq x} t(g(a_n)).$$

Felhasználva a 4. lemmát (3. 4) bal oldala

$$\leqq A(x) x_1^w \exp\left(-w \sum_{y \leqq p \leqq x^{\alpha/32}} \frac{\lambda(p)}{p}\right) = o(1) A(x) x_1^w.$$

4. Jelölje A_- illetve A_+ azon a_n-ek halmazát, amelyekre $U(g(a_n)) < zx_2 - h(x)\sqrt{x_2}$, illetve $U(g(a_n)) > zx_2 + h(x)\sqrt{x_2}$. Legyen

$$R(x) = \sum_{a_n \leqq x} z^{U(g(a_n))} = R^-(x) + R_0(x) + R^+(x), \tag{4. 1}$$

ahol $R^-(x)$ az A_-, $R^+(x)$ az A_+ halmazon vett összeget jelenti.

Kimutatjuk, hogy

$$R^-(x) = o(1) A(x) x_1^w, \quad R^+(x) = o(1) A(x) x_1^w, \tag{4. 2)—(4. 3}$$

s innen tételünk állítása rögtön következni fog. A 4. lemmát $t(p^k) = z$ választással, továbbá az 1. lemmát alkalmazva

$$R(x) \asymp A(x) x_1^w.$$

A (4. 2)—(4. 3) egyenlőtlenségeket felhasználva

$$R_0(x) = \sum_{|U(g(a_n)) - zx_2| \leqq h(x)\sqrt{x_2}} z^{U[g(a_n)]} \asymp A(x) \cdot x_1^w,$$

s innen tételünk rögtön következik.

(4. 2) *bizonyítása.* A 3. lemmából következik, hogy

$$z^{U(g(a_n))} = (1 + o(1)) \sum_{v | g(a_n)}' w^{U(v)} + O(1),$$

ahol a jobb oldalon csak azokra a négyzetmentes ν osztókra összegezünk, amelyekre

$$\left| U(\nu)-\frac{w}{z}\, U(g(a_n))\right| < \eta(g(a_n))\sqrt{U(g(a_n))}.$$

Így $a_n \in A_-$ esetén

$$z^{U(g(a_n))} \ll \sum_{\substack{\nu \mid g(a_n)\\ U(\nu)\leqq r_1}} w^{U(\nu)}; \quad r_1 = wx_2-\frac{1}{2}h(x)\sqrt{x_2}. \tag{4.4}$$

A továbbiakban ν olyan számot jelöl, amelyre $U(\nu)\leqq r_1$.

Bontsuk a $g(a_n)$ számot két tényezőre:

$$g(a_n)=d_n b_n,$$

b_n a $g(a_n)$ összes $x^{\alpha/32}$-nél nagyobb prímosztóiból áll.

Minthogy $U(b_n)=O(1)$, így

$$R^-(x) \ll \sum_{a_n \in A_-} z^{U(d_n)}.$$

(4.4) miatt

$$R^-(x) \ll \sum_{a_n\in A_-}\sum_{\nu/d_n} w^{U(\nu)} \ll \sum{}' + \sum{}'', \tag{4.5}$$

ahol $\sum'$-ben $\nu \leqq x^\alpha$, $\sum''$-ben $\nu > x^\alpha$. $\sum'$-ben az összegezés sorrendjét felcserélve

$$\sum{}' \leqq \sum_{\nu\leqq x^\alpha} w^{U(\nu)} \sum_{\substack{g(a_n)\equiv O(\nu)\\ a_n\leqq x}} 1 = A(x)\sum{}_1 + O(S(x)), \tag{4.6}$$

$$\sum{}_1 = \sum_{\nu \leqq x^\alpha} \frac{\lambda(\nu) w^{U(\nu)}}{\varphi(\nu)}; \quad S(x) = \sum_{\nu\leqq x^\alpha} d^{U(\nu)}\lambda(\nu)\max_{l(\nu)}\left| A(x,\nu,l)-\frac{A(x)}{\varphi(\nu)}\right|.$$

A (2. 2) relációból $S(x) \ll A(x)$ következik. Az 1. és a 2. lemma miatt

$$\sum{}_1 \leqq \sum_{r=0}^{r_1} \frac{w^r}{r!}\left\{\sum_{p\leqq x^\alpha}\frac{\lambda(p)}{p-1}\right\}^r \leqq \sum_{r\leqq r_1}\frac{(wx_2)^r}{r!} = o(x_1^w),$$

így

$$\sum{}' = o(1)A(x)x_1^w.$$

Vizsgáljuk $\sum''$-t. Legyen $\nu(>x^\alpha)$ prímtényezős alakja

$$\nu = p_1p_2\dots p_r \qquad (p_1<p_2<\dots<p_r).$$

A μ számot definiáljuk a következő módon:

$$\mu=p_1\dots p_k\leqq x^\alpha, \qquad \mu p_{k+1}>x^\alpha.$$

Ha $g(x)$ foka l, akkor $\nu \ll x^l$, s így egy μ legfeljebb $2^{\frac{lx_1}{\log p(\mu)}}$ számú különböző ν-höz tartozhat. Továbbá $U(\nu) \leqq c_5\dfrac{x_1}{\log p(\mu)}+U(\mu)$. Így

$$\sum{}'' \ll \sum_{x^{31/32\alpha}\leqq \mu\leqq x^\alpha} w^{U(\mu)} c_6^{\frac{x_1}{\log p(\mu)}} \sum_{\substack{g(a_n)\equiv 0(\mu)\\ a_n\leqq x}} 1, \quad U(\mu)\leqq r_1.$$

A (2. 2) egyenlőtlenséget felhasználva innen

$$\sum{}'' \ll A(x) \sum_{x^{31/32\alpha} \leqq \mu \leqq x^{\alpha}} \frac{\lambda(\mu) w^{U(\mu)}}{\varphi(\mu)} c_6^{\frac{x_1}{\log p(\mu)}} + O(A(x)) = A(x) \sum{}_2 + O(A(x)).$$

Kimutatjuk, hogy $\sum_2 = o(1) x_1^w$. Ismeretes (l. ERDŐS [8], 6. lemma), hogy elegendő csak azon a_n-ekre összegezni, amelyekre

$$\prod_{\substack{p|\mu \\ p \leqq X}} p < x^{\alpha/8}, \quad X = \exp\left(\frac{x_1}{x_2^2}\right). \tag{4. 7}$$

Legyen $x_1/\log p = r(=r(p))$. Ekkor

$$\sum{}_2 \ll \sum_{x^{31/32\alpha} \leqq \mu \leqq x^{\alpha}} \frac{w^{U(\mu)} \lambda(\mu)}{\varphi(\mu)} c_6^{\frac{x_1}{\log p(\mu)}} \ll \sum_{X < p \leqq x^{\alpha/32}} \frac{c_6^r}{p} \sum_{h \in B_r} \frac{w^{U(\mu)} \lambda(\mu)}{\varphi(\mu)},$$

ahol B_r-rel azon négyzetmentes h számok halmazát jelöltük, amelyekre (4. 7) μ helyett h-val fennáll, $x^{\frac{15}{16}\alpha} \leqq h \leqq x^{\alpha}$ és $U(h) \leqq r_1$ teljesül.

Könnyen látható, hogy h-nak legalább

$$N_t = \left[\frac{r(t+1)\alpha}{32}\right] + 1$$

számú prímosztója van az $I_t = \left(x^{\frac{1}{r \cdot 2^{t+1}}}, x^{\frac{1}{r \cdot 2^t}}\right)$, $t = 0, \ldots, t_0$ intervallumok valamelyikében. t_0 az a legnagyobb egész szám, amelyre $r \cdot 2^{t_0} \leqq x_2^2$. Jelölje $B_{r,\gamma}$ azon B_r-beli elemek halmazát, amelyeknek I_γ-ban legalább N_γ prímosztójuk van, s $t < \gamma$ esetén I_t-ben legfeljebb $N_t - 1$. Ekkor

$$\sum_{h \in B_r} \frac{w^{U(h)} \lambda(h)}{\varphi(h)} = \sum_{\gamma} \sum_{h \in B_{r,\gamma}} \frac{w^{U(h)} \lambda(h)}{\varphi(h)}.$$

$h \in B_{r,\gamma}$ esetén írjuk h-t $h = uv$ alakba, ahol u az I_γ intervallumba eső N_γ számú különböző prímszám szorzata. Így

$$\sum_{h \in B_{r,\gamma}} \frac{w^{U(h)} \lambda(h)}{\varphi(h)} \leqq \left(\sum_u \frac{w^{U(u)} \lambda(u)}{\varphi(u)}\right) \left(\sum_v \frac{w^{U(v)} \lambda(v)}{\varphi(v)}\right).$$

Továbbá

$$\sum \frac{w^{U(u)} \lambda(u)}{\varphi(u)} \leqq \frac{1}{N_\gamma!} \left(\sum_{p \in I_\gamma} \frac{w\lambda(p)}{p-1}\right)^{N_\gamma} \ll e^{-c_7 \gamma r \log r}$$

és

$$\sum_v \frac{w^{U(v)} \lambda(v)}{\varphi(v)} \leqq \sum_{\substack{m \leqq x^{\alpha} \\ U(m) \leqq r_1}} \frac{w^{U(m)} \lambda(m)}{\varphi(m)} = o(1) x_1^w.$$

γ-ra összegezve innen

$$\sum_{h \in B_r} \frac{w^{U(h)} \lambda(h)}{\varphi(h)} = o(1) e^{-c_8 r \log r} x_1^w,$$

majd az r-ekre összegezve könnyen látható, hogy $\sum_2 = o(x_1^w)$.

(4. 3) *bizonyítása* hasonló $R^{-}(x)$ becsléséhez, így csak vázoljuk. (4. 4) helyett a 3. lemmából most

$$z^{U(g(a_n))} \ll \sum_{\substack{v|g(a_n)\\ U(v)\geqq r_2}} w^{U(v)}; \quad r_2 = wx_2 + \frac{1}{2} h(x)\sqrt{x_2}.$$

A (4. 5) egyenlőtlenség megfelelője teljesül. Ebben most $U(v) \geqq r_2$-re kell összegezni. $\sum'$ becslése teljesen hasonló, így elhagyjuk. $\sum''$ becslésénél az 5. lemma miatt elég azokra a μ-kre összegezni, amelyekre $p(\mu) \geqq y$. Ilyen esetben $U\left(\frac{v}{\mu}\right) \ll \sqrt{x_2}$, s így

$$U(\mu) \geqq wx_2 + \frac{1}{3} h(x)\sqrt{x_2} \left(\stackrel{\text{def}}{=} r_3\right).$$

Legyen most $\mu = p(\mu)h$, $h \in B_{r,\gamma}$, $h = uv$. Mivel

$$U(u) = N_\gamma \ll r\gamma \ll rt_0 \ll rx_3/\log r_3 \ll x_3^2,$$

így a v-re való összegezésben

$$U(v) \geqq wx_2 + \frac{1}{4} h(x)\sqrt{x_2} \left(\stackrel{\text{def}}{=} r_4\right)$$

feltehető.

A bizonyítás további része hasonló (4. 2) bizonyításához. $h \in B_{r,\gamma}$ esetén írjuk h-t $h = uv$ alakba, ahol u az I_γ intervallumba eső N_γ számú különböző prímszám szorzata. Így

$$\sum_{h \in B_{r,\gamma}} \frac{w^{U(h)}\lambda(h)}{\varphi(h)} \leqq \left(\sum_u \frac{w^{U(u)}\lambda(u)}{\varphi(u)}\right)\left(\sum_v \frac{w^{U(v)}\lambda(v)}{\varphi(v)}\right).$$

Továbbá

$$\sum \frac{w^{U(u)}\lambda(u)}{\varphi(u)} \leqq \frac{1}{N_\gamma!}\left(\sum_{p \in I_\gamma} \frac{w\lambda(p)}{p-1}\right)^{N_\gamma} \ll e^{-c\gamma r \log r}$$

és

$$\sum_v \frac{w^{U(v)}\lambda(v)}{\varphi(v)} \leqq \sum_{\substack{m \leqq x^\alpha\\ U(m)\leqq r_1}} \frac{w^{U(m)}\lambda(m)}{\varphi(m)} = o(1)x_1^w.$$

γ-ra összegezve, innen

$$\sum_{h \in B_r} \frac{w^{U(h)}\lambda(h)}{\varphi(h)} = o(1)e^{-c_8 r \log r} x_1^w,$$

majd az r-ekre összegezve könnyen látható, hogy $\sum_2 = o(x_1^w)$.

(4. 3) *bizonyítása* hasonló $R^{-}(x)$ becsléséhez, így csak vázoljuk. (4. 4) helyett a 3. lemmából most

$$z^{U(g(a_n))} \ll \sum_{\substack{v|g(a_n)\\ U(v)\geqq r_2}} w^{U(v)}, \quad r_2 = wx_2 + \frac{1}{2} h(x)\sqrt{x_2}.$$

A (4. 5) egyenlőtlenség teljesül. Ebben most $U(v) \geqq r_2$-re kell összegezni. $\sum'$ becslése teljesen hasonló, így elhagyjuk. $\sum''$ becslésénél a 4. lemma miatt elég azokra a μ-kre összegezni, amelyekre $p(\mu) \geqq y$. Ilyen esetben $U\left(\frac{v}{\mu}\right) \ll \sqrt{x_2}$, s így

$$U(u) \geqq wx_2 + \frac{1}{3} h(x)\sqrt{x_2} \left(\overset{\text{def}}{=} r_3\right).$$

Legyen most $\mu = p(\mu)h$, $h \in B_{r,\gamma}$, $h = uv$. Mivel

$$U(u) = N_\gamma \ll r\gamma \ll rt_0 \ll rx_3/\log r_3 \ll x_3^2,$$

így a v-re való összegezésben

$$U(v) \geqq wx_2 + \frac{1}{4} h(x)\sqrt{x_2} \left(\overset{\text{def}}{=} r_4\right)$$

feltehető.

A bizonyítás további része hasonló (4. 2) bizonyításához.

IRODALOM

[1] G. H. HARDY—S. RAMANUJAN: The normal number of prime factors of a number *n*, *Quart. J. Pure and Applied Math.* **48** (1917) 76—92.
[2] P. TURÁN: On a theorem of Hardy and Ramanujan, *J. London Math. Soc.* **9** (1934) 274—276.
[3] P. TURÁN: Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan, *J. London Math. Soc.* **11** (1936) 125—133.
[4] P. ERDŐS: On the number of prime factors of p−1 and some related problems concerning Euler's φ-function, *Quart. J. of Math.* (Oxford) **6** (1935) 205—213.
[5] H. HALBERSTAM: On the distribution of additive number-theoretic functions (III), *J. London Math. Soc.* **31** (1956) 14—27.
[6] И. П. Кубильюс: Вероятностные методы в теории чисел, ГТТИ 1962.
[7] А. И. Виноградов—Ю. В. Линник, Оценки суммы числа делителей в коротком отрезке арифметической прогрессии, УМН, **12** (1957), 277—280.
[8] P. ERDŐS: On the sum $\Sigma df(n)$, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952) 7—15.
[9] М. Б. Барбан, Мультипликативные функции от Σ_R — равнораспределенных последовательностей, ИАН УССР **6** (1964), 13—19.
[10] H. RADEMACHER: Beiträge zu Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie, *Abhandlungen Math. Seminar Hamburg Univ.* **3** (1924) 12—40.
[11] G. H. HARDY: *Divergent series*, Oxford. Univ. Press, 1949.

ESTIMATION OF THE NUMBER OF PRIME DIVISORS ON DIOPHANTINELY SMOOTH SEQUENCES OF INTEGERS

by I. KÁTAI

Summary

Let a_n denote a monotonically increasing sequence of integers,

$$A(x) = \sum_{a_n \leqq x} 1; \quad A(x, D, l) = \sum_{\substack{a_n \equiv l(D) \\ a_n \leqq x}} 1,$$

for which the inequalities

$$A(x) \gg \frac{x}{(\log x)^c}$$

and

$$\sum_{D \leqq x^\alpha} \max_{\substack{l(D) \\ (lD)=1}} \left| A(x, D, l) - \frac{A(x)}{\varphi(D)} \right| \ll A(x)(\log x)^{-B}$$

hold with suitable constants $\alpha > 0$, $c > 0$ and with arbitrary constant B.

Let $g(x)$ be an irreducible polynomial with integer coefficients differing from cx.

Let $h(x)$ be an increasing function, $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$. $U(n)$ denote the number of different prime factors of n.

For a constant $Z > 1$ $(w = z - 1)$ let $N(x, z, h)$ denote the number of the a_n-s not exceeding x, for which

$$|U(g(a_n)) - z \log \log x| \leqq h(x) \sqrt{\log \log x}\,.$$

Combining the method of A. I. VINOGRADOV and YU. V. LINNIK [7], P. ERDŐS [8] and M. BARBAN [9] we proved the following

THEOREM:

$$\left| \log \frac{N(x, z, h)}{A(x)(\log x)^{w - z \log z}} \right| \ll h(x)(\log \log x)^{1/2}.$$

STACIONÁRIUS SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK REGULARITÁSA ÉS SZINGULARITÁSA

Írta: KRÁMLI ANDRÁS

A dolgozat célja a stacionárius sztochasztikus folyamatok elméletének egy központi kérdésével kapcsolatban példát mutatni a funkcionálanalízis új eredményeinek alkalmazására. Erre az ad lehetőséget, hogy az úgynevezett tágabb értelemben stacionárius folyamatokat az első és második momentumok ismeretében meghatározottnak tekintjük, így a folyamat matematikai szempontból egy *Hilbert*-tér bizonyos vektorseregével azonos. Minthogy az időben való eltolás — a stacionaritás miatt — ennek a *Hilbert*-térnek egy részhalmazán izometrikus és kiterjeszthető egy, a teljes téren értelmezett unitér operátorrá, alkalmazható az unitér operátorok spektrálelőállítási tétele. Ennek segítségével az eredeti, absztrakt *Hilbert*-tér konkrétizálható; ti. izometrikusan leképezhető az egységkörön négyzetesen integrálható vektorértékű függvények $L^2_{\mathfrak{K}}$ terébe ($\mathfrak{K}$ egy vektortér, a függvények képtere). Így a harmonikus analízis módszerei, közelebbről az $L^2_{\mathfrak{K}}$ tér invariáns altereivel kapcsolatos vizsgálatok alkalmazhatók a sztochasztikus folyamatok elméletében.

Megjegyezzük, hogy a funkcionálanalízis ilyen irányú vizsgálatai éppen a sztochasztikus folyamatok prognózis elméletének hatására indultak meg az ötvenes években, WIENER, MASANI, HELSON, LAX és LOWDENSLAGER munkássága nyomán. (A harmonikus analízis legújabb módszereinek összefoglalását adja SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA és CIPRIAN FOIAŞ 1967-ben megjelent könyve [1].)

Ezekkel a módszerekkel a prognóziselmélet még szemléletesebben tárgyalható, mint a már klasszikussá vált KOLMOGOROV-féle felépítésben.

A regularitás és szingularitás problémáját e tárgyalásmód alapján ismerteti a dolgozat.

1

Mindenekelőtt összefoglaljuk a tágabb értelemben stacionárius sztochasztikus folyamatokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat.

1. DEFINÍCIÓ: Vektorértékű valószínűségi változóknak egy $\vec{\xi}_n$ sorozatát tágabb értelemben vett (diszkrét paraméterű) stacionárius sztochasztikus folyamatnak nevezzük, ha

(1) $M\vec{\xi}_n = \vec{m}$ Független n-től (M a várható értéket jelöli).

(2) $M(\xi^{(i)}_n - m^{(i)})\overline{(\xi^{(j)}_m - m^{(j)})} = r^{(i,j)}_{n-m}$, azaz a kovariancia matrix csak n és m különbségétől függ ($\xi^{(i)}_n$ a $\vec{\xi}_n$ vektor i-edik koordinátáját jelöli, $i = 1, \ldots, \nu$).

Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy $\vec{m} = \vec{0}$.

Most bevezetünk néhány jelölést.

$H_{\xi^{(i)}}$: a $\xi_n^{(i)}$ $(-\infty < n < \infty)$ valószínűségi változók által generált *Hilbert*-tér. (A belső szorzatot a kovariancia segítségével értelmezzük.)

H_ξ: a $H_{\xi^{(i)}}$ $(i=1, \ldots, \nu)$ terek által generált *Hilbert*-tér.

$H_{\xi^{(i)}}^{n-}$: a $\xi_m^{(i)}(-\infty < m < n)$ valószínűségi változók által generált *Hilbert*-tér.

$H_{\xi^{(i)}}^{n+}$: a $\xi_m^{(i)}(n < m < \infty)$ valószínűségi változók által generált *Hilbert*-tér.

H_ξ^{n-}: a $H_{\xi^{(i)}}^{n-}(i=1, \ldots, \nu)$ terek által generált *Hilbert*-tér.

H_ξ^{n+}: a $H_{\xi^{(i)}}^{n+}$ $(i=1, \ldots, \nu)$ terek által generált *Hilbert*-tér.

2. DEFINÍCIÓ: A $\vec{\xi}_n$ folyamatot lineárisan regulárisnak nevezzük, ha $H_\xi^{-\infty} = \bigcap_{n<m} H_\xi^{n-} = \{0\}$ ($\{0\}$ a zérus elemből álló altér).

(Nyilvánvaló, hogy $H_\xi^{-\infty}$ definíciója független m választásától.)

Ha $H_\xi^{\infty} = \bigcap_{n>m} H_\xi^{n+} = \{0\}$, akkor az $\vec{\eta}_n = \vec{\xi}_{-n}$ folyamat reguláris.

3. DEFINÍCIÓ: A $\vec{\xi}_n$ folyamatot lineárisan szingulárisnak nevezzük, ha $H_\xi^{n-} = H_\xi^{(n-1)-}$. (Könnyen igazolható, hogy ebben az esetben $H_\xi^{-\infty} = H_\xi^{n-}$ minden n-re.)

1. TÉTEL: *Minden $\vec{\xi}_n$ tágabb értelemben stacionárius folyamat egy $\vec{\eta}_n$ reguláris és egy $\vec{\zeta}_n$ szinguláris folyamat direkt összege a következő értelemben:*

$$\vec{\xi}_n = \vec{\eta}_n + \vec{\zeta}_n \quad \text{és} \quad H_\xi = H_\eta \oplus H_\zeta. \tag{3}$$

Bizonyítás: Legyen $H_\zeta = H_\xi^{-\infty}$ és $H_\eta = H_\xi \ominus H_\zeta$. Legyen továbbá P_η a H_η, P_ζ a H_ζ térre való ortogonális projekció. Könnyen igazolható, hogy $\vec{\eta}_n = P_\eta \vec{\xi}_n$ és $\vec{\zeta}_n = P_\zeta \vec{\xi}_n$ folyamatok eleget tesznek a tétel követelményeinek. (A $P\vec{\zeta}$ jelölés azt jelenti, hogy az operátort koordinátánként alkalmazzuk.)

A stacionárius folyamatoknak ezt a felbontását *Wold*-féle felbontásnak nevezzük. Könnyen igazolható az is, hogy a (3) felbontás egyértelmű.

Értelmezzük az U operátort a következőképpen:

Ha $\eta \in B = \{\xi_n^{(i)};\ -\infty < n < \infty;\ i=1, \ldots, \nu\}$ legyen $U\eta = U\xi_n^{(i)} = \xi_{n+1}^{(i)}$.

A stacionaritás felhasználásával igazolható, hogy U a B halmazon izometrikus, és tetszőleges $\eta_1, \ldots, \eta_n \in B$ valószínűségi változókra, valamint $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ komplex számokra

$$\frac{\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U\eta_i \right\|^2}{\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i \right\|^2} \leqq 1. \tag{4}$$

Minthogy (4) éppen a folytonos kiterjeszthetőség szükséges és elegendő feltétele, és B fundamentális H_ξ-ben U kiterjeszthető az egész H_ξ téren értelmezett izometrikus operátorrá. Hasonlóan értelmezhető az U^* izometrikus operátor is a B halmazból kiindulva:

$$U^* \xi_n^{(i)} = \xi_{n-1}^{(i)}.$$

Igazolható, hogy $U^*U = UU^* = I$ (ahol I az identikus operátor), tehát U a H_ξ téren értelmezett unitér operátor.

A *Hilbert*-tér unitér operátoraira érvényes a következő spektrálelőállítási tétel:

$$U^n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dE_\lambda, \quad \text{ahol} \quad E_\lambda(-\pi \leqq \lambda < \pi) \tag{5}$$

projekció operátoroknak egy monoton növekvő, balról folytonos serege; $E_{-\pi} = 0$, $\lim_{\lambda \to \pi} E_\lambda = I$.

Az operátorértékű integrálnak a következőképpen adhatunk értelmet:

Tetszőleges $\eta, \zeta \in H_\xi$ elempárra az $\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} d(E_\lambda \eta, \zeta)$ integrál egy közönséges (számértékű) *Lebesgue—Stieltjes* integrál; értelmezzük az $U^n(\eta, \zeta)$ operátort ezzel az integrállal. Ez az értelmezés korrekt, mert az operátort egyértelműen meghatározza a bilineáris forma.

A spektrálelőállítási tétel bizonyítását és jelentésének részletes megvilágítását l. [2]-ben.

Az E_λ spektrálsereg segítségével kiszámítható az $r_{m-n}^{lj} = (\xi_m^{(l)}, \xi_n^{(j)})$ kovariancia matrix:

$$\begin{aligned} r_{m-n}^{lj} &= (\xi_m^{(l)}, \xi_n^{(j)}) = (U^m \xi_0^{(l)}, U^n \xi_0^{(j)}) = \\ &= (U^{m-n} \xi_0^{(l)}, \xi_0^{(j)}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\lambda} d(E_\lambda \xi_0^{(l)}, \xi_0^{(j)}). \end{aligned} \tag{6}$$

A továbbiakban feltesszük, hogy a $d(E_\lambda \xi_0^{(l)}, \xi_0^{(j)})$ mértékek teljesen folytonosak a *Lebesgue*-mértékre nézve, azaz léteznek olyan $f_{lj}(e^{i\lambda})$ függvények, amelyekre $d(E_\lambda \xi_0^{(l)}, \xi_0^{(j)}) = f_{lj}(e^{i\lambda}) d\lambda$. Az $F(e^{i\lambda}) = \{f_{lj}(e^{i\lambda})\}$ matrixfüggvényt a folyamat spektrálsűrűség matrixának nevezzük. Az $f_{lj}(e^{i\lambda})$ kifejezésekről még azt is feltesszük, hogy négyzetesen integrálhatók $[-\pi, \pi)$-n. Könnyen megmutatható, hogy $F(e^{i\lambda})$ m. m. λ-ra pozitív szemidefinit matrix.

A spektrálsűrűségmatrix elemeit a (6) összefüggés megfordításával kaphatjuk meg: $f_{lj}(e^{i\lambda}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n^{lj} e^{-in\lambda}$.

Mivel $f_{lj}(e^{i\lambda})$-ról négyzetes integrálhatóságot tettünk fel, a fenti *Fourier*-sor négyzetes középben konvergál a spektrálsűrűséghez.

A (6) összefüggés nemcsak a $\xi_m^{(l)}, \xi_n^{(j)}$ valószínűségi változókra érvényes, hanem ilyen változók tetszőleges véges lineáris kombinációjára is:

$$\left(\sum_{\substack{m=m_1 \\ l=1}}^{m_2 \nu} a_{lm} \xi_m^{(l)}, \sum_{\substack{n=n_1 \\ j=1}}^{n_2 \nu} b_{jn} \xi_n^{(j)} \right) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l,j=1}^{\nu} f_{lj}(e^{i\lambda}) \left(\sum_{m=m_1}^{m_2} a_{lm} e^{im\lambda} \right) \left(\overline{\sum_{n=n_1}^{n_2} b_{jn} e^{in\lambda}} \right) d\lambda. \tag{7}$$

Határátmenettel igazolható, hogy a (7) formula érvényes tetszőleges $\xi, \eta \in H_\xi$ elempárra — ekkor a (7) formulában szereplő trigonometrikus polinomok helyett a spektrálsűrűségre nézve négyzetes középben konvergáló *Fourier*-sorok állnak.

Tetszőleges ξ H_ξ-beli elemnek megfelel tehát egy, a spektrálsűrűségre nézve négyzetesen integrálható[1] $\vec{\varphi}(e^{i\lambda})$ vektorfüggvény és

$$\|\xi\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l,j=0}^{v} f_{lj}(e^{i\lambda})\varphi_l(e^{i\lambda})\bar{\varphi}_j(e^{i\lambda})\,d\lambda, \tag{8}$$

ami azt jelenti, hogy ez a megfeleltetés izometrikus. E megfeleltetés során $\xi_n^{(l)}$-nek $e^{in\lambda}\vec{e}_l$ felel meg ($\vec{e}_l$ a v-dimenziós vektortér l-edik egységvektora), — így az U unitér operátornak az $e^{i\lambda}$ skalár függvénnyel való szorzás felel meg.

A fenti megfeleltetés megőríz a H_ξ térre vonatkozó minden olyan információt, amelyre a spektrálsűrűség-függvény ismeretében következtethetünk.

2

Ebben a fejezetben ismertetünk néhány alapvető fogalmat és eredményt az egységkörön (vagy ami ugyanazt jelenti, a $[-\pi, \pi)$ intervallumon) értelmezett vektorértékű függvények *Hilbert*-terével kapcsolatban. Ezekre a regularitás és szingularitás kérdésének vizsgálatához lesz szükségünk. Minthogy e tételek tisztán a funkcionálanalízis körébe tartoznak, bizonyításukat csak vázoljuk, hangsúlyozva a sztochasztikus folyamatok elméletével való kapcsolatukat. E tételek részletes bizonyítása megtalálható pl. [3]-ban.

1. DEFINÍCIÓ: L_K^2-nak nevezzük az egységkörön értelmezett olyan $\vec{\varphi}(e^{i\lambda})$ mérhető, vektorértékű függvények terét, amelyekre

$$\|\vec{\varphi}(e^{i\lambda})\|_{L_K^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \|\vec{\varphi}(\lambda)\|_K^2\,d\lambda$$

létezik (K a függvények képtere, a v dimenziós euklideszi tér és $\| \ \|_K$ a K-beli normát jelöli).

Megmutatható, hogy L_K^2 *Hilbert*-tér a

$$(\vec{\varphi}(e^{i\lambda}), \vec{\psi}(e^{i\lambda}))_{L_K^2} = \int_{-\pi}^{\pi} (\vec{\varphi}(\lambda), \vec{\psi}(\lambda))_K\,d\lambda$$

belső szorzatra nézve, ahol az $\int$ jel mögötti belső szorzat a K térben értendő. A továbbiakban — ha ez nem ad okot félreértésre — nem jelöljük, hogy a belső szorzat melyik térben értendő.

Ha $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_v$ ortonormált bázis K-ban, akkor $\vec{\varphi}(e^{i\lambda})$ felírható koordinátai segítségével:

$$\vec{\varphi}(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^{v} \varphi^{(l)}(e^{i\lambda})\vec{e}_l, \quad \text{ahol} \quad \varphi^{(l)}(e^{i\lambda}) \in L^2.$$

[1] A fenti kifejezések pontosabban azt jelentik, hogy a [8] integrál létezik, ill. a [7] integrál konvergál, ha az összegezés felső határát végtelenbe tartatjuk. E szóhasználat értelme a vektorértékű négyzetesen integrálható függvények terének bevezetése után válik világossá.

Érvényes ekkor a „*Parseval*-képlet":

$$(\vec{\varphi}(e^{i\lambda}), \vec{\psi}(e^{i\lambda}))_{L^2_K} = \sum_{l=1}^{\nu} (\varphi^{(l)}(e^{i\lambda}), \psi^{(l)}(e^{i\lambda}))_{L^2}.$$

Az $e^{ik\lambda}\vec{e}_l$ alakú függvények teljes ortonormált rendszert alkotnak L^2_K-ban. Tehát minden $\vec{\varphi}(e^{i\lambda}) \in L^2_K$-ra

$$\vec{\varphi}(e^{i\lambda}) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{lk} e^{ik\lambda}\vec{e}_l = \sum_{-\infty}^{\infty} \vec{a}_k e^{ik\lambda}$$

$$\left(\vec{a}_k = \sum_{l=1}^{\nu} a_{lk}\vec{e}_l \in K\right).$$

Ily módon $\vec{\varphi}(e^{i\lambda}) \in L^2_K$-t egy vektoregyütthatójú *Fourier*-sorba fejtettük. Ebben az esetben is érvényes a „*Parseval*-képlet":
ha

$$\vec{\varphi}(e^{i\lambda}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \vec{a}_k e^{ik\lambda}, \vec{\psi}(e^{i\lambda}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \vec{b}_k e^{ik\lambda},$$

akkor

$$(\vec{\varphi}(e^{i\lambda}), \vec{\psi}(e^{i\lambda}))_{L^2_K} = \sum_{-\infty}^{\infty} (\vec{a}_k, \vec{b}_k)_K .$$

A fentiek alapján az (1, 8) integrál a következőképpen értelmezhető:

Minthogy $F(e^{i\lambda})$ m. m. λ-ra pozitív operátor K-ban, van olyan $G(e^{i\lambda})$ operátorfüggvény, hogy

$$F(e^{i\lambda}) = G^*(e^{i\lambda})G(e^{i\lambda}). \tag{1}$$

Ezért

$$\int \sum_{l,j=1}^{\nu} f_{lj}(e^{i\lambda})\varphi^{(l)}(e^{i\lambda})\overline{\psi^{(l)}(e^{i\lambda})}\, d\lambda = \int (F(e^{i\lambda})\vec{\varphi}(e^{i\lambda}), \vec{\psi}(e^{i\lambda}))_K\, d\lambda =$$

$$= \int (G(e^{i\lambda})\vec{\varphi}(e^{i\lambda}), G(e^{i\lambda})\vec{\psi}(e^{i\lambda}))_K\, d\lambda = (G(e^{i\lambda})\vec{\varphi}(e^{i\lambda}), G(e^{i\lambda})\vec{\psi}(e^{i\lambda}))_{L^2_K} .$$

A H_ξ tér tehát izometrikus a $G(e^{i\lambda})L^2_K \subseteq L^2_K$ altérrel. ($G(e^{i\lambda})$-t, mint K-beli operátort, pontonként alkalmazzuk L^2_K elemeire.)

2. Definíció: Terjedelem-függvénynek nevezünk egy olyan, az egységkörön értelmezett mérhető $J(e^{i\lambda})$ függvényt, amelynek értékei a K tér alterei. A mérhetőség a következőképpen értendő:

Jelentse $P(e^{i\lambda})$ a $J(e^{i\lambda})$ altérre való vetítést; $J(e^{i\lambda})$ mérhető, ha a $(P(e^{i\lambda})\vec{a}, \vec{b})_K$ belső szorzat tetszőleges $\vec{a}, \vec{b} \in K$ vektorpárra mérhető függvény.

Jelölje M_J az L^2_K térnek azt az alterét, amelybe az összes olyan $\vec{\varphi}(e^{i\lambda}) \in L^2_K$ függvények tartoznak, amelyekre $\vec{\varphi}(e^{i\lambda}) \in J(e^{i\lambda})$ m. m. λ pontban.

1. Tétel: *Ha P jelöli az L_K^2 térnek az M_J altérre való vetítését, $P(e^{i\lambda})$ pedig K vetítését $J(e^{i\lambda})$-re, akkor tetszőleges $\vec{\varphi}(e^{i\lambda})\in L_K^2$-ra*

$$(2)\qquad (P\vec{\varphi})(e^{i\lambda}) = P(e^{i\lambda})\vec{\varphi}(e^{i\lambda}).$$

Bizonyítás: Jelölje P' azt az operátort, amely minden $\vec{\varphi}(e^{i\lambda})\in L_K^2$-hoz $P(e^{i\lambda})\vec{\varphi}(e^{i\lambda})\in L_K^2$-t rendeli hozzá. P' önadjungált és idempotens, tehát szintén proekció. Tegyük fel, hogy értékkészlete az $N\subseteq L_K^2$ altér. Minthogy $P(e^{i\lambda})\vec{\varphi}(e^{i\lambda})\in J(e^{i\lambda})$ m. m. λ-ra, $P'\vec{\varphi}(e^{i\lambda})\in M_J$ minden $\vec{\varphi}(e^{i\lambda})\in L_K^2$-ra, tehát $N\subseteq M_J$. Megmutatjuk, hogy az egyenlőség jele érvényes. Tegyük fel, hogy van olyan $\vec{\psi}(e^{i\lambda})\in M_J$, amely ortogonális N-re, azaz:

$$(3)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} (P(e^{i\lambda})\vec{\varphi}(e^{i\lambda}), \vec{\psi}(e^{i\lambda}))_K\, d\lambda = 0 \quad \text{tetszőleges} \quad \vec{\varphi}(e^{i\lambda})\in L_K^2\text{-ra.}$$

Mivel $P(e^{i\lambda})$ önadjungált operátor K-ban (m. m. λ-ra), (3) így is írható:

$$(4)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} (P(e^{i\lambda})\vec{\varphi}(e^{i\lambda}), \vec{\psi}(e^{i\lambda}))_K\, d\lambda = (\vec{\varphi}(e^{i\lambda}), P'\vec{\psi}(e^{i\lambda}))_{L_K^2} = 0,$$

ami azt jelenti, hogy $P'\vec{\psi}(e^{i\lambda})$ az L_K^2 tér zéruseleme. De $P'\vec{\psi}(e^{i\lambda}) = (\vec{\psi}e^{i\lambda})$, amiből következik, hogy $\vec{\psi}(e^{i\lambda})\equiv 0$, azaz $N\subseteq M_J$. Ezzel a (2. 1) tételt igazoltuk.

3. Definíció: H_K^2-val jelöljük az L_K^2 tér azon elemei által alkotott *Hilbert*-teret, amelyek negatív indexű *Fourier*-együttható vektorai eltűnnek, azaz az olyan, az egységkörön négyzetesen integrálható vektorértékű függvények terét, amelyek az egységkör belsejében analitikusak. Pontosabban ez azt jelenti, hogy $\vec{\varphi}(e^{i\lambda})\in H_K^2$ akkor és csak akkor, ha $\vec{\varphi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{a}_k z^k$ analitikus az egységkörben és $\lim_{\varrho\to 1} \|\vec{\varphi}(\varrho e^{i\lambda}) - \vec{\varphi}(e^{i\lambda})\|_{L_K^2} = 0$ ($\vec{a}_k$ az $\vec{\varphi}(\lambda)$ függvény k-adik *Fourier*-együtthatója.)

Analóg módon definiálhatjuk a négyzetesen integrálható konjugált analitikus vektorértékű függvények K_K^2 terét is: $\vec{\varphi}(e^{i\lambda})\in K_K^2$ akkor és csak akkor, ha $\vec{\varphi}(e^{i\lambda})$ pozitív indexű *Fourier*-együtthatói eltűnnek.

4. Definíció: Az L_K^2 tér M alterét invariánsnak nevezzük, ha $e^{-i\lambda}M\subseteq M$. Ha $e^{i\lambda}M = M$ azaz, ha M $e^{i\lambda}$-ra nézve is invariáns, az M alteret duplán invariánsnak nevezzük. Az invariáns, de duplán nem invariáns altereket ($e^{-i\lambda}M\subset M$) szimplán invariánsnak nevezzük.

A regularitás és szingularitás problémájával kapcsolatban az invariáns altereknek kitüntetett szerepük van. H_ξ^{n+} szimplán invariáns az U eltolás operátorra nézve, H_ξ^{n-} pedig az U^* „visszaléptetésre" nézve. A H_ξ^{∞} és $H_\xi^{-\infty}$ alterek duplán invariánsak. H_ξ^{∞} a H_ξ^{n+} altérben levő legbővebb duplán invariáns altér. Ennek megfelelője igaz a $H_\xi^{-\infty}$ altérre is. A $\vec{\xi}_n$ folyamat tehát akkor és csak akkor reguláris, ha H_ξ^{n-} nem tartalmaz valódi duplán invariáns alteret — analóg állítás igaz az $\vec{\eta}_n = \vec{\xi}_{-n}$ folyamatra is.

A $\vec{\xi}_n$ folyamat akkor és csak akkor szinguláris, ha H_ξ^{n-} duplán invariáns. Az $\vec{\eta}_n = \vec{\xi}_{-n}$ folyamatra analóg állítás érvényes.

Az előbbi, a H_ξ térre vonatkozó megállapításaink megfelelői az L_K^2 térben a következőképpen szólnak (figyelembe véve, hogy a $\mathsf{H}_\xi G(e^{i\lambda})\mathsf{L}_\mathsf{K}^2$ megfeltetés során az U eltolásnak az $e^{i\lambda}$-val való szorzás felel meg).

A $\vec{\xi}_n$ folyamat akkor és csak akkor reguláris, ha az $\mathsf{M}=G(e^{i\lambda})\mathsf{L}_\mathsf{K}^2$ szimplán invariáns altér nem tartalmaz valódi duplán invariáns alteret. ($G(e^{i\lambda})$ definícióját l. az (1) formulában.)

A $\vec{\xi}_n$ folyamat akkor és csak akkor szinguláris, ha M duplán invariáns.

2. TÉTEL: *Az L_K^2 tér duplán invariáns alterei pontosan az M_J alakú alterek, ahol $\mathsf{J}(e^{i\lambda})$ egy az M altér által egyértelműen meghatározott terjedelem-függvény.*

Bizonyítás: Nyilvánvaló, hogy az M_J alakú alterek duplán invariánsak. A $\mathsf{J}(e^{i\lambda})$ terjedelem-függvény egyértelműsége az 1. tételből következik.

Tegyük fel, hogy $\mathsf{M}\subseteq\mathsf{L}_\mathsf{K}^2$ duplán invariáns. Jelölje $\boldsymbol{P}$ az L_K^2 tér vetítését M-re. A $\vec{\varphi}_{nk}(e^{i\lambda})=\boldsymbol{P}e^{in\lambda}\vec{e}_k$ alakú függvények kifeszítik az M alteret. ($\vec{e}_k$ a K tér k-adik bázisvektora.) Jelölje $\mathsf{J}(e^{i\lambda})$ a $\vec{\varphi}_{nk}(e^{i\lambda})$ K-beli vektorok által kifeszített alteret. Nyilvánvaló, hogy $\mathsf{M}\subset\mathsf{M}_\mathsf{J}$. Hogy pontosan az egyenlőség jele érvényes, azt az 1. tételben alkalmazott gondolatmenettel igazolhatjuk.

Bizonyításunk csak akkor lesz teljes, ha $\mathsf{J}(e^{i\lambda})$-ról megmutatjuk, hogy mérhető. Az 1. tételből és $\mathsf{J}(e^{i\lambda})$ definíciójából azonban ez következik.

A szimplán invariáns alterek hasonló előállítása már valamivel nehezebb probléma. E célból lényegében a *Wold*-féle felbontás gondolatát fogjuk alkalmazni.

Igaz a következő tétel:

3. TÉTEL: *Minden $\mathsf{M}\subseteq\mathsf{L}_\mathsf{K}^2$ szimplán invariáns altér*

$$\mathsf{M} = U(e^{i\lambda})\mathsf{K}_{\mathsf{K}_1}^2\oplus\mathsf{M}_\mathsf{J} \tag{5}$$

alakban áll elő, ahol K_1 a $\varkappa\leqq\nu$ dimenziós euklideszi tér és $U(e^{i\lambda})$ m. m. λ pontban K_1-et izometrikusan képezi le K egy alterére, M_J pedig egy $\mathsf{J}(e^{i\lambda})$ terjedelem-függvény által generált duplán invariáns altér.

A $\oplus$ jel nemcsak „globálisan" — L_K^2-ban — érvényes, hanem „pontonként" is: $U(e^{i\lambda})$ képtere m. m. λ pontban ortogonális $\mathsf{J}(e^{i\lambda})$-ra. (Ezenkívül $U(e^{i\lambda})$-ról még az is igazolható, hogy gyengén mérhető, azaz tetszőleges $\vec{a}\in\mathsf{K}_1$, $\vec{b}\in\mathsf{K}$-ra $(U(e^{i\lambda})\vec{a}, \vec{b})_\mathsf{K}$ mérhető függvénye λ-nak.)

(A definíciókból egyszerűen következik, hogy a fenti feltételeknek elegettevő altér valóban szimplán invariáns, tehát az (5) feltétel elegendő is ahhoz, hogy egy $\mathsf{M}\subseteq\mathsf{L}_\mathsf{K}^2$ altér szimplán invariáns legyen.)

Bizonyítás. Legyen $\mathsf{M}\subseteq\mathsf{L}_\mathsf{K}^2$ tetszőleges szimplán invariáns altér. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathsf{M}_{-n} = e^{-i\lambda}\mathsf{M}$$

$$\mathsf{M}_{-\infty} = \bigcap_{n>-\infty}\mathsf{M}_{-n}.$$

$\mathsf{M}_{-\infty}$ az M altér legbővebb duplán invariáns altere. A 2. tétel szerint van olyan $\mathfrak{J}(e^{i\lambda})$ terjedelem-függvény, hogy $\mathsf{M}_{-\infty} = \mathsf{M}_{\mathfrak{J}}$.

Legyen N az $\mathsf{M}_{-\infty}$ altér ortogonális komplementere M-ben:

$$\mathsf{N} \oplus \mathsf{M}_{\mathfrak{J}} = \mathsf{M}. \tag{6}$$

Megmutatjuk, hogy ha $\vec{\varphi}(e^{i\lambda}) \in \mathsf{N}$ akkor $\vec{\varphi}(e^{i\lambda})$ m. m. pontban ortogonális $\mathfrak{J}(e^{i\lambda})$-ra. A „globális ortogonalitásból" és az 1. tételből következik, hogy tetszőleges $\vec{\psi}(e^{i\lambda}) \in \mathsf{L}^2_{\mathsf{K}}$-ra

$$(\vec{\varphi}(e^{i\lambda}), (P\vec{\psi})(e^{i\lambda}))_{\mathsf{L}^2_{\mathsf{K}}} = (\vec{\varphi}(e^{i\lambda}), P(e^{i\lambda})\vec{\psi}(e^{i\lambda}))_{\mathsf{L}^2_{\mathsf{K}}} = 0. \tag{7}$$

($P(e^{i\lambda})$ jelenti K vetítését $\mathfrak{J}(e^{i\lambda})$-ra, $\boldsymbol{P}$ pedig $\mathsf{L}^2_{\mathsf{K}}$ vetítését $\mathsf{M}_{\mathfrak{J}}$-re.) $P(e^{i\lambda})$ önadjungált volta miatt (7) így is írható:

$$(P(e^{i\lambda})\vec{\varphi}(e^{i\lambda}), \vec{\psi}(e^{i\lambda}))_{\mathsf{L}^2_{\mathsf{K}}} = 0. \tag{8}$$

Minthogy $\vec{\psi}(e^{i\lambda})$ tetszőleges $\mathsf{L}^2_{\mathsf{K}}$-beli vektor $P(e^{i\lambda})\vec{\varphi}(e^{i\lambda}) = \vec{0}$ m. m. λ pontban, ami éppen a kívánt állítás.

Jelölje R_{-n} $e^{-i\lambda(n+1)}\mathsf{N}$ ortogonális komplementerét $e^{-i\lambda n}\mathsf{N}$-ben. N már nem tartalmaz valódi duplán invariáns alteret, ezért:

$$\mathsf{N} = \mathsf{R}_0 \oplus \mathsf{R}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{R}_n \oplus \ldots$$

Legyen $\vec{E}_1(e^{i\lambda}), \ldots, \vec{E}_k(e^{i\lambda})$ ortonormált bázis R_0-ban. Ekkor $\{e^{-i\lambda k}\vec{E}_j(e^{i\lambda})\}$ ortonormált bázis lesz N-ben ($0 \leqq k < \infty$; $1 \leqq j \leqq k$). A már többször alkalmazott tipikus gondolatmenettel igazolható, hogy $(\vec{E}_j(e^{i\lambda}), \vec{E}_k(e^{i\lambda}))_{\mathsf{K}} = \delta_{jk}$ m. m. λ-ra.

Minden $\vec{\varphi}(e^{i\lambda}) \in \mathsf{N}$ sorbafejthető a fenti ortonormált rendszer szerint:

$$\vec{\varphi}(e^{i\lambda}) = \sum_{j=1, n=0}^{\varkappa, \infty} a_{jn} e^{-i\lambda n} \vec{E}_j(e^{i\lambda}). \tag{9}$$

Bevezetve a $\sum_{n=0}^{\infty} a_{jn} e^{-i\lambda n} = \varphi_j(e^{i\lambda})$ jelölést,

$$\vec{\varphi}(e^{i\lambda}) = \sum_{j=1}^{\varkappa} \varphi_j(e^{i\lambda}) \vec{E}_j(e^{i\lambda}). \tag{10}$$

Legyen K_1 a $\varkappa$ dimenziós euklideszi tér és $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_\varkappa$ ortonormált bázis K_1-ben.

Legyen U a $\mathsf{K}^2_{\mathsf{K}_1}$ térnek az N altérre való unitér leképezése a következőképpen értelmezve:

$$U \sum_{j=1}^{\varkappa} \varphi_j(e^{i\lambda}) \vec{e}_j = \sum \varphi_j(e^{i\lambda}) \vec{E}_j(e^{i\lambda})$$

($\varphi_j(e^{i\lambda})$ függvények, konjugált analitikus skalár függvények, *Fourier*-sorukban pozitív indexű együtthatók nem szerepelnek).

Tehát van olyan „globális" unitér operátor, hogy

$$\mathsf{N} = U\mathsf{K}^2_{\mathsf{K}_1}.$$

A probléma már csak az, hogy az U „globális" unitér operátort „pontonkénti" izometrikus operátorok segítségével kell előállítani: találni kell egy olyan $U(e^{i\lambda})$

operátorfüggvényt, amely a K_1 teret m. m. pontban izometrikusan képezi le K-ra, és amelyre fennáll az

(11) $$(U\vec{\varphi})(e^{i\lambda}) = U(e^{i\lambda})\vec{\varphi}(e^{i\lambda})$$

összefüggés.

(11)-nek egy következménye lenne az az állítás, hogy

(12) $$U\vec{e}_j = \vec{E}_j(e^{i\lambda}) = U(e^{i\lambda})\vec{e}_j.$$

(12) $U(e^{i\lambda})$ definíciójául szolgálhat. Mivel az $\{\vec{E}_j(e^{i\lambda})\}$ rendszer m. m. λ pontban is ortonormált, az így definiált $U(e^{i\lambda})$ operátorfüggvény m. m. λ pontban izometrikus, tehát kielégíti a 3. tétel követelményeit. (A zérusmértékű halmazokkal, valamint $U(e^{i\lambda})$ mérhetőségével kapcsolatos problémák kiküszöbölése pusztán technikai kérdés — ezeket itt nem részletezzük.)

Megjegyezzük, hogy az $e^{i\lambda}$ függvénnyel való szorzásra nézve szimplán invariáns alterekre analóg tétel érvényes. $\mathsf{K}^2_{\mathsf{K}_1}$ szerepét itt $\mathsf{H}^2_{\mathsf{K}_1}$ veszi át.

3

A második fejezetben megmutattuk, hogy milyen módon lehet visszavezetni a stacionárius folyamatok regularitásának és szingularitásának problémáját az $\mathsf{L}^2_{\mathsf{K}}$ tér invariáns altereivel kapcsolatos kérdésekre. Ebben a fejezetben ennek alapján a következő problémákat vizsgáljuk:

1. Mi a regularitás szükséges és elegendő feltétele?
2. Milyen esetben igaz a következő alternatíva: a $\vec{\xi}_n$ folyamat vagy reguláris, vagy szinguláris?
3. Mikor következik a $\vec{\xi}_n$ folyamat regularitásából az $\vec{\eta}_n = \vec{\xi}_{-n}$ „fordított" folyamat regularitása?

Az e kérdésekre adandó válaszokhoz szükségünk van a következő definícióra:

1. Definíció:

A $\vec{\xi}_n$ folyamat állandó rangú, ha spektrálsűrűség matrixának rangja m. m. λ pontban ugyanaz a $\varkappa \leqq \nu$ szám. A $\vec{\xi}_n$ folyamatot teljesrangúnak nevezzük, ha $\varkappa = \nu$.

A folyamat rangjának definíciójából következik, hogy $\varkappa$ m. m. pontban a (2. 1) formulával definiált $G(e^{i\lambda})\mathsf{L}^2_{\mathsf{K}}$ tér lokális dimenziójával egyezik meg — azaz $\varkappa$ m. m. pontban a $G(e^{i\lambda})\vec{\varphi}(e^{i\lambda})/\vec{\varphi}(e^{i\lambda})$ befutja az $\mathsf{L}^2_{\mathsf{K}}$ tér elemeit) K-beli vektorok által kifeszített altér dimenziója. Itt $\mathsf{L}^2_{\mathsf{K}}$ tulajdonságaiból csak azt használjuk fel, hogy elemei m. m. λ pontban kifeszítik a K teret. Ezért hasonlóan igaz az is, hogy $\varkappa$ a $G(e^{i\lambda})\mathsf{K}^2_{\mathsf{K}}$ tér lokális dimenziójával egyenlő.

$G(e^{i\lambda})\mathsf{K}^2_{\mathsf{K}}$ szimplán invariáns altér lokális dimenziója m. m. pontban a (2. 3.) tételben szereplő (2. 5) felbontás miatt a $\daleth(e^{i\lambda})$ terjedelem-függvény és az $U(e^{i\lambda})$ izometrikus operátorfüggvény dimenziójának összege.

Ennek alapján a 2. kérdésre már válaszolhatunk is: pontosan az 1 rangú folyamatok esetében igaz az az alternatíva, hogy a folyamat vagy reguláris, vagy szinguláris. (Megjegyezzük, hogy az állítás második része feltételezi azt a tényt, hogy tetszőleges négyzetesen integrálható pozitív szemidefinit matrixfüggvényhez van olyan stacionárius folyamat, amelynek éppen ő a spektrálsűrűségfüggvénye. Ez a tény a sztochasztikus folyamatok *Kolmogorov*-féle reprezentációs tételéből következik.)

Az $F(e^{i\lambda})$ spektrálsűrűség matrix (2. 1) szorzatfelbontására eddig semmiféle feltételt nem szabtunk. A továbbiakban olyan $G(e^{i\lambda})$ operátorfüggvényt (matrixfüggvényt) keresünk, amelynek oszlopvektorai konjugált analitikus vektorfüggvények.

Bebizonyítjuk a következő tételt:

1. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy* $F(e^{i\lambda}) = G^*(e^{i\lambda})G(e^{i\lambda})$ *valamely* $G(e^{i\lambda})$ *operátorfüggvényre. Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy létezzék olyan* $\tilde{G}(e^{i\lambda})$ *konjugált analitikus operátorfüggvény, amely a fenti egyenletet szintén kielégíti az, hogy* $G(e^{i\lambda})\mathsf{K}^2_{\mathsf{K}}$ *ne tartalmazzon valódi duplán invariáns alteret.*

(Ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy a $\vec{\xi}_n$ folyamat reguláris — az 1. tétel tehát a regularitás szükséges és elegendő feltétele.)

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $G(e^{i\lambda})\mathsf{K}^2_{\mathsf{K}}$ nem tartalmaz valódi duplán invariáns alteret. Ekkor:

$$G(e^{i\lambda})\mathsf{K}^2_{\mathsf{K}} = U(e^{i\lambda})\mathsf{K}^2_{\mathsf{K}_1}$$

(ahol $U(e^{i\lambda})$ izometrikusan képezi le K_1-et K-ba). Speciálisan, ha $\vec{G}_j(e^{i\lambda})$ a $G(e^{i\lambda})$ operátor matrixának j-edik oszlopvektora, akkor van olyan $\vec{\tilde{G}}_j(e^{i\lambda})$ vektorfüggvény, hogy $\vec{G}_j(e^{i\lambda}) = U(e^{i\lambda})\vec{\tilde{G}}_j(e^{i\lambda})$.

Ez azt jelenti, hogy van olyan konjugált analitikus operátorfüggvény, hogy:

$$G(e^{i\lambda}) = U(e^{i\lambda})\tilde{G}(e^{i\lambda}). \tag{1}$$

Megmutatjuk, hogy

$$\tilde{G}^*(e^{i\lambda})\tilde{G}(e^{i\lambda}) = G^*(e^{i\lambda})G(e^{i\lambda}) = F(e^{i\lambda}). \tag{2}$$

Az $F(e^{i\lambda}) = G^*(e^{i\lambda})G(e^{i\lambda})$ összefüggés tulajdonképpen azt jelenti, hogy az $F(e^{i\lambda})$ operátor matrixának $F_{lj}(e^{i\lambda})$ eleme a $G(e^{i\lambda})$ matrix l-edik és j-edik oszlopvektora skaláris szorzatának komplex konjugáltja. Mivel $U(e^{i\lambda})$ izometrikus:

$$(\vec{G}_l(e^{i\lambda}), \vec{G}_j(e^{i\lambda})) = (U(e^{i\lambda})\vec{G}_l(e^{i\lambda}), U(e^{i\lambda})\vec{G}_j(e^{i\lambda})) = (\vec{\tilde{G}}(e^{i\lambda}), \vec{\tilde{G}}(e^{i\lambda})),$$

ami éppen azt jelenti, hogy $\tilde{G}^*(e^{i\lambda})\tilde{G}(e^{i\lambda}) = F(e^{i\lambda})$.

Ezzel a tétel első állítását igazoltuk.

Tegyük fel, hogy $F(e^{i\lambda}) = \tilde{G}^*(e^{i\lambda})\tilde{G}(e^{i\lambda})$ valamely $\tilde{G}(e^{i\lambda})$ konjugált analitikus operátorfüggvényre. Mivel $\tilde{G}(e^{i\lambda})\mathsf{K}^2_{\mathsf{K}} \subseteq \mathsf{K}^2_{\mathsf{K}}$, $\tilde{G}(e^{i\lambda})\mathsf{K}^2_{\mathsf{K}}$ nem tartalmaz valódi duplán invariáns alteret. Megmutatjuk, hogy tetszőleges olyan $G(e^{i\lambda})$-ra, amelyre $F(e^{i\lambda}) = G^*(e^{i\lambda})G(e^{i\lambda})$, $G(e^{i\lambda})\mathsf{K}^2_{\mathsf{K}}$ izometrikus $\tilde{G}(e^{i\lambda})\mathsf{K}^2_{\mathsf{K}}$-val, és ez az izometrikus leképezés felcserélhető az $e^{-i\lambda}$-val való szorzás operátorával, tehát $\tilde{G}(e^{i\lambda})\mathsf{K}^2_{\mathsf{K}}$ és $G(e^{i\lambda})\mathsf{K}^2_{\mathsf{K}}$ terek regularitás szempontjából ekvivalensek.

Egy ilyen izometrikus leképezés lehet a következő:

$$U(\tilde{G}(e^{i\lambda})\vec{p}(e^{i\lambda})) = G(e^{i\lambda})p(e^{i\lambda}).$$

($\vec{p}(e^{i\lambda})$ tetszőleges konjugált analitikus vektoregyütthatójú trigonometrikus polinom.)

Könnyen igazolható, hogy U valóban izometrikus és felcserélhető az $e^{-i\lambda}$-val való szorzás operátorával. U folytonosan kiterjeszthető a teljes $\tilde{G}(e^{i\lambda})\mathsf{K}_K^2$ térre, miközben U képtere a teljes $G(e^{i\lambda})\mathsf{K}_K^2$ tér lesz.

Ezzel az 1. tételt igazoltuk.

Természetesen analóg tétel igaz a $G(e^{i\lambda})\mathsf{H}_K^2$ térre is: $G(e^{i\lambda})\mathsf{H}_K^2$ akkor és csak akkor nem tartalmaz valódi duplán invariáns alteret, ha $F(e^{i\lambda}) = \tilde{G}^*(e^{i\lambda})\tilde{G}(e^{i\lambda})$ valamely analitikus operátorfüggvényre.

A regularitás kérdését tehát a spektrálsűrűség matrix konjugált analitikus szorzatfelbontásának kérdésére vezettük vissza. Teljes rangú folyamatra ismeretes a következő szükséges és elegendő feltétel (l. [3]):

Az $F(e^{i\lambda})$ teljes rangú pozitív definit matrixfüggvény akkor és csak akkor faktorizálható (2. 1) alakban — akár analitikus, akár konjugált analitikus $G(e^{i\lambda})$-val, ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \det F(e^{i\lambda})\, d\lambda > -\infty. \tag{3}$$

E tétel bizonyítása nem egyszerű, a harmonikus analízis apparátusának mélyebb felhasználását igényli, ezért nem ismertetjük [l. [3], [4]].

Az idézett tétel szimmetrikus voltából azonnal leolvasható, hogy teljes rangú folyamatok esetében az egyik irányú regularitásából következik a másik irányú regularitás is.

Ezután rátérünk a nem teljes rangú folyamatok vizsgálatára, ehhez egy újabb definícióra lesz szükségünk.

2. Definíció: Egy $\mathsf{J}(e^{i\lambda})$ terjedelem-függvényt analitikusnak nevezünk, ha van olyan $\vec{\varphi}_1(e^{i\lambda}), \ldots, \vec{\varphi}_k(e^{i\lambda})$ — analitikus vektor függvényekből álló — függvényrendszer, amelynek elemei m. m. λ pontban kifeszítik $\mathsf{J}(e^{i\lambda})$-t.

A konjugált analitikus terjedelem-függvény hasonló módon értelmezhető.

A konjugált analitikus szorzatfelbontás létezésének egy szükséges feltétele, hogy az $\vec{F}_j(e^{i\lambda})$ oszlopvektorok által kifeszített $\mathsf{J}(e^{i\lambda})$ terjedelem-függvény analitikus legyen, mert $\tilde{G}^*(e^{i\lambda})$ oszlopvektorai ugyanezt a terjedelem-függvényt definiálják.

Legyen H_J az összes olyan analitikus függvények tere, amelyek értékei m. m. λ-ra a $\mathsf{J}(e^{i\lambda})$ térbe esnek. $\mathsf{H}_\mathsf{J} \subset \mathsf{H}_K^2$, tehát H_J nem tartalmaz valódi duplán invariáns alteret, ezért $\mathsf{H}_\mathsf{J} = U(e^{i\lambda})\mathsf{H}_{K_1}^2$ — ahol $U(e^{i\lambda})$ analitikus ($\mathsf{H}_\mathsf{J} \subseteqq \mathsf{H}_K^2$) izometrikus operátorfüggvény. Legyen $\tilde{F}(e^{i\lambda}) = U^*(e^{i\lambda})F(e^{i\lambda})U(e^{i\lambda})$. $\tilde{F}(e^{i\lambda})$ már teljes rangú operátorfüggvény: unitér ekvivalens a saját terjedelem-függvényére való korlátozásával. Azt állítjuk, hogy ha $\tilde{F}(e^{i\lambda})$ konjugált analitikusan faktorizálható, akkor ugyanez áll $F(e^{i\lambda})$-ra is. $\tilde{F}(e^{i\lambda})$ faktorizálhatóságának pedig (3) szükséges és elegendő feltétele.

Tegyük fel, hogy $\tilde{F}(e^{i\lambda}) = \tilde{G}^*(e^{i\lambda})\tilde{G}(e^{i\lambda})$, ahol $\tilde{G}(e^{i\lambda})$ konjugált analitikus és K-t képezi le K_1-re.

Minthogy $U(e^{i\lambda})U^*(e^{i\lambda})$ a K tér projekciója $\mathsf{J}(e^{i\lambda})$-ra,

$$F(e^{i\lambda}) = U(e^{i\lambda})\tilde{F}(e^{i\lambda})U^*(e^{i\lambda}) = (\tilde{G}(e^{i\lambda})U^*(e^{i\lambda}))^*(G(e^{i\lambda})U^*(e^{i\lambda}))$$

és $\tilde{G}(e^{i\lambda})U^*(e^{i\lambda})$ konjugált analitikus, mert $\tilde{G}(e^{i\lambda})$ és $U^*(e^{i\lambda})$ is azok voltak.

(Megjegyezzük, hogy $F(e^{i\lambda})$ faktorizálhatóságának szükséges feltétele is $\tilde{F}(e^{i\lambda})$ konjugált analitikus faktorizálhatósága — ennek igazolása sem bonyolult, de bizonyítása a harmonikus analízisnek ebben a dolgozatban nem ismertetett fogalmait is felhasználja.)

Ha az $F(e^{i\lambda})$ oszlopvektorai által meghatározott terjedelem-függvény egyidejűleg analitikus és konjugált analitikus, akkor a $\vec{\xi}_n$ folyamat vagy mindkét irányban reguláris, vagy egyik irányban sem; ti. ezen szükséges feltétel teljesülése esetén $F(e^{i\lambda})$-nak a terjedelem-függvényére való korlátozása vagy kielégíti a szimmetrikus (3) feltételt, vagy nem.

Végül megvizsgáljuk azt a kérdést, hogy van-e olyan nem triviális terjedelem-függvény, amely egyidejűleg analitikus és konjugált analitikus —, ill. vannak-e olyanok, amelyekről ezt nem állíthatjuk.

Erre PINSZKER egyszerű példája szolgál illusztrációul. (l. [4].) PINSZKER példájának ismertetéséhez szükségünk van a következő lemmára:

1. LEMMA: *Ha $q(e^{i\lambda})$ olyan konjugált analitikus skalár függvény, amelyre m. m. pontban $|q(e^{i\lambda})|=1$, akkor van olyan $g(e^{i\lambda})$ konjugált analitikus függvény, hogy $\bar{q}(e^{i\lambda})g(e^{i\lambda})$ analitikus.*

Másrészt van olyan konjugált analitikus $g(e^{i\lambda})$, hogy $q(e^{i\lambda})\bar{g}(e^{i\lambda})$ egyetlen konjugált analitikus $q(e^{i\lambda})$ függvényre sem konjugált analitikus.

Állításunk első része könnyen igazolható. Legyen $g(e^{i\lambda})\in K^2\ominus q(e^{i\lambda})K^2$ — ha $q(e^{i\lambda})$ nem azonosan konstans, amikor az állítás nyilvánvaló, $g(e^{i\lambda})$ választható úgy, hogy nem azonosan zérus. Ekkor $\bar{q}(e^{i\lambda})g(e^{i\lambda})$ ortogonális K^2-re, tehát analitikus.

A lemma második állításának igazolása céljából fejtsük *Fourier*-sorba a $g(e^{i\lambda})$ és $q(e^{i\lambda})$ függvényeket:

$$g(e^{i\lambda}) \sim \sum_{n=0}^{\infty}{}' c_n e^{-i\lambda n},$$

$$q(e^{i\lambda}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-i\lambda n}.$$

Ahhoz, hogy $q(e^{i\lambda})\bar{g}(e^{i\lambda})$ konjugált analitikus legyen, szükséges és elegendő, hogy $q(e^{i\lambda})\bar{g}(e^{i\lambda})$ ortogonális legyen valamennyi $e^{i\lambda n}$-re $(n>0)$.

Ez a feltétel az együtthatókkal is kifejezhető, a

$$\sum_{n=j}^{\infty} a_{n-j}c_n = 0 \tag{4}$$

relációnak kell teljesülni valamennyi $n\geqq 0$-ra.

Ha a $\{c_n\}$ sorozat olyan, hogy a $\vec{g}_0=\{c_0,\dots,c_k,\dots\}$, $\vec{g}_1=\{c_1,\dots,c_k,\dots\}$, ... l^2-beli vektorok (l^2 a megszámlálhatóan végtelen dimenziós koordináta tér) kifeszítik az l^2 teret, akkor nincs (4)-nek eleget tevő nem triviális $\{a_n\}$ sorozat, ugyanis (4) ekkor azt jelentené, hogy $\{a_n\}$ ortogonális az egész l^2 térre.

Könnyen igazolható, hogy a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_n^2}\sum_{k>n} c_k^2 = 0 \tag{5}$$

feltétel teljesülése esetén a $\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_n$ vektorok kifeszítik az l^2 teret.

Az (5) feltételből közvetlenül adódik, hogy $\frac{1}{c_n}\vec{g}_n \to \{1, 0, \ldots\} = \vec{e}_1$. Ezt felhasználva,

$$\frac{1}{c_{n+1}}\vec{g}_n - \frac{c_{n+1}}{c_n}\vec{e}_1 \to \{0, 1, 0, \ldots\} = \vec{e}_2.$$

*Á*ltalában:

$$\frac{1}{c_{n+k}}\vec{g}_n - \frac{c_{n+k}}{c_n}\vec{e}_k - \ldots - \frac{c_{n+k}}{c_{n+k-1}}\vec{e}_1 \to \{0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots\} = \vec{e}_k.$$

(A konvergencia l^2 normában értendő.)

Az $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n, \ldots$ l^2-ben teljes rendszer elemei ily módon szukcesszíve megközelíthetők a $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n$ rendszer elemeivel, tehát a $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n, \ldots$ rendszer is teljes. Az (5) feltételnek eleget tevő sorozatot elemi úton könnyen konstruálhatunk.

Ezzel az 1. lemma mindkét állítását igazoltuk. Tekintsük ezután a $G(e^{i\lambda}) = (1\ g(e^{i\lambda}))$ 1×2 típusú matrixfüggvényt. Ha $g(e^{i\lambda})$ konjugált analitikus, akkor az $F(e^{i\lambda}) = G^*(e^{i\lambda})G(e^{i\lambda})$ matrixfüggvénynek definíció szerint van konjugált analitikus szorzatfelbontása.

Az a $\vec{\xi}_n$ kétdimenziós 1 rangú folyamat, amelynek spektrálsűrűsége éppen $F(e^{i\lambda})$ (ilyen a *Kolmogorov*-féle reprezentációs tétel miatt biztosan létezik) — reguláris.

Ha $g(e^{i\lambda})$ az 1. lemma első állításának felel meg, akkor $\tilde{g}(e^{i\lambda}) = \bar{q}(e^{i\lambda})g(e^{i\lambda})$ analitikus, így a $\tilde{G}(e^{i\lambda}) = (\bar{q}(e^{i\lambda})\bar{q}(e^{i\lambda})g(e^{i\lambda}))$ matrixfüggvény által létesített $F(e^{i\lambda}) = \tilde{G}(e^{i\lambda})\tilde{G}(e^{i\lambda})$ felbontás analitikus, tehát az $\eta_n = \xi_{-n}$ ellenkező irányú folyamat is reguláris.

Ha $g(e^{i\lambda})$ a lemma második állításának felel meg, az $\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{g(e^{i\lambda})} \end{pmatrix}$ vektor által definiált analitikus terjedelem-függvény nem lehet konjugált analitikus — ehhez ugyanis olyan $q(e^{i\lambda})$ függvényre lenne szükség, amelyre $q(e^{i\lambda})$ és $q(e^{i\lambda})\bar{g}(e^{i\lambda})$ egyidejűleg konjugált analitikus.

Ezzel harmadik kérdésünkre is választ adtunk, a nem teljes rangú folyamatok esetében az egyik irányú regularitásból nem feltétlenül következik a másik irányú regularitás.

Ennek a ténynek lényegében az az oka, hogy vannak olyan analitikus terjedelem-függvények, amelyek nem konjugált analitikusak, és viszont.

Végül megvizsgáljuk, hogy az L^2_K térben konstruált példának mi az „eredetije" H_ξ-ben.

Már az első fejezetben láttuk, hogy H_ξ $G(e^{i\lambda})L^2_K$-val izomorf. (Jelen esetben K a kétdimenziós euklideszi tér.) E megfeleltetés során $\xi_n^{(1)}$-nek

$$(6) \qquad (1\ g(e^{i\lambda}))\begin{pmatrix} e^{i\lambda n} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\lambda n},$$

$\xi_n^{(2)}$-nek pedig

$$(7) \qquad (1\ g(e^{i\lambda}))\begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\lambda n} \end{pmatrix} = g(e^{i\lambda})e^{i\lambda n} = \sum_{n=k}^{\infty} c_{n-k}e^{-i\lambda n}$$

felel meg, ahol

$$g(e^{i\lambda}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\lambda n}.$$

A (6) és a (7) összefüggés a sztochasztikus folyamatok nyelvén azt jelenti, hogy $\xi_n^{(1)}$ egy korrelálatlan sorozat, $\xi_n^{(2)}$ pedig a $\xi_n^{(2)} = \sum_{n=k}^{\infty} c_{n-k}\xi_n^{(1)}$ mozgó átlag segítségével áll elő $\xi_n^{(1)}$-ből. (6) és (7) miatt $H_{\xi}^{-} = H_{\xi^{(1)}}^{-} = H_{\xi^{(2)}}^{-}$, a korrelálatlan sorozat pedig reguláris, ezért a $\vec{\xi}_n$ folyamat reguláris.

Az (5) feltétel segítségével az 1. lemma bizonyításában alkalmazott gondolatmenettel igazolható, hogy $\xi_0^{(1)}, \ldots, \xi_k^{(1)}, \ldots$ és ezért $\xi_0^{(2)}, \ldots, \xi_k^{(2)}, \ldots$ valószínűségi változók tetszőlegesen megközelíthetők $\xi_n^{(2)}$ $(n<0)$ valószínűségi változókkal négyzetes középben, ami azt jelenti, hogy az $\vec{\eta}_n = \vec{\xi}_{-n}$ folyamat szinguláris.

IRODALOM

[1] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş *Analyse Harmonique des Operateurs de l'Espace de Hilbert,* Masson et C^{ie} — Akadémiai Kiadó, 1967.

[2] F. Riesz—B. Sz.-Nagy: Leçons d'Analyse Fonctionelle, Akadémiai Kiadó, 1953.

[3] H. Helson: Lectures on Invariant Subspaces, Academic Press, London—New York, 1964.

[4] Ю. А. Розанов: Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов, *Успехи мат. наук* **13** (1958)2 (80) 92—142. o.

REGULARITY AND SINGULARITY OF STATIONARY STOCHASTIC PROCESSES

by A. Krámli

Summary

The present paper reviews some applications of recent results of harmonic analysis in the prediction theory of — in wide sense — stationary vector valued stochastic processes.

The problems of the statistical prediction theory gave rise to these new methods, and later on they have been developped independently of this theory.

A reapplication of the latest results makes the construction of the prediction theory even clearer, than the original one.

In this paper are investigated the following questions: 1. What is the necessery and sufficient condition of the linear regularity of a stationary stochastic process? 2. Is there such a non trivial stationary process that is regular in both direction, and is there one for which the former assertion is not valid.

The essential point of our methods is that we can reduce the problems concerning the process — by means of the spectral representation theorem of unitary operators — to investigations of some invariant subspaces of the Hilbert space consisting of square integrable vector valued functions defined on the unit circle.

A VÉGES-DIFFERENCIA MÓDSZER HIBÁJÁNAK BECSLÉSE ELLIPTIKUS PEREM- ÉS SAJÁTÉRTÉK FELADATOKNÁL

Írta: VEIDINGER LÁSZLÓ

A jelen dolgozatban rövid áttekintést adunk a másodrendű önadjungált elliptikus egyenletekre vonatkozó perem- és sajátérték-feladatok véges-differencia közelítéseinek hibabecslésével kapcsolatos kutatások legújabb eredményeiről. A teljességre nem törekedve, kizárólag kétdimenziós feladatokkal és a legegyszerűbb, régóta ismert véges-differencia közelítésekkel foglalkozunk. A jobb áttekinthetőség céljából külön fejezetben tárgyaljuk a *Laplace*-operátorra vonatkozó feladatokkal kapcsolatos eredményeket.

I. A véges-differencia módszer hibájának becslése a Laplace-operátorra vonatkozó feladatoknál

1. Tekintsük a következő két feladatot:

$$\text{(1)} \qquad 1. \quad \Delta u(x, y) = f(x, y), \qquad (x, y) \in R,$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \qquad (x, y) \in C,$$

$$\text{(2)} \qquad 2. \quad \Delta u(x, y) + \lambda u(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in R,$$

$$u(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in C,$$

ahol R korlátos, nyílt síkbeli tartomány, amelynek C határa véges sok szakaszonként analitikus egyszerű zárt görbéből áll. Feltesszük, hogy $f(x, y)$ analitikus egy olyan G tartományban, amely az R-et határával együtt tartalmazza.[1] A $\varphi(x, y)$ függvényről feltesszük, hogy C-n folytonos és C minden analitikus görbeszakaszán analitikus.

Az (1) feladat a *Poisson*-egyenletre vonatkozó *Dirichlet*-feladat, a (2) feladat a *Laplace*-operátorra vonatkozó sajátérték-feladat (másnéven membrán sajátérték-feladat). Az elliptikus egyenletek elméletéből ismeretes, hogy a tett feltevések mellett az (1) feladat $u(x, y)$ megoldása létezik, egyértelmű és R-ben, valamint a C analitikus görbeszakaszain analitikus (lásd például [17]). A (2) feladat $\lambda^1 \leqq \lambda^2 \leqq \dots$ sajátértékei pozitívok és minden egyes sajátérték véges multiplicitású. A $\lambda^1, \lambda^2, \dots$

[1] Ez a feltétel az alkalmazásokban előforduló feladatok jelentős részénél nem teljesül. Legújabban BRAMBLE, HUBBARD és ZLÁMAL az $f(x, y)$ függvényre vonatkozó igen általános feltevések mellett becsülték meg a véges-differencia módszer hibáját (lásd [10]), eredményeik azonban a jelen dolgozat megírásakor még nem voltak végleges formában publikálva.

sajátértékeknek megfelelő $u^1, u^2, \dots$ sajátfüggvények megválaszthatók úgy, hogy ortonormált rendszert alkossanak abban az értelemben, hogy

$$\iint_R u^k u^l \, dx \, dy = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k=l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Az $u^k(x, y)$ sajátfüggvény R-ben, valamint a C analitikus görbeszakaszain analitikus.

Az R tartomány síkját egy h sortávolságú négyzetes ráccsal fedjük le. Az $x=mh$, $y=nh$ egyeneseket $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ rácsegyeneseknek, a négy rácsegyenessel határolt legkisebb négyzeteket rácsnégyzeteknek nevezzük. Legyen R^* az R-ben elhelyezkedő összes rácsnégyzet egyesítése és C^* az R^* határa. Jelöljük R_h^*-val, illetve C_h^*-val az R^* belsejében, illetve határán elhelyezkedő rácspontok halmazát. Végül jelöljük R_h-val az R-ben elhelyezkedő rácspontok halmazát és C_h-val a rácsegyenesek C-vel való metszéspontjainak halmazát.

2. Tekintsük először azt az esetet, amikor az R tartomány olyan h_0 oldalú egybevágó négyzetek egyesítéseként állítható elő, amelyeket rácsegyenesek határolnak. Ha $h=\frac{h_0}{p}$, ahol p pozitív egész szám, akkor nyilvánvalóan $R=R^*$, $C=C^*$, $R_h=R_h^*$, $C_h=C_h^*$. Az (1) és (2) feladatot rendre a

$$\begin{aligned} &\Delta_h U(P) = f(P), && P \in R_h, \\ &U(P) = \varphi(P), && P \in C_h \end{aligned} \tag{3}$$

és a

$$\begin{aligned} &\Delta_h U(P) + \lambda_h U(P) = 0, && P \in R_h, \\ &U(P) = 0, && P \in C_h \end{aligned} \tag{4}$$

feladattal közelítjük, ahol

$$\Delta_h U(P) = h^{-2}[U(E) + U(N) + U(W) + U(S) - 4U(P)]$$

a Laplace-operátor „ötpontos" véges-differencia analogonja, $E = (x_P + h, y_P)$ $N = (x_P, y_P + h)$, $W = (x_P - h, y_P)$, $S = (x_P, y_P - h)$ a $P = (x_P, y_P)$ rácspont négy szomszédja.

Legyen U a (3) feladat megoldása, $\lambda_h^1 \leqq \lambda_h^2 \leqq \dots$ a (4) feladat sajátértékei, U^1, $U^2, \dots$ a megfelelő sajátfüggvények. Az $U^1, U^2, \dots$ sajátfüggvények megválaszthatók úgy, hogy ortonormált rendszert alkossanak, abban az értelemben, hogy

$$h^2 \sum_{P \in R_h} U^k(P) U^l(P) = \delta_{kl}.$$

A továbbiakban az $u - U$, $\lambda^k - \lambda_h^k$, $u^k - U^k$ különbségek becslésével foglalkozunk.

Az $u - U$ különbségre a legrégibb egzakt becslés GERSGORINtól származik. GERSGORIN becslése a jelen pontban vizsgált speciális alakú R tartományok esetében a következő (lásd [1] és [14])

$$\max_{P \in R_h} |u(P) - U(P)| \leqq \frac{M_4 d^2}{96} h^2, \tag{5}$$

ahol d az R-et tartalmazó legkisebb kör átmérője, M_i az $u(x, y)$ megoldás i-edrendű parciális deriváltjai abszolút értékének maximuma $\bar{R}$-ban. Azonban általában $M_4 = \infty$, még akkor is, ha R téglalap, így például a

$$\Delta u = -2 \quad R\text{-ben},$$

$$u = 0 \quad C\text{-n}$$

„torzió-feladatnál", ugyanis a szögpontok környezeteiben az $u(x, y)$ megoldás negyedrendű parciális deriváltjai általában nem korlátosak. A *Gersgorin*-becslés ilyenkor nem mond semmit.

VOLKOVnak sikerült meghatározni azokat a szükséges és elégséges feltételeket, amelyeket abban az esetben, ha az R tartomány egy sokszög belseje, az f és φ függvényeknek ki kell elégíteniök ahhoz, hogy M_4 véges legyen (lásd [2], [3]). Ezek a feltételek az alkalmazásokban előforduló feladatoknál általában nem teljesülnek. Azokban a speciális esetekben, amikor M_4 véges, az (5) becslés átalakítható kizárólag az ismert adatokat tartalmazó ún. a priori hibabecsléssé (lásd [2], [3]).

Kérdés, hogy a jelen pontban vizsgált speciális alakú R tartományok esetén általában mekkora az $u-U$ különbség nagyságrendje. LAASONENtől származik az az empirikus úton alátámasztott sejtés, hogy (lásd [4])

$$\max_{P \in R_h} |u(P) - U(P)| = 0\left(h^{\frac{4}{3}}\right)$$

és ez a becslés tovább nem javítható. Legújabban LAASONENnek sikerült bebizonyítania, hogy (lásd [5])

$$\max_{P \in T_h} |u(P) - U(P)| = 0\left(h^{\frac{4}{3}-\varepsilon}\right), \tag{6}$$

ahol $T_h = R_h - S_h$, S_h a szögpontok r_1 sugarú környezeteiben elhelyezkedő rácspontok halmaza, r_1 és ε tetszőleges pozitív számok. Sajnos, LAASONEN becslési módszere csak a hiba nagyságrendjét adja meg, konkrét hibakorlát kiszámítására nem alkalmas.

A priori (csak az adatokat tartalmazó) hibabecslések kizárólag abban az esetben ismeretesek, ha M_4 véges vagy ha R téglalap. Ha R téglalap és $\varphi = 0$, akkor fennáll a következő a priori hibabecslés (lásd [6])

$$\max_{P \in R_h} |u(P) - U(P)| \leqq \left[\left(21{,}4 + 18{,}8 \log \frac{a}{h}\right) F + 8{,}1 a F_1 + 2{,}7 a^2 F_2\right] h^2,$$

ahol F az $f(x, y)$ függvény abszolút értékének, F_1 és F_2 az $f(x, y)$ első- illetve másodrendű parciális deriváltjai abszolút értékének maximuma $\bar{R}$-ban, a a téglalap hosszabbik oldala. Az $f(x, y)$ függvényről ebben az esetben csak azt kell feltenni, hogy első- és másodrendű parciális deriváltjaival együtt folytonos $\bar{R}$-ban. FREY és RÓZSA hasonló jellegű a priori hibabecsléseket kaptak az $f(x, y)$ függvényre vonatkozó még gyengébb feltevések mellett (lásd [16]).

A $\lambda^k - \lambda_h^k$ különbségre a jelen pontban vizsgált speciális alakú R tartományok esetén fennáll a következő kétoldalú becslés (lásd [7])

$$-c_1 h^{\frac{4}{3}} < \lambda^k - \lambda_h^k < c_2 h^2, \tag{7}$$

ahol c_1 és c_2 pozitív állandók, amelyeknek számértéke csak k-tól és az R tartománytól függ.

Empirikus adatok azt mutatják, hogy a (7) becslés tovább nem javítható. Nevezetesen, az L-alakú membrán esetében λ_h^1 felülről közelít λ^1-hez és a hiba $O(h^{4/3})$ nagyságrendű, λ_h^2 pedig alulról közelít λ^2-höz és a hiba $O(h^2)$ nagyságrendű (lásd [8], 351—353. old.).

Az $u^k - U^k$ különbségre SZAULJEV az (5)-höz hasonló *Gersgorin*-típusú becsléseket kapott (lásd [18]). Ezek a becslések azonban teljesen irreálisak, mert ha R nem téglalap, akkor $u^k(x, y)$-nak már az elsőrendű parciális deriváltjai sem korlátosak $\bar{R}$-ban (lásd [19]). A *Dirichlet*-feladathoz hasonlóan ebben az esetben is az várható, hogy

$$\max_{P \in R_h} |u^k(P) - U^k(P)| = O\left(h^{\frac{4}{3}}\right),$$

ha λ^k egyszeres sajátérték és

$$\max_{P \in R_h} \left| u^k(P) - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_h^{k+i} U^{k+i}(P) \right| = O\left(h^{\frac{4}{3}}\right),$$

ha $\lambda^k = \lambda^{k+1} = \ldots = \lambda^{k+n-1}$ n-szeres sajátérték (β_h^k; $\beta_h^{k+1}, \ldots, \beta_h^{k+n-1}$ valós együtthatók); ez a sejtés azonban még nincs bizonyítva.

3. Tekintsük most az általános esetet, amikor az R tartomány C határa véges sok szakaszonként analitikus egyszerű zárt görbéből áll. Az (1) és (2) feladat egyik legegyszerűbb véges-differencia közelítése

$$(8) \qquad \begin{aligned} \Delta_h U(P) &= f(P), \quad P \in R_h^*, \\ U(P) &= \varphi(P'), \quad P \in C_h^*, \end{aligned}$$

illetve a

$$(9) \qquad \begin{aligned} \Delta_h U(P) + \lambda_h U(P) &= 0, \quad P \in R_h^*, \\ U(P) &= 0, \quad P \in C_h^* \end{aligned}$$

feladat, ahol P' a C_h-nak P-hez legközelebb eső pontja.

Legyen U a (8) feladat megoldása, $\lambda_h^1 \leqq \lambda_h^2 \leqq \ldots$ a (9) feladat sajátértékei, U^1, $U^2, \ldots$ a megfelelő sajátfüggvények. Az $U^1, U^2, \ldots$ sajátfüggvények megválaszthatók úgy, hogy ortonormált rendszert alkossanak, abban az értelemben, hogy

$$h^2 \sum_{P \in R_h^*} U^k(P) U^l(P) = \delta_{kl}.$$

Az $u - U$ különbségre fennáll a következő *Gersgorin*-típusú becslés (lásd [14])

$$(10) \qquad \max_{P \in R_h^*} |u(P) - U(P)| \leqq \sqrt{2} h M_1 + \frac{M_4 d^2}{96} h^2.$$

Az elliptikus egyenletek elméletéből ismeretes (lásd [17]), hogy ha C és φ elég sima, nevezetesen, ha a C egyenletét paraméteres alakban megadó $x(s), y(s)$ függvények és a $\varphi(s)=\varphi(x(s), y(s))$ függvény a C minden egyes pontjában ötször folytonosan differenciálható, akkor M_4 véges. (Az $f(x, y)$ függvényről eleve feltettük, hogy analitikus.) Ennek ellenére, a (10) becslésnek gyakorlatilag használható a priori hiba becsléssé való átalakítása még tetszőlegesen sima C és φ esetén is igen nehéz probléma. Az (1) feladatnak egy, a továbbiakban ismertetendő, (8)-nál pontosabb véges-differencia közelítésénél BRAMBLE és HUBBARD a priori hibabecslést adtak meg (lásd [9]). Valószínűnek látszik, hogy hasonló a priori hibabecslést lehet kapni a jelen esetben is.

Régebbi tankönyvekben gyakran szerepel az a megjegyzés, hogy a (10)-hez hasonló *Gersgorin*-típusú becslésekből nem egzakt, de a gyakorlatban használható becsléseket lehet kapni oly módon, hogy M_1-et illetve M_4-et az U rácsfüggvény első-, illetve negyedrendű differenciahányadosai abszolút értékének maximumával közelítjük. Sajnos, ez a megjegyzés sem elméleti, sem empirikus úton nem támasztható alá.

Az általános esetben legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a C szögpontjai és $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \ldots, \pi\alpha_m$ $(0<\alpha_i<2)$ a hozzájuk tartozó belső szögek. (Szögpontoknak nevezzük a C-nek azokat a pontjait, ahol két különböző analitikus görbeív találkozik.) Az $u-U$ különbségre fennáll a következő nagyságrendi becslés (lásd [10] és [11])

$$\max_{P\in R_h^*}|u(P)-U(P)| = O(h^\beta),$$

ahol

$$\beta = \begin{cases} 1, \text{ ha } \max\limits_{i=1,\ldots,m} \alpha_i < 1, \text{ vagy ha nincsenek szögpontok,} \\ \dfrac{1}{\max\limits_{i=1,\ldots,m} \alpha_i} - \varepsilon, \text{ ha } \max\limits_{i=1,\ldots,m} \alpha_i \geqq 1, \end{cases}$$

ε tetszőleges pozitív valós szám. A π-nél nagyobb belső szögek tehát a hiba nagyságrendjét $O(h^{1/2})$-ig növelhetik.

A $\lambda^k-\lambda_h^k$ különbségre fennáll a következő kétoldalú becslés (lásd [7])

$$-c_3 h < \lambda^k-\lambda_h^k < c_4 h^2,$$

ahol c_3 és c_4 pozitív konstansok, amelyeknek a számértéke csak k-tól és az R tartománytól függ. Ebben az esetben a hiba nagyságrendjét a π-nél nagyobb belső szögek sem befolyásolják. Ha R egyszeresen összefüggő és a C-nél levő belső szögek π-nél kisebbek, akkor a $\lambda^k-\lambda_h^k$ különbségre a priori alsó becslés adható (lásd [12]).

Az u^k-U^k különbségre ugyanolyan becsléseket lehet megadni, mint az $u-U$ különbségre. Nevezetesen, ha λ^k egyszeres sajátérték, akkor

$$\max_{P\in R_h^*}|u^k(P)-U^k(P)| = O(h^\beta),$$

ha $\lambda^k = \lambda^{k+1} = \ldots = \lambda^{k+n-1}$ n-szeres sajátérték, akkor

$$\max_{P\in R_h^*}\left|u^k(P)-\sum_{i=0}^{n-1}\beta_h^{k+i}U^{k+i}(P)\right| = O(h^\beta),$$

ahol $\beta_h^k, \beta_h^{k+1}, \ldots, \beta_h^{k+n-1}$ valós együtthatók (lásd [13]).

4. Az (1) és (2) feladatnak (8)-nál és (9)-nél pontosabb véges-differencia közelítése a

$$\begin{aligned} &\Delta^{(h)}V(P)=f(P), \quad P\in R_h, \\ &V(P)=\varphi(P), \quad P\in C_h \end{aligned} \tag{11}$$

és a

$$\begin{aligned} &\Delta^{(h)}V(P)+\mu_h V(P) = 0, \quad P\in R_h \\ &V(P)=0, \quad P\in C_h \end{aligned} \tag{12}$$

feladat (lásd például [8], 200. old.), ahol

$$\Delta^{(h)}V(P) = \frac{2V(E)}{h_E(h_E+h_W)}+\frac{2V(N)}{h_N(h_N+h_S)}+\frac{2V(W)}{h_W(h_E+h_W)}+\frac{2V(S)}{h_S(h_N+h_S)}-$$

$$-\left(\frac{2}{h_N h_S}+\frac{2}{h_E h_W}\right)V(P),$$

$E = (x_P+h_E, y_P)$, $N = (x_P, y_P+h_N)$, $W = (x_P-h_W, y_P)$, $S = (x_P, y_P-h_S)$ a $P=(x_P, y_P)$ rácspont négy szomszédja. (A $P\in R_h$ rácspont szomszédjainak nevezzük az $R_h\cup C_h$ halmaznak azt a négy pontját, amely a P-n áthaladó rácsegyeneseken P-hez legközelebb helyezkedik el.)

Legyen V a (11) feladat megoldása, $\mu_h^1\leqq\mu_h^2\leqq\dots$ a (12) feladat sajátértékei, V^1, V^2, ... a megfelelő sajátfüggvények. A V^1, V^2, ... sajátfüggvények megválaszthatók úgy, hogy ortonormált rendszert alkossanak abban az értelemben, hogy

$$\sum_{P\in R_h} V^k(P)V^l(P)H_P = \delta_{kl},$$

ahol $H_P = \dfrac{(h_E+h_W)(h_N+h_S)}{4}$.

Az $u-V$ különbségre fennáll a következő *Gersgorin*-típusú becslés (lásd [14])

$$\max_{P\in R_h}|u(P)-V(P)| \leqq \frac{M_4 d^2}{96}h^2+\frac{2M_3}{3}h^3.$$

Mint az előző pontban már említettük, BRAMBLE és HUBBARD a priori becslést kaptak az $u-V$ különbségre (lásd [9]). A becslés levezetésénél feltették, hogy R egyszeresen összefüggő, C és φ elég sima. BRAMBLE és HUBBARD becslése eredeti formájában numerikus hibakorlátok kiszámítására nem alkalmas, azonban egyes speciális esetekben, így például konvex R tartomány esetén a

$$\Delta u = -2 \quad R\text{-ben},$$

$$u=0 \quad C\text{-n}$$

„torzió-feladatnál”, numerikus hibabecslésre alkalmas egyszerű alakra hozható.

Az $u-V$ különbségre nem egzakt, de a gyakorlatban sokszor jól használható becslést lehet kapni az úgynevezett *Runge*-elv alkalmazásával (lásd például [20]). Tekintsük azt a $2h$ sortávolságú négyzetes rácsot, amelyet a h sortávolságú rácsból minden második rácsegyenes elhagyásával nyerünk és legyen V_{2h} a (11) feladat megoldása ezen a rácson. A *Runge*-elv szerint

$$u(P)-V(P)\approx\frac{V(P)-V_{2h}(P)}{3}.$$

A *Runge*-elv az $u-V$ különbség aszimptotikus előállításán alapul, az ezzel kapcsolatos problémákra itt most nem térünk ki (lásd [8], 307. old.).

Az általános esetben fennáll a következő, LAASONENtől származó becslés (lásd [5])

(13) $$\max_{P\in T_h}|u(P)-V(P)|=0(h^\gamma),$$

ahol $T_h=R_h-S_h$, S_h a szögpontok r_1 sugarú környezeteiben elhelyezkedő rácspontok halmaza,

$$\gamma=\begin{cases}2, & \text{ha } \max\limits_{i=1,\dots,m}\alpha_i<1, \text{ vagy ha nincsenek szögpontok}\\[2mm] \dfrac{2}{\max\limits_{i=1,\dots,m}\alpha_i}-\varepsilon, & \text{ha } \max\limits_{i=1,\dots,m}\alpha_i\geqq 1,\end{cases}$$

r_1 és ε tetszőleges pozitív számok. A (6) becslés a (13) becslés speciális esete.

Ha a C-nél levő belső szögek π-nél nem nagyobbak, akkor fennáll a

$$\lambda^k-\mu_h^k=0(h^2)$$

becslés (lásd [15]). Ha a C-nél levő belső szögek $\frac{\pi}{2}$-nél nem nagyobbak, akkor attól függően, hogy λ^k egyszeres illetve n-szeres sajátérték, fennáll a

$$\max_{P\in R_h}|u^k(P)-V^k(P)|=0(h^2|\log h|),$$

illetve a

$$\max_{P\in R_h}\left|u^k(P)-\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_h^{k+i}V^{k+i}(P)\right|=0(h^2|\log h|)$$

becslés (lásd [15]). Az általános esetben a *Dirichlet*-feladathoz hasonlóan az várható, hogy

$$\lambda^k-\mu_h^k=0(h^\gamma)$$

és

$$\max_{P\in R_h}|u^k(P)-V^k(P)|=0(h^\gamma),$$

illetve

$$\max_{P\in R_h}\left|u^k(P)-\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_h^{k+i}V^{k+i}(P)\right|=0(h^\gamma),$$

ezeket a sejtéseket azonban eddig még nem sikerült bizonyítani.

II. A véges-differencia módszer hibájának becslése a másodrendű önadjungált elliptikus operátorra vonatkozó feladatoknál

1. Ugyanúgy, mint az első fejezetben, legyen R korlátos, nyílt síkbeli tartomány, amelynek C határa véges sok, szakaszonként analitikus egyszerű zárt görbéből áll. Tekintsük a következő két feladatot

$$(14)\qquad 1.\quad Lu(x,y)=f(x,y),\qquad (x,y)\in R,$$
$$u(x,y)=\varphi(x,y),\qquad (x,y)\in C,$$

$$(15)\qquad 2.\quad Lu(x,y)+\lambda u(x,y)=0,\qquad (x,y)\in R,$$
$$u(x,y)=0,\qquad (x,y)\in C,$$

ahol

$$Lu=\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[b(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[c(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]-d(x,y)u.$$

Feltesszük, hogy az $a(x,y)$, $b(x,y)$ $c(x,y)$ $d(x,y)$ együtthatók és $f(x,y)$ analitikus egy olyan tartományban, amely R-et határával együtt tartalmazza. A $\varphi(x,y)$ függvényről feltesszük, hogy C-n folytonos és C minden analitikus görbeszakaszán analitikus. Feltesszük, hogy az L operátor elliptikus típusú, vagyis hogy az R minden pontjában

$$a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2\geqq\alpha(\xi^2+\eta^2)\qquad(\alpha=\text{const.}>0)$$

minden valós ξ,η-ra. Végül feltesszük, hogy $d(x,y)\geqq 0$.

Az elliptikus egyenletek elméletéből ismeretes, hogy a tett feltevések mellett a (14) feladat megoldása létezik, egyértelmű és R-ben, valamint a C analitikus görbeszakaszain analitikus (lásd [17]). A (15) feladat $\lambda^1\leqq\lambda^2\leqq\ldots$ sajátértékei pozitívok és minden egyes sajátérték véges multiplicitású. A $\lambda^1,\lambda^2,\ldots$ sajátértékeknek megfelelő $u^1,u^2,\ldots$ sajátfüggvények megválaszthatók úgy, hogy ortonormáltak legyenek, abban az értelemben, hogy

$$\iint_R u^k u^l\,dx\,dy=\delta_{kl}.$$

Az $u^k(x,y)$ sajátfüggvény R-ben, valamint a C analitikus görbeszakaszain analitikus.

Az R tartomány síkját ugyanúgy, mint az első fejezetben, egy h sortávolságú négyzetes ráccsal fedjük le. Az R_h^*, C_h^*, R_h és C_h rácsponthalmazok definíciója ugyanaz, mint az első fejezetben.

Ha a $P\in R_h$ rácspont egyik szomszédja sem tartozik C_h-hoz, akkor legyen

$$Z_x(P)=\frac{Z(E)-Z(P)}{h},\quad Z_{\bar{x}}(P)=\frac{Z(P)-Z(W)}{h},$$

$$Z_y(P)=\frac{Z(N)-Z(P)}{h},\quad Z_{\bar{y}}(P)=\frac{Z(P)-Z(S)}{h},$$

ahol $Z = Z(P)$ a rácspontokon értelmezett tetszőleges függvény. Ha a $P \in R_h$ rácspont valamelyik szomszédja C_h-hoz tartozik, akkor legyen

$$Z_{\bar{x}}(P) = \frac{Z(P)-Z(W)}{h_W}, \quad Z_{\hat{x}}(P) = \frac{Z(E)-Z(P)}{0{,}5(h_E+h_W)},$$

$$Z_{\bar{y}}(P) = \frac{Z(P)-Z(S)}{h_S}, \quad Z_{\hat{y}}(P) = \frac{Z(N)-Z(P)}{0{,}5(h_N+h_S)}.$$

2. A (8) és (9) feladat természetes általánosítása az

$$L_h U(P) = f(P), \qquad P \in R_h^*,$$

(16) $$U(P) = \varphi(P'), \qquad P \in C_h^*,$$

és a

$$L_h U(P) + \lambda_h U(P) = 0, \qquad P \in R_h^*,$$

(17) $$U(P) = 0, \qquad P \in C_h^*$$

feladat (lásd [26] és [11]), ahol

$$L_h U = 0{,}5\left[(aU_x)_{\bar{x}} + (aU_{\bar{x}})_x + (bU_y)_{\bar{x}} + (bU_{\bar{y}})_x + (bU_x)_{\bar{y}} + (bU_{\bar{x}})_y + (cU_y)_{\bar{y}} + (cU_{\bar{y}})_y\right] - dU$$

és P' a C_h-nak P-hez legközelebb eső pontja.

Legyen U a (16) feladat megoldása, $\lambda_h^1 \leqq \lambda_h^2 \leqq \ldots$ a (17) feladat sajátértékei, $U^1, U^2, \ldots$ a megfelelő sajátfüggvények. Az $U^1, U^2, \ldots$ sajátfüggvények megválaszthatók úgy, hogy ortonormált rendszert alkossanak, abban az értelemben, hogy

$$h^2 \sum_{P \in C_h^*} U^k(P) U^l(P) = \delta_{kl}.$$

Az $u-U$ különbségre az általános esetben fennáll a

(18) $$\max_{P \in R_h^*} |u(P) - U(P)| = 0\left(h^{\frac{1}{2}} |\log h|^{\frac{1}{2}}\right)$$

becslés (lásd [11]).

Legyen A_i a C i-edik szögpontja, amelyhez $\pi\alpha_i (0 < \alpha_i < 2)$ belső szög tartozik. Legyen

(19) $$x^* = k_{A_i} x + l_{A_i} y, \quad y^* = m_{A_i} x + n_{A_i} y$$

egy olyan lineáris transzformáció, amely az L operátort az A_i pontban kanonikus alakra hozza. A (19) transzformáció az A_i szögponthoz tartozó $\pi\alpha_i$ belső szöget egy $\pi\alpha_i^* (0 < \alpha_i^* < 2)$ szögbe viszi át. Nyilvánvalóan $\alpha_i^* < 1$ akkor és csak akkor, ha $\alpha_i < 1$.

Ha $b(x, y) \equiv 0$, vagyis ha az L operátor nem tartalmaz vegyes parciális deriváltakat, akkor (18)-nál lényegesen jobb becslés adható meg, nevezetesen (lásd [11])

(20) $$\max_{P \in R_h^*} |u(P) - U(P)| = 0(h^{\beta^*}),$$

ahol

$$\beta^* = \begin{cases} 1, & \text{ha } \max\limits_{i=1,\dots,m} \alpha_i^* < 1 \text{ vagy ha nincsenek szögpontok,} \\ \dfrac{1}{\max\limits_{i=1,\dots,m} \alpha_i^*} - \varepsilon, & \text{ha } \max\limits_{i=1,\dots,m} \alpha_i^* \geqq 1, \end{cases}$$

ε tetszőleges pozitív szám.

Valószínűnek látszik, hogy a (20) becslés akkor is fennáll, ha $b(x, y) \not\equiv 0$, ezt azonban eddig még nem sikerült bizonyítani. Egy másik nyitott probléma a (20) becslés élesítése abban a speciális esetben, amikor az R tartomány rácsnégyzetek egyesítéseként állítható elő.

A $\lambda^k - \lambda_h^k$ különbségre az általános esetben fennáll a

$$\lambda^k - \lambda_h^k = 0(h)$$

becslés (lásd [21]). Ha az L operátor együtthatói állandók, akkor

$$-c_5 h < \lambda^k - \lambda_h^k < c_6 h^2,$$

ahol c_5 és c_6 csak k-tól, az R tartománytól és az L operátor együtthatóitól függő pozitív konstansok.

Az $u^k - U^k$ különbségre ugyanolyan becsléseket lehet megadni, mint az $u - U$ különbségre. Nevezetesen, ha λ^k egyszeres sajátérték, akkor

$$\max_{P \in R_h^*} |u^k(P) - U^k(P)| = 0\left(h^{\frac{1}{2}} |\log h|^{\frac{1}{2}}\right),$$

ha $\lambda^k = \lambda^{k+1} = \dots = \lambda^{k+n-1}$ n-szeres sajátérték, akkor

$$\max_{P \in R_h^*} |u^k(P) - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_h^{k+i} U^{k+i}(P)| = 0\left(h^{\frac{1}{2}} |\log h|^{\frac{1}{2}}\right),$$

ahol $\beta_h^k, \beta_h^{k+1}, \dots, \beta_h^{k+n-1}$ valós együtthatók (lásd [13]). Ha $b(x, y) \equiv 0$, akkor

(21) $$\max_{P \in R_h^*} |u^k(P) - U^k(P)| = 0(h^{\beta^*}),$$

illetve

(22) $$\max_{P \in R_h^*} \left| u^k(P) - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_h^{k+i} U^{k+i}(P) \right| = 0(h^{\beta^*}).$$

Valószínűnek látszik, hogy a (21) illetve (22) becslés az általános esetben is fennáll.

3. Ha $b(x, y) \equiv 0$, akkor a (11) és (12) feladat természetes általánosítása az

(23) $$L^{(h)} V(P) = f_1(P), \quad P \in R_h, \qquad V(P) = \varphi(P), \quad P \in C_h$$

és az

(24) $$L^{(h)} V(P) + \mu_h V(P) = 0, \quad P \in R_h, \qquad V(P) = 0, \quad P \in C_h$$

feladat (lásd [22] és [23]), ahol

$$L^{(h)}V = (a_1 V_{\bar{x}})_{\hat{x}} + (b_1 V_{\bar{y}})_{\hat{y}} - d_1 V,$$

$a_1(P) = a(W')$, $W' = (x_P - 0{,}5h_W,\ y_P)$, $b_1(P) = b(S')$, $S' = (x_P,\ y_P - 0{,}5h_S)$, $d_1(P) = d(P)$, $f_1(P) = f(P)$.

Legyen V a (23) feladat megoldása, $\mu_h^1 \leqq \mu_h^2 \leqq \ldots$ a (24) feladat sajátértékei, $V^1, V^2, \ldots$ a megfelelő sajátfüggvények. A $V^1, V^2, \ldots$ sajátfüggvények megválaszthatók úgy, hogy ortonormált rendszert alkossanak abban az értelemben, hogy

$$\sum_{P \in R_h} V^k(P) V^l(P) H_P = \delta_{kl},$$

ahol

$$H_P = \frac{(h_E + h_W)(h_N + h_S)}{4}.$$

Ha $u(x, y) \in C^{(4)}(\bar{R})$,[2] akkor fennáll a következő *Gersgorin*-típusú becslés[3] (lásd [22])

$$\max_{P \in R_h} |u(P) - V(P)| = 0(h^2). \tag{25}$$

A (25) becslés levezetésénél az $a(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$ és $f(x, y)$ függvények analitikussága helyett elég feltenni, hogy $a(x, y) \in C^{(3)}(\bar{R})$, $c(x, y) \in C^{(3)}(\bar{R})$, $d(x, y) \in \in C^{(3)}(\bar{R})$, és $f(x, y) \in C^{(3)}(\bar{R})$. Az alkalmazásokban előforduló feladatok jelentős részénél (így például a hővezetési feladatoknál) azonban még ezek a gyengébb feltételek sem teljesülnek. SZAMARSZKIJ számos dolgozatában (lásd például [24]) részletesen foglalkozott azzal az esettel, amikor az L operátor együtthatóinak és az $f(x, y)$ függvénynek véges számú rácsegyenes mentén elsőfajú szakadása van. Bebizonyította, hogy ha az $a_1(P)$, $b_1(P)$, $d_1(P)$ és $f_1(P)$ rácsfüggvények definícióját megfelelően módosítjuk, akkor az $u(x, y) \in C^{(4)}(\bar{R})$ feltétel mellett a (25) becslés ebben az esetben is fennáll.

Ha a C határon szögpontok vannak, akkor általában $u(x, y) \notin C^{(4)}(\bar{R})$. Az általános esetben valószínűleg fennáll a

$$\max_{P \in R_h} |u(P) - V(P)| = 0(h^{\gamma^*})$$

becslés, ahol

$$\gamma^* = \begin{cases} 2, & \text{ha } \max\limits_{i=1,\ldots,m} \alpha_i^* < 1 \text{ vagy ha nincsenek szögpontok,} \\ \dfrac{2}{\max\limits_{i=1,\ldots,m} \alpha_i^*} - \varepsilon, & \text{ha } \max\limits_{i=1,\ldots,m} \alpha_i^* \geqq 1, \end{cases}$$

ez a sejtés azonban nincs még bizonyítva.

[2] A korlátos, zárt T síkbeli tartományban értelmezett függvény akkor tartozik a $C^{(m)}(T)$ osztályhoz, ha m-edrendű parciális deriváltjai folytonosak T-ben.

[3] Változó együtthatójú L operátorok esetén a *Gersgorin*-típusú becslések lényegesen bonyolultabbak, mint a Laplace-operátor esetében, ezért a továbbiakban a *Gersgorin*-típusú becsléseknél is csak a nagyságrendet adjuk meg.

A $\lambda^k - \mu_h^k$ és az $u^k - U^k$ különbségekre szintén csak *Gersgorin*-típusú becsléseket ismerünk. Nevezetesen, ha $u^k(x, y) \in C^{(4)}(\bar{R})$, akkor

$$\lambda^k - \mu_h^k = O(h^2)$$

(lásd [27]) és

$$\max_{P \in R_h} |u^k(P) - V^k(P)| = O(h^2 |\log h|),$$

illetve

$$\max_{P \in R_h} \left| u^k(P) - \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_h^{k+i} V^{k+i}(P) \right| = O(h^2 |\log h|),$$

attól függően, hogy λ^k egyszeres vagy n-szeres sajátérték (lásd [23]).

Befejezésül megemlítjük, hogy a (14) és (15) feladatnak a jelen dolgozatban vizsgált két véges-differencia közelítésén kívül még nagyon sok, egymástól lényegesen különböző véges-differencia közelítése ismeretes (lásd például [8], 190. old., [25] és [28]). Az irodalomban ajánlott közelítések többségénél a hiba becslésével is foglalkoztak. Ennek ellenére, a (14) feladat véges-differencia közelítései közül eddig még csak egyetlen egynél sikerült tetszőleges L operátor esetén a hibára $O(h^2)$ nagyságrendű *Gersgorin*-típusú becslést megadni (lásd [25]), ez a közelítés rendkívül bonyolult és ezért inkább csak elméleti jelentősége van. A (15) feladat véges-differencia közelítései közül eddig még egynél sem sikerült a hibára $O(h^2)$ nagyságrendű becslést kapni.

IRODALOM

[1] Gerschgorin, S.: Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen, *Z. Angew. Math. Mech.* **10** (1930), 373—382.

[2] Волков, Е. А.: О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике, *Труды Математического Институтаим. В. А. Стеклова.* LXXVII (1965), 89—112.

[3] Волков, Е. А.: О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнения Лапласа на многоугольниках, *Труды Математического Института им. В. А. Смеклова,* LXXVII (1965), 113—142.

[4] Laasonen, P.: On the truncation error of discrete approximations to the solutions of Dirichlet problems in a domain with corners, *J. Assoc. Comput. Mach.*, **5** (1958) 32—38.

[5] Laasonen, P.: On the discretization error of the Dirichlet problem in a plane region with corners. *Ann. Acad. Sci. Fenn. A.* I. **408** (1967), 1—16.

[6] Laasonen, P.: On the solution of Poisson's difference equation, *J. Assoc. Comput. Mach.* **5** (1958) 370—382.

[7] Вейдингер,Л.: О вычислении собственных значений мембраны методом конечных разностей, *Ж. вычисл. матем. и матем физ.* **4** (1964) 1037—1044.

[8] Forsythe, G., Wasow, W.: *Finite-difference methods for partial differential equations,* New York, 1960.

[9] Bramble, J. H., Hubbard, B. E.: A priori bounds on the discretization error in the numerical solution of the Dirichlet problem, *Contributions to Differential Equations,* vol. 2., New York, 1963., 229—252.

[10] Hubbard, B. E.: Remarks on the order of convergence in the discrete Dirichlet problem, *Numerical solution of partial differential equations,* New York, 1966. 21—34.

[11] Veidinger, L.: On the order of convergence of finite-difference approximations to the solution of the Dirichlet problem, *Studia Sci. Math. Hung.* **3** (1968), 337—343.

[12] Hubbard, B. E.: Bounds for eigenvalues of the free and fixed membrane by finite-difference methods. *Pacif. J. Math.* **11** (1961), 559—590.

[13] Veidinger, L.: On the order of convergence of finite-difference approximations to eigenvalues and eigenfunctions (közlés alatt).

[14] BRAMBLE, J. H.: HUBBARD, B. E.: On the formulation of finite-difference analogues of the Dirichlet problem for Poisson's equation, *Num. Math.*, 4 (1962), 313—327.
[15] Вейдингер, Л.: О вычислении собственных значений и собственных функций оператора Лапласа методом конечных разностей, *Ж. бычисл. матем. и матем. физ.* **6** (1966), 687—698.
[16] FREY, T., RÓZSA, P.: Konvergenzschnelle des Differenzverfahrens der Poissonschen und der biharmonischen Differencialgleichungen, *I. Period. Polytechn. Engrg.* **4** (1960), 385—422.
[17] COURANT, R., HILBERT, D.: *Methods of mathematical physics,* vol. 2., New York, 1962.
[18] Саульев, В. К.: Об оценке погрешности при нахождении собственных функций методом конечных разностей, *Вычисл. матем. сборник* **1** (1957), 87—115.
[19] LEHMAN, SHERMAN R.: Developments at an analytic corner of solutions of partial differential equations, *J. Math. Mech.,* **8** (1959), 727—760.
[20] PANOW, D. J.: *Formelsammlung zur numerischen Behandlung partieller Differentialgleichungen nach dem Differenzenverfahren,* Berlin, 1955.
[21] Вейдингер, Л.: Об оценке погрешности при нахождении собственных значений методом конечных разностей, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **5** (1965), 806—815.
[22] Самарский, А. А.: О точности метода сеток для задачи Дирихле в произвольной облаcmu. *Apl. Matem.* **10** (1965), 293—296.
[23] Вейдингер,Л.: Об оценке погрешности при нахождении собственных функций методом конечных разностей. *Studia Sci. Math. Hung.* **2** (1967), 185—191.
[24] Самарский, А. А.: Локально—одномерные разностные схемы на неравномерных сетках, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **3** (1963), 431—466.
[25] BRAMBLE, J. H., HUBBARD, B. E.: A theorem on error estimation for finite-difference analogues of the Dirichlet problem for elliptic equations. *Contributions to Differential Equations,* vol. 2., New York, 1963, 319—340.
[26] Саульев, В. К.: К вопросу решения задачи о собственных значениях методом конечных разностей, *Вычисл. матем. и вычисл. техн., сборник* **2** (1955), 116—144.
[27] Приказчиков, В. Г.: Разностная задача на собственные значения для эллиптического оператора. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **5** (1965), 648—657.
[28] Демъянович, Ю. К.: Об аппроксимации и сходимости метода сеток в эллиптических задачах, *Докл. АН СССР,* **170** (1966), 27—30.

SPEKTRÁLMATRIXOK FAKTORIZÁCIÓJÁRÓL

Írta: KRÁMLI ANDRÁS

Az időben folytonos, ill. diszkrét stacionárius, sztochasztikus folyamatok prognózisának elméletében fontos szerepe van a spektrálsűrűség matrixfüggvények analitikus szorzat felbontásának. Különösen fontos az az egyszerű eset, amikor a spektrálsűrűség matrix elemei racionális függvények. Ebben az esetben ugyanis meg lehet konstruálni a — bizonyos szempontból — legjobb analitikus felbontást. Az [1] cikk az időben folytonos esetben megad egy konstrukciós módszert.

Ebben a cikkben a stacionárius folyamatok elméletében alkalmazott módszerek segítségével egy egyszerűbb konstrukciót adunk meg. A gondolatmenet azon alapszik, hogy az úgynevezett CAYLEY transzformáció segítségével az időben folytonos esetet vissza lehet vezetni az időben diszkrét esetre, ahol a meggondolások jóval áttekinthetőbbek. Amint az a bizonyításból kiderül, a CAYLEY transzformáció alkalmazásával tételünk közvetlenül is igazolható lenne, de a két eset szoros kapcsolatának hangsúlyozására mi az előbbi (lényegében nem bonyolultabb) utat választjuk.

Az időben folytonos folyamatok esetében a racionális spektrálsűrűség matrix szorzatfelbontási tétele a következőképpen szól:

1. TÉTEL. *Legyen $A(z)$ olyan, a komplex számsíkon értelmezett $n\times n$ típusú matrixfüggvény, amelynek elemei racionális függvények, és* rang $A(z)=r\leqq n$ *— kivéve esetleg véges sok pontot.*

$A(z)$ akkor és csak akkor faktorizálható az

$$A(z)=B(z)B_*(z)$$

alakban, ahol

a) $B(z)$ *racionális* $n\times r$ *típusú matrix és* $B_*(z) = \big(B(-\bar{z})\big)^*$ — $B(z)$ *un. parakonjugáltja — (C^* a C matrix adjungáltját jelenti),*

b) $B(z)$ *analitikus a* $\operatorname{Re} z<0$ *félsíkon,*

c) *létezik* $B(z)$ *balinverze, amely szintén analitikus a* $\operatorname{Re} z<0$ *félsíkon,*

ha $A(z)$ önadjungált és pozitív szemidefinit az imaginárius tengelyen.

A feltétel szükségessége nyilvánvaló (ti. ha λ valós $B_*(i\lambda)=B(i\lambda)^*$), ezért csak az elegendőség bizonyításával foglalkozunk.

Mindenekelőtt a következőket vegyük észre:

Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az $A(z)$ racionális matrixfüggvény $A_*(z)$ parakonjugáltja a $B(z)$ matrixfüggvény legyen az, hogy $A(i\lambda)^*=B(i\lambda)$ fennálljon (λ valós), ti. az $A(i\lambda)^*=B(i\lambda)$ határfeltétel ugyanazt a feltételt szabja ki a matrixelemekben szereplő racionális függvények együtthatóira, mint az $A_*(z)=B(z)$ feltétel. Hasonlóan $A(z)=B(z)B_*(z)$ akkor és csak akkor, ha $A(i\lambda)=B(i\lambda)B(i\lambda)^*$.

Ezt figyelembe véve az 1. tétel így fogalmazható meg:

Az $A(z)$ $n \times n$ típusú racionális matrixfüggvény akkor és csak akkor faktorizálható az imaginárius tengelyen

(1) $$A(i\lambda) = B(i\lambda)\,B(i\lambda)^*$$

alakban, ahol

a) *$B(z)$ racionális $n \times r$ típusú matrix* ($r = \operatorname{rang} A(z)$),
b) *$B(z)$ analitikus a* $\operatorname{Re} z < 0$ *félsíkon,*
c) *$B(z)$ balinverze létezik és analitikus a* $\operatorname{Re} z < 0$ *félsíkon, ha $A(i\lambda)$ önadjungált és pozitív szemidefinit (λ valós).*

Az úgynevezett CAYLEY transzformáció segítségével a probléma visszavezethető az egységkörön pozitív definit racionális matrixfüggvény (1)-hez hasonló felbontására (ez felel meg az időben diszkrét esetnek).

Tekintsük a következő leképezés-párt:

$$s = \varphi(z) = \frac{1+z}{1-z} \qquad z = \varphi^{-1}(s) = \frac{s-1}{1+s}.$$

Könnyen látható, hogy a φ leképezés a balfélsíkot analitikusan képezi le az egységkörbe, ahol φ^{-1} is analitikus; emellett a képzetes tengely képe éppen az egységkörvonal:

$$\varphi(i\lambda) = e^{-i\mu}, \quad \text{ahol} \quad \mu = 2 \operatorname{arc\,ctg} \lambda.$$

Tehát $\tilde{A}(s) = A(\varphi^{-1}(s))$ olyan racionális matrixfüggvény, amely az egységkörön önadjungált és pozitív szemidefinit. Megmutatjuk, hogy igaz a következő állítás:

2. TÉTEL. *Ha az $\tilde{A}(s)$ racionális matrixfüggvény önadjungált és pozitív szemidefinit az egységkörön, akkor felbontható*

(2) $$\tilde{A}(e^{i\lambda}) = \tilde{B}(e^{i\lambda})\tilde{B}(e^{i\lambda})^*$$

alakban, ahol

a) *$\tilde{B}(s)$ racionális $n \times r$ típusú matrixfüggvény* ($r = \operatorname{rang} \tilde{A}(s)$),
b) *$\tilde{B}(s)$ analitikus az egységkörben,*
c) *$\tilde{B}(s)$-nek létezik a balinverze, és az is analitikus az egységkörben.*

Ekkor a $B(z) = \tilde{B}(\varphi(z))$ függvény eleget tesz az 1. tétel feltételeinek. A második tétel bizonyításához a következőket jegyezzük meg:

A c) feltétel nélkül a második tétel a prognózis-elmélet egy ismert tétele; bizonyítása a FEJÉR—RIESZ lemmán alapszik (l. [2] 10. 3 lemma 63—66. o.).

A c) feltétel bizonyításához a következő állítást kell igazolnunk: a (2) felbontás helyettesíthető olyan

(3) $$\tilde{A}(e^{i\lambda}) = B(e^{i\lambda})B(e^{i\lambda})^*$$

felbontással, amelyben $B(s)$-nek minden $|s| < 1$-re van nem eltűnő $r \times r$-es aldeterminánsa, továbbá B elemei racionális törtfüggvények és analitikusak az egységkörben. (Minthogy $\tilde{B}$ elemei is racionális törtfüggvények, a szinguláris helyek száma — multiplicitásokkal együtt számolva — véges sok.)

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $|s_0|<1$ és rang $B(s_0)=k<r$. A $B(s_0)$ matrixnak van k lineárisan független sora; az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy az első r sor közül is kiválaszthatók. Jelöljük ezt az $r\times r$ típusú részmatrixot $C(s_0)$-lal. A poláris felbontás tétele alapján van olyan (konstans) V_1 unitér matrix, hogy $C(s_0)=V_1H$, ahol $H=[C(s_0)C(s_0)^*]^{\frac{1}{2}}$.

Minthogy H önadjungált, unitér ekvivalens egy D diagonális matrixszal:

$$D = V_2HV_2^* = V_2V_1^*C(s_0)V_2^*. \tag{4}$$

A D matrix főátlójában is előfordul a 0 elem, mert

$$\text{rang } C(s_0)<r. \tag{5}$$

Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy éppen a balfelső sarokban levő elem 0.

Legyen $D(s)=V_2V_1^*C(s)V_2^*$ — ekkor a (4) és (5) összefüggések azt jelentik, hogy $D(s)$ első oszlopának és sorának s_0 zérushelye. Ezért a $C(s)V_2^*D_1(s)$ matrix analitikus az egységkörben, ahol

$$D_1(s)=\begin{pmatrix} s^{-1} & 0\ldots & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & 0\\ 0\ldots 0 & & 1\end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{1-\bar{s}_0s}{s-s_0} & \dfrac{s_0}{|s_0|} & 0\ldots 0\\ 0 & 1 & \vdots\\ \vdots & \ddots & 0\\ 0\ldots 0 & & 1\end{pmatrix}$$

attól függően, hogy $s_0=0$ vagy sem.

Tekintsük most a $B(s)V_2^*D_1(s)$ $n\times r$ típusú matrixfüggvényt. Egy unitér matrixszal való szorzás nem változtat a sorok lineáris függőségi viszonyain, ezért s_0 a $B(s)V_2^*$ első oszlopának is zérushelye. Ellenkező esetben ugyanis rang $B(s_0)V_2^*>k$, mert a $C(s_0)V_2^*$ részmatrix k lineárisan független sorához hozzávéve egy olyan sort, amelynek első eleme s_0-ban nem tűnik el, $k+1$ lineárisan független sort választhatnánk ki a $B(s_0)V_2^*$ matrix soraiból.

Minthogy $V_2^*D_1(e^{i\lambda})$ unitér, a $B'(s)=B(s)V_2^*D_1(s)$ is kielégíti a (3) határfeltételt, és s_0 a $B'(s)$ $r\times r$ típusú aldeterminánsainak eggyel alacsonyabb multiplicitású zérushelye, mint $B(s)$ megfelelő aldeterminánsainak. (Ez a megállapítás természetesen csak a nem azonosan eltűnő aldeterminánsokra vonatkozik.) Mivel $V_2^*D_1(s)$ az egységkör minden más pontjában értelmezve van és invertálható, a $B(s)$-ről $B'(s)$-re való áttéréskor az s_0-tól különböző zérushelyek változatlanok maradnak. Az eljárást addig folytathatjuk, míg van olyan $|s_0|<1$, hogy rang $B'^{\cdots\prime}(s_0)<r$. De véges sok szinguláris hely van, tehát az eljárás véges lépés után végetér. Ezzel állításunkat és így az 1. és a 2. tételeket is igazoltuk.

Megjegyzés: A FEJÉR—RIESZ lemma megfelelő változatának felhasználásával az 1. tétel is igazolható a c) feltétel nélkül (l. uo.). A teljes 1. tétel bizonyítása ezután ugyanúgy történhet, mint a 2. tételé, csak $D_1(s)$ helyett $D_1(\varphi(z))$ matrixszal kell a korrekciót elvégezni.

IRODALOM

[1] CSÁKI F.—FISCHER P.: On the Spectrum Factorization, *Acta Technica Acad. Sci. Hung.* **58** (1967) 1—2., 145—168. o.
[2] Розанов Ю. А.: Стационарные Случайные Процессы, Физматгиз, (1963) Москва.

ON FACTORIZATION OF SPECTRAL MATRICES

by A. KRÁMLI

Summary

In the present note the proof of a frequently used theorem ot the statistical prediction theory is given.

THEOREM: Let $A(z)$ be an analitic matrix function with rational elements defined on the complex plane.

Let the dimension and the rank ot $A(z)$ be n and $r \leqq n$ respectively.

$A(z)$ is factorizable in the form

$$A(z) = B(z)\,B_*(z)$$

where
a) $B(z)$ is an $n \times r$ rational matrix function and $B_*(z) = (B(-\bar{z}))^*$,
b) $B(z)$ is analytic on the left half-plane,
c) there exists a left inverse of $B(z)$ that is analytic on the left half-plane,
if and only if $A(z)$ is HERMITIAN and positive on the imaginary axis.

Matrix functions of such type arise as spectral density matrices of stationary stochastic processes, continuous in time.

A constructiv proof of this theorem is given in [1]. Our proof based on reduction to a similar theorem valid for spectral matrices defined on the unit circle corresponding to the discrete time case is also constructiv but simpler, than original one.

The methods used were taken from classical treatises on stationary processes e.g. [2].

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

ALGORITMUSOK LOGIKAI SÉMÁIRÓL (II)*

Írta: JU. I. JANOV

4. A teljesség bizonyítása

Most bebizonyítjuk az I—XI rendszer teljességét abban az értelemben, hogy minden változáseloszlás esetén bármely $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ alakú igaz formula levezethető, ahol $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémák.

02. 10. Legyen adva az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$ séma. A következő jelöléseket vezetjük be: $\hat{\mathfrak{A}}_0 \equiv \mathfrak{A}$,

$$\hat{\mathfrak{A}}_i \equiv \overline{A_i^{**}} \underset{s}{\llcorner} A_0 \mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_i \underset{s}{\lrcorner}, \ldots, A_n), \qquad (i=1, \ldots, n),$$

ahol A_0 az $A_1, \ldots, A_n$-től különböző tetszőleges operátor.

Definiáljuk az $\alpha_{ij}(p_1, \ldots, p_k)$ függvényeket $(i=0, 1, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n+2)$ a következőképpen:

$1 \leqq j \leqq n$ esetén

$$\alpha_{ij}(\Delta_s) = \begin{cases} 1, \text{ ha } A_j \text{ az } \hat{\mathfrak{A}}_i \text{ séma } \Delta_s, \Delta_s, \ldots \text{ sorozatra kapott értékének első operátora;} \\ 0, \text{ — az ellenkező esetben.} \end{cases}$$

$$\alpha_{i,n+1}(\Delta_s) = \begin{cases} 1, \text{ ha } \hat{\mathfrak{A}}_i \text{ séma értéke a } \Delta_s, \Delta_s, \ldots \text{ sorozatra üres periódusú;} \\ 0 \text{ — az ellenkező esetben.} \end{cases}$$

$$\alpha_{i,n+2}(\Delta_s) = \begin{cases} 1, \text{ ha } \hat{\mathfrak{A}}_i \text{ séma értéke a } \Delta_s, \Delta_s, \ldots \text{ sorozatra üres;} \\ 0 \text{ — az ellenkező esetben.} \end{cases}$$

Nyilvánvalóan az α_{ij} függvények ekvivalens sémák invariánsai, és fordítva, ha $\mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_n)$ és $\mathfrak{B}(A_1, \ldots, A_n)$ sémákra fennáll:

$$\alpha_{ij(\mathfrak{A})} \equiv \alpha_{ij(\mathfrak{B})} \qquad (i=0, 1, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, n+2),$$

akkor $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$.

Kimutatjuk, hogy minden $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$ séma adott változáseloszlásnál az I—XI szabályok segítségével bizonyos $\mathfrak{A}^*$ kanonikus alakra hozható (a szemléletesség kedvéért a félzárójeleket indexpárokkal számozzuk), ahol az operátorok számozásuk sorrendjében vannak elhelyezve, emellett az i-edik operátor után a logikai feltételek $\bar{\alpha}_{i1} \underset{i1}{\llcorner} \bar{\alpha}_{i2} \underset{i2}{\llcorner} \ldots \bar{\alpha}_{i,n+2} \underset{i,n+2}{\llcorner}$ csoportja áll, a j-edik operátor előtt pedig a $\underset{0j}{\lrcorner} \underset{1j}{\lrcorner} \ldots \underset{nj}{\lrcorner}$ $(i=0, 1, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, n+2)$ jobb félzárójelek állnak. Itt

* О логических схемах алгоритмов, проблемы кибернетики **1** (1958), 75—127. A fordítás első része a III. Oszt. Közl. **18.** kötet 1. számában (83—108. old.) jelent meg.

A_0-on és A_{n+2}-n üres szavakat kell érteni, melyek a sémától balra és jobbra állnak, A_{n+1}-en pedig — „üres ciklust": $\underset{\eta}{\rfloor} 0 \underset{\eta}{\llcorner}$.

$$\mathfrak{A}^* \equiv \bar{\alpha}_{01} \underset{01}{\llcorner} \dots \bar{\alpha}_{0,n+2} \underset{0,n+2}{\llcorner} \underset{01}{\rfloor} \dots \underset{n1}{\rfloor} A_1 \bar{\alpha}_{11} \underset{11}{\llcorner} \dots \bar{\alpha}_{1,n+2} \underset{1,n+2}{\llcorner} \underset{02}{\rfloor} \dots \underset{n2}{\rfloor} A_2 \dots$$

$$\dots A_n \bar{\alpha}_{n1} \underset{n1}{\llcorner} \dots \bar{\alpha}_{n,n+2} \underset{n,n+2}{\llcorner} \underset{0,n+1}{\rfloor} \dots \underset{n,n+1}{\rfloor} \underset{\eta}{\rfloor} 0 \underset{\eta}{\llcorner} \underset{0,n+2}{\rfloor} \dots \underset{n,n+2}{\rfloor}.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy a 6^1 szabály alapján elegendő csak olyan sémákat vizsgálnunk, amelyekben minden operátor lényeges, azaz nincs alárendelve 0-nak, akkor így az összes szabály megfordíthatósága miatt az I—XI rendszer teljessége a fenti értelemben bizonyítást nyer.

Végezzük el az $\mathfrak{A}$ séma következő átalakításait. Először a III szabály szerint állítsuk az operátorokat abba a sorrendbe, amelyben az $\mathfrak{A}^*$ sémában állanak, ezután az összes negált logikai feltételt írjuk a legutolsó operátortól jobbra. Továbbá az összes — ebbe a sémába tartozó — logikai függvényt teljes konjunktív normálformában írjuk fel [7] (I. 2,3 miatt feltételezhetjük, hogy $1\underset{i}{\llcorner}$ alakú logikai feltételek nincsenek a sémában), azután a II. 1,2 alapján minden olyan logikai feltételt, amely két vagy több elemi diszjunkció[1] konjunkcióját tartalmazza, felbontjuk csak egy elemi diszjunkciót tartalmazó logikai feltételekre. Jelöljük ∇_s-sel azt az elemi konjunkciót, amely megfelel a

$$\Delta_s = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \qquad (\sigma_i = 0 \quad \text{vagy} \quad 1, \; i = 1, 2, \dots, k)$$

értékrendszernek, azaz $\nabla_s = p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \dots p_k^{\sigma_k}$, ahol $p_i^1 \equiv p_i$, $p_i^0 \equiv \bar{p}_i$.

Sémánkban minden elemi diszjunkciót helyettesítünk kettős konjunkció negációjával. Akkor a sémában minden logikai feltétel $\bar{\nabla}_s \underset{k_s}{\llcorner}$ alakú lesz $(1 \leqq s \leqq 2^k)$.

Az $\mathfrak{A}$ séma az elvégzett átalakítások után legyen

$$\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{B}_1 A_1 \mathfrak{B}_2 A_2 \dots \mathfrak{B}_n A_n \mathfrak{B}_{n+1}$$

alakú, ahol a $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_{n+1}$ kifejezések nem tartalmaznak operátort, emellett némelyek közülük üresek is lehetnek.

Azt mondjuk, hogy valamely kifejezésben az $\underset{s}{\rfloor}$ jobb félzárójel a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés *előtt* áll, ha $\underset{s}{\rfloor}$ balra áll $\mathfrak{B}$-től, és $\underset{s}{\rfloor}$ és $\mathfrak{B}$ között nincs elemi kifejezés (azaz az $(\underset{s}{\rfloor}, \mathfrak{B})$ nyitott intervallum vagy üres, vagy csak jobb félzárójeleket tartalmaz).

Mivel $i \neq j$-re fennáll: $\nabla_j \to \bar{\nabla}_i$, azaz $\nabla_j \equiv \nabla_j \cdot \bar{\nabla}_i$, úgy $\vdash \bar{\nabla}_j \underset{k_j}{\llcorner} = \bar{\nabla}_j \vee \nabla_i \underset{k_j}{\llcorner} = \bar{\nabla}_i \underset{l}{\llcorner} \bar{\nabla}_j \underset{k_j}{\llcorner} \underset{l}{\rfloor}$ (II. 3 miatt).

Következésképpen, a VI. 1 szerint

$$(1) \qquad \vdash \bar{\nabla}_i \underset{k_i}{\llcorner} \mathfrak{A}_1 \underset{k_i}{\rfloor} \bar{\nabla}_j \underset{k_j}{\llcorner} \mathfrak{A}_2 \underset{k_j}{\rfloor} = \begin{cases} \bar{\nabla}_i \underset{k_i}{\llcorner} \mathfrak{A}_1 \bar{\nabla}_j \underset{k_j}{\llcorner} \mathfrak{A}_2 \underset{k_j}{\rfloor} \underset{k_i}{\rfloor}, & \text{ha} \quad \nabla_i = \nabla_j; \\ \bar{\nabla}_i \underset{k_i}{\llcorner} \mathfrak{A}_1 \bar{\nabla}_j \underset{k_j}{\llcorner} \underset{k_i}{\rfloor} \mathfrak{A}_2 \underset{k_j}{\rfloor}, & \text{ha} \quad \nabla_i \neq \nabla_j. \end{cases}$$

[1] Elemi diszjunkcióknak (konjunkcióknak) a $p_1^{\sigma_1} \vee p_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee p_k^{\sigma_k}$ $(p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \dots p_k^{\sigma_k})$ alakú formulákat nevezzük, ahol $\sigma_i = 0$, vagy 1, p_i^0 ill. p_i^1 a $\bar{p}_i$-t, ill. p_i-t jelöli.

Analóg ekvivalenciák levezethetők a $\overline{\nabla}_i \underset{k_i}{\llcorner}$ és $\overline{\nabla}_j \underset{k_j}{\llcorner}$ hatástartománya összes lehetséges elhelyezésére (VI. 2—6-nak megfelelően).

Más szóval, ha valamilyen $\underset{k_i}{\lrcorner}$ jobb félzárójel a $\overline{\nabla}_j \underset{k_j}{\llcorner}$ logikai feltétel előtt áll, akkor attól függően, hogy (a $\overline{\nabla}_i \underset{k_i}{\llcorner}$ logikai feltétel) $\overline{\nabla}_i$ függvénye egybeesik-e $\overline{\nabla}_j$-vel vagy nem, vagy át tudjuk vinni a $\underset{k_j}{\lrcorner}$ jobb félzárójelhez, vagy $\overline{\nabla}_j \underset{k_j}{\llcorner}$-től közvetlenül jobbra állíthatjuk — a $\underset{k_i}{\lrcorner}$ jelt.

Helyezzük át az $\mathfrak{A}'$ sémában a jobb félzárójeleket ezen szabályok ((1) és az ezzel analóg szabályok) alapján. Az áthelyezések ezen eljárása minden $\underset{s}{\lrcorner}$ jobb félzárójelre vagy megszakad véges lépés után, vagy végtelenül folytatható. Az első esetben két lehetőség áll fenn:

1. Véges számú áthelyezés után a $\underset{s}{\lrcorner}$ jel az operátor elé kerül.

2. Véges számú áthelyezés után a $\underset{s}{\lrcorner}$ jel az $\mathfrak{A}'$ séma jobb oldali legutolsó elemi kifejezésétől jobbra kerül.

A második esetben szükségszerűen teljesül a következő:

3. Véges számú áthelyezés után a $\underset{s}{\lrcorner}$ jel arra a helyre kerül, amelyen már korábban volt:[2]

$$\ldots \alpha \underset{s}{\llcorner} \ldots \underset{t}{\llcorner} \underset{s}{\lrcorner} \alpha \underset{t}{\llcorner} \ldots .$$

Az 1. és 2. esetben folytatjuk az áthelyezések eljárását addig, amíg lehetséges, az utolsó esetben pedig $\underset{s}{\lrcorner}$-et a lehetséges helyek közül a jobb oldali legszélső helyre állítjuk.

Ilyen áthelyezések eredményeként az $\mathfrak{A}'$ séma nyilvánvalóan a következő alakú lesz:

$$\overline{\nabla}_{i_1} \underset{t_1}{\llcorner} \ldots \overline{\nabla}_{i_s} \underset{t_s}{\llcorner} \underset{j_1}{\lrcorner} \ldots \underset{j_r}{\lrcorner} A_1 \overline{\nabla}_{k_1} \underset{u_1}{\llcorner} \ldots \overline{\nabla}_{k_v} \underset{u_v}{\llcorner} \underset{l_1}{\lrcorner} \ldots \underset{l_w}{\lrcorner} A_2 \ldots A_n \overline{\nabla}_{m_1} \underset{n_1}{\llcorner} \ldots \overline{\nabla}_{m_x} \underset{n_x}{\llcorner} \mathfrak{B}'_{n+1} \underset{y_1}{\lrcorner} \ldots \underset{y_z}{\lrcorner},$$

ahol $\mathfrak{B}'_{n+1}$ — jobb szélső kifejezés üres is lehet. 10° alapján feltételezhetjük, hogy a sorban álló logikai feltételek minden $\overline{\nabla}_{\lambda_1} \underset{\mu_1}{\llcorner} \ldots \overline{\nabla}_{\lambda_\tau} \underset{\mu_\tau}{\llcorner}$ csoportjában az összes $\overline{\nabla}_{\lambda_i}$ $(i=1, \ldots, \tau)$ függvények páronként különbözők. Speciálisan némelyik csoport üres is lehet $(\tau=0)$. Az V. axióma értelmében minden ilyen csoportot kiegészíthetünk a $\overline{\nabla}_{\lambda_{\tau+1}} \underset{\mu_{\tau+1}}{\llcorner}$, ..., $\overline{\nabla}_{\lambda_{2^k}} \underset{\mu_{2^k}}{\llcorner}$ logikai feltételekkel, amelyek jobb félzárójelei közvetlenül jobbra állnak ettől a csoporttól, és emellett az összes $\overline{\nabla}_{\lambda_1}, \ldots, \overline{\nabla}_{\lambda_{\tau+1}}, \ldots, \overline{\nabla}_{\lambda_{2^k}}$ függvény páronként különböző, következésképpen,

$$\underset{i=1}{\overset{2^k}{\&}} \overline{\nabla}_{\lambda_i} \equiv 0. \tag{2}$$

[2] Speciálisan előfordulhatnak olyan áthelyezések, amelyek $\underset{s}{\lrcorner}$-et a helyén hagyják, például a következő alakú sémában:

$$\ldots \alpha \underset{s}{\llcorner} \ldots \underset{t}{\lrcorner} \underset{s}{\lrcorner} \alpha \underset{t}{\llcorner} \ldots$$

Ily módon sémánk:

$$\overline{\nabla}_{i_1}\underset{t_1}{\llcorner}\ldots\overline{\nabla}_{i_{2k}}\underset{t_{2k}}{\llcorner}\underset{j_1}{\lrcorner}\ldots\underset{j_{r'}}{\lrcorner}A_1\overline{\nabla}_{k_1}\underset{u_1}{\llcorner}\ldots\overline{\nabla}_{k_{2k}}\underset{u_{2k}}{\llcorner}\underset{l_1}{\lrcorner}\ldots\underset{l_{w'}}{\lrcorner}A_2\ldots$$

$$\ldots A_n\overline{\nabla}_{m_1}\underset{n_1}{\llcorner}\ldots\overline{\nabla}_{m_{2k}}\underset{n_{2k}}{\llcorner}\underset{g_1}{\lrcorner}\ldots\underset{g_h}{\lrcorner}\mathfrak{B}'_{n+1}\underset{y_1}{\lrcorner}\ldots\underset{y_{z'}}{\lrcorner}$$

alakú lesz.

Az (1) alakú formulákat, valamint a VIII és a IV axiómát felhasználva, a $\underset{g_1}{\lrcorner},\ldots,\underset{g_h}{\lrcorner}$ félzárójeleket — amennyiben lehetséges — jobbra áthelyezzük. Így a következő sémát kapjuk:

$$\mathfrak{A}''\equiv\overline{\nabla}_{i_1}\underset{t_1}{\llcorner}\ldots\overline{\nabla}_{i_{2k}}\underset{t_{2k}}{\llcorner}\underset{j_1}{\lrcorner}\ldots\underset{j_{r'}}{\lrcorner}A_1\overline{\nabla}_{k_1}\underset{u_1}{\llcorner}\ldots\overline{\nabla}_{k_{2k}}\underset{u_{2k}}{\llcorner}\underset{l_1}{\lrcorner}\ldots$$

$$\ldots\underset{l_m}{\lrcorner}A_2\ldots A_n\overline{\nabla}_{m_1}\underset{n_1}{\llcorner}\ldots\overline{\nabla}_{m_{2k}}\underset{n_{2k}}{\llcorner}\mathfrak{B}''_{n+1}\underset{f_1}{\lrcorner}\ldots\underset{f_s}{\lrcorner},$$

ahol

$$\mathfrak{B}''_{n+1}\equiv\underset{g_1^1}{\lrcorner}\ldots\underset{g_{h_1}^1}{\lrcorner}\overline{\nabla}_{\xi_1^1}\underset{\eta_1^1}{\llcorner}\overline{\nabla}_{\xi_2^1}\underset{\eta_2^1}{\llcorner}\ldots\overline{\nabla}_{\xi_{x_1}^1}\underset{\eta_{x_1}^1}{\llcorner}\underset{g_1^2}{\lrcorner}\ldots\underset{g_{h_2}^2}{\lrcorner}\overline{\nabla}_{\xi_1^2}\underset{\eta_1^2}{\llcorner}\ldots$$

$$\ldots\overline{\nabla}_{\xi_{x_2}^2}\underset{\eta_{x_2}^2}{\llcorner}\ldots\overline{\nabla}_{\xi_1^c}\underset{\eta_1^c}{\llcorner}\ldots\overline{\nabla}_{\xi_{x_c}^c}\underset{\eta_{x_c}^c}{\llcorner}\qquad(c\geqq 0;\ \text{ha}\ c=0,\ \text{akkor}\ \mathfrak{B}''\ \text{üres}).$$

Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{A}''$ sémában az I—XI rendszer szabályai segítségével a $\mathfrak{B}''_{n+1}$ kifejezést, ha nem üres, át tudjuk alakítani $\underset{\varrho_1}{\lrcorner}\ldots\underset{\varrho_\pi}{\lrcorner}\underset{\eta_1^c}{\lrcorner}0\underset{\eta_1^c}{\llcorner}$ alakúra.

Először kimutatjuk, hogy $\overline{\nabla}_{\xi_1^1}\underset{\eta_1^1}{\llcorner}\prec\nabla_{\xi_1^1}$. Valóban, a $\underset{g_1^1}{\lrcorner},\ldots,\underset{g_{h_1}^1}{\lrcorner}$ jobb félzárójelek valamennyien azon logikai feltételekhez tartoznak, amelyek függvényei egybeesnek a $\overline{\nabla}_{\xi_1^1}$-gyel, mert ellenkező esetben a megfelelő félzárójeleket $\overline{\nabla}_{\xi_1^1}\underset{\eta_1^1}{\llcorner}$-től jobbra helyeztük volna az (1) alakú szabályok alapján. Követezésképpen, $\overline{\nabla}_{\xi_1^1}\underset{\eta_1^1}{\llcorner}\prec\mathop{\&}\limits_{j=1}^{2k}\overline{\nabla}_j\vee\nabla_{\xi_1^1}$, azaz (2)-t figyelembe véve: $\overline{\nabla}_{\xi_1^1}\underset{\eta_1^1}{\llcorner}\prec\nabla_{\xi_1^1}$. Megjegyezzük továbbá, hogy a $\underset{\eta_1^1}{\lrcorner}$ jobb félzárójel vagy csak $\overline{\nabla}_{\xi_1^1}\underset{\eta_1^1}{\llcorner}$ előtt állhat, vagy attól jobbra, mivel nem áll operátor előtt. De a második esetben az összes $\underset{g_1^1}{\lrcorner},\ldots,\underset{g_{h_1}^1}{\lrcorner}$ jobb félzárójelet át tudtuk volna helyezni jobbra az (1) szabályok alapján, ami ellentmond annak, hogy azok a lehetséges helyzetek közül a jobb szélsőben fordulnak elő. Következésképpen $\underset{\eta_1^1}{\lrcorner}$ a $\overline{\nabla}_{\xi_1^1}\underset{\eta_1^1}{\llcorner}$ előtt áll. Alkalmazva $\overline{\nabla}_{\xi_1^1}\underset{\eta_1^1}{\llcorner}$-re a XI szabályt, pótolhatjuk azt $0\underset{\eta_1^1}{\llcorner}$-gyel, ezután pedig a 6° szabály miatt töröljük az összes $\overline{\nabla}_{\xi_2^1}\underset{\eta_2^1}{\llcorner},\ldots,\overline{\nabla}_{\xi_{x_1}^1}\underset{\eta_{x_1}^1}{\llcorner}$ logikai feltételt. A logikai feltételek

$$\overline{\nabla}_{\xi_1^i}\underset{\eta_1^i}{\llcorner}\ldots\overline{\nabla}_{\xi_{x_i}^i}\underset{\eta_{x_i}^i}{\llcorner}\qquad(i=2,3,\ldots,c)$$

megmaradt csoportjain analóg átalakításokat elvégezve, $\mathfrak{B}''_{n+1}$ helyett a következő kifejezést kapjuk:

$$\underset{e_1^1}{\rfloor}\ldots\underset{e_{\pi_1}^1}{\rfloor}\ \underset{\eta_1^1}{\rfloor}0\underset{\eta_1^1}{\lfloor}\ \underset{e_1^2}{\rfloor}\ldots\underset{e_{\pi_2}^2}{\rfloor}\ \underset{\eta_1^2}{\rfloor}0\underset{\eta_1^2}{\lfloor}\ldots\underset{\eta_1^c}{\rfloor}0\underset{\eta_1^c}{\lfloor}.$$

A VII. axióma értelmében az $\underset{\eta_1^1}{\rfloor}, \underset{\eta_1^2}{\rfloor}, \ldots, \underset{\eta_1^{c-1}}{\rfloor}$ félzárójeleket átvive az $\underset{\eta_1^c}{\rfloor}$-hez, kifejezésünket ilyen alakra hozzuk:

$$\underset{e_1^1}{\rfloor}\ldots\underset{e_{\pi_1}^1}{\rfloor}0\underset{\eta_1^1}{\lfloor}\ \underset{e_1^2}{\rfloor}\ldots\underset{e_{\pi_2}^2}{\rfloor}0\underset{\eta_1^2}{\lfloor}\ldots\underset{\eta_1^1}{\rfloor}\ \underset{\eta_1^2}{\rfloor}\ldots\underset{\eta_1^c}{\rfloor}0\underset{\eta_1^c}{\lfloor}.$$

A $0\underset{\eta_1^i}{\lfloor}$ $(i=1, \ldots, c)$ logikai feltételek mindegyikét $\overline{\nabla}_{\xi_1^i}0\underset{\eta_1^i}{\lfloor}$ alakban előállítva, és a II. 1, VI. 1 formulákat felhasználva, az összes $\underset{e_{\sigma_i}^i}{\rfloor}$ $(i=1, \ldots, c;\ \sigma_i=1, \ldots, \pi_i)$ félzárójeleket áthelyezzük a $0\underset{\eta_1^c}{\lfloor}$ logikai feltételhez. Akkor, a II. 1 és V szabályokat felhasználva, törölhetjük az összes $0\underset{\eta_1^1}{\lfloor}, 0\underset{\eta_1^2}{\lfloor}, \ldots, 0\underset{\eta_1^{c-1}}{\lfloor}$ logikai feltételt, így a szükséges kifejezést kapjuk. Abban az esetben tehát, ha $\mathfrak{B}''_{n+1}$ nem üres:

$$\begin{aligned}\vdash \mathfrak{A} = {}& \overline{\nabla}_{i_1}\underset{t_1}{\lfloor}\ldots\overline{\nabla}_{i_{2^k}}\underset{t_{2^k}}{\lfloor}\ \underset{j_1}{\rfloor}\ldots\underset{j_{r'}}{\rfloor}A_1\overline{\nabla}_{k_1}\underset{u_1}{\lfloor}\ldots\overline{\nabla}_{k_{2^k}}\underset{u_{2^k}}{\lfloor}\ \underset{l_1}{\rfloor}\ldots \\ &\ldots\underset{l_{v'}}{\rfloor}A_2\ldots A_n\overline{\nabla}_{m_1}\underset{n_1}{\lfloor}\ldots\overline{\nabla}_{m_{2^k}}\underset{n_{2^k}}{\lfloor}\ \underset{\varrho_1}{\rfloor}\ldots\underset{\varrho_\pi}{\rfloor}\ \underset{\eta}{\rfloor}0\underset{\eta}{\lfloor}\ \underset{f_1}{\rfloor}\ldots\underset{f_l}{\rfloor}.\end{aligned} \tag{3}$$

Ha pedig a $\mathfrak{B}''_{n+1}$ üres, azaz a séma alakja:

$$\overline{\nabla}_{i_1}\underset{t_1}{\lfloor}\ldots\overline{\nabla}_{i_{2^k}}\underset{t_{2^k}}{\lfloor}\ \underset{j_1}{\rfloor}\ldots\underset{j_{r'}}{\rfloor}A_1\ldots A_n\overline{\nabla}_{m_1}\underset{n_1}{\lfloor}\ldots\overline{\nabla}_{m_{2^k}}\underset{n_{2^k}}{\lfloor}\ \underset{f_1}{\rfloor}\ldots\underset{f_l}{\rfloor},$$

akkor I. 3 alapján $\overline{\nabla}_{m_{2^k}}\underset{n_{2^k}}{\lfloor}$ és $\underset{f_1}{\rfloor}$ közé illesztjük az $\underset{\eta}{\rfloor}1\underset{\eta}{\lfloor}$ kifejezést. Mivel $\mathop{\&}\limits_{j=1}^{2^k}\overline{\nabla}_{m_j}\equiv 0$, ezért $1\underset{\eta}{\lfloor}\prec 0$ és a XI szabály miatt $1\underset{\eta}{\lfloor}$-t $0\underset{\eta}{\lfloor}$-val pótolhatjuk. Ily módon ugyanolyan alakú sémát kapunk, mint a (3) formula jobb oldalán szerepel, ahol $\pi=0$.

Továbbá, mivel $\nabla_i\to\overline{\nabla}_j\ (i\neq j)$, ezért a 9° értelmében az összes logikai feltételt a kapott sémában áthelyezzük. Állítsuk őket mindegyik csoportban a következő sorrendbe. Előre helyezzük az összes olyan logikai feltételt, amelynek jobb félzárójele az A_1 operátor előtt áll. Ha az adott csoportban ilyen logikai feltétel nincs, akkor I. 2,3 értelmében beírjuk az $1\underset{v_1}{\lfloor}$ logikai feltételt, amelynek jobb félzárójelét az A_1 operátor elé írjuk. Utána helyezzük el az összes olyan logikai feltételt, amelynek jobb félzárójele A_2 operátor előtt áll. Ha ilyen nincs, akkor I. 2,3 alapján beírjuk az $1\underset{v_2}{\lfloor}$ logikai feltételt, amelynek jobb félzárójelét az A_2 operátor elé írjuk stb. Az utolsó előtti helyre azon logikai feltételeket helyezzük, amelyek jobb félzárójele $0\underset{\eta}{\lfloor}$ előtt áll; ha ilyen nincs akkor úgy járunk el, mint az előző esetben. Végül, a legutolsó helyre azon logikai feltételek kerülnek, amelyek jobb félzárójele a $0\underset{\eta}{\lfloor}$-tól jobbra áll; ha ilyen nincs, akkor ismét beírjuk az $1 \underset{v_{n+2}}{\llcorner}$ logikai feltételt, amelynek jobb félzárójelét a séma legvégére írjuk. A II. 1,2 szabályok alapján egyesítve az összes olyan logikai feltételt, melyeknek jobb félzárójele egy helyen áll, valamilyen

$$\mathfrak{A}''' \equiv \beta_{01} \underset{01}{\llcorner} \beta_{02} \underset{02}{\llcorner} \dots \beta_{0,n+2} \underset{0,n+2}{\llcorner} \underset{01}{\lrcorner} \underset{11}{\lrcorner} \dots \underset{n1}{\lrcorner} A_1 \beta_{11} \underset{11}{\llcorner} \dots \beta_{1,n+2} \underset{1,n+2}{\llcorner}$$

$$\underset{02}{\lrcorner} \dots \underset{n2}{\lrcorner} A_2 \dots \underset{0n}{\lrcorner} \dots \underset{nn}{\lrcorner} A_n \beta_{n1} \underset{n1}{\llcorner} \dots \beta_{n,n+2} \underset{n,n+2}{\llcorner} \underset{0,n+1}{\lrcorner} \dots \underset{n,n+1}{\lrcorner} \underset{\eta}{\lrcorner} 0 \underset{\eta}{\llcorner} \underset{0,n+2}{\lrcorner} \dots \underset{n,n+2}{\lrcorner}$$

sémát kapunk (bizonyos β_{ij}-k lehetnek konstansok is). Mivel a $\beta_{ij} \underset{ij}{\llcorner}$ kifejezések jobbra állnak A_i-től, ezért világos, hogy $\beta_{ij} \underset{ij}{\llcorner} \prec A_i^{**} (i=0, 1, \dots, n; j = 1, 2. \dots, n+2)$, emellett feltesszük, hogy $A_0^{**} \equiv 1$. Ezért az 5° értelmében helyettesítjük a $\beta_{ij} \underset{ij}{\llcorner}$ logikai feltételeket $\beta'_{ij} \underset{ij}{\llcorner}$-vel ,ahol

$$\beta'_{ij} \equiv \beta_{ij} \vee \overline{A_i^{**}}. \tag{4}$$

Kimutatjuk, hogy $\beta'_{ij} \equiv \bar{\alpha}_{ij}$. $(i=0, 1, \dots, n;\ j=1, 2, \dots, n+2)$.

02.11. Logikai függvények $\{\alpha_i\}$ $(i=1, \dots, n)$ halmazát *ortogonális*nak nevezzük, ha $\alpha_i \cdot \alpha_j \equiv 0$ $(i \neq j)$, és *teljesnek*, ha $\bigvee\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \equiv 1$.

Az ortogonális és teljes halmazt *normálisnak* nevezzük.

Minden $i(=0, 1, \dots, n)$-re a $\{\beta_{ij}\}$ $(j=1, 2, \dots, n+2)$ halmaz ortogonális, mivel $j_1 \neq j_2$ mellett a β_{ij_1} és β_{ij_2} függvények azon ∇_s függvények konjunkciói, amelyek a $\{\nabla_s\}$ halmazba tartoznak. Ezenkívül világos, hogy minden $i(=0, 1, \dots, n)$-re a $\{\beta_{ij}\}$ $(j=1, 2, \dots, n+2)$ halmazok teljesek.

Mivel $\overline{\beta'_{ij}} \to A_i^{**}$, így $\overline{\beta'_{ij}} \to \alpha_{ij}$. Valóban $\overline{\beta'_{ij}} \to \beta_{ij}$, és ezért a β'_{ij}-t 0-ra változtató értékrendszernél az $\mathfrak{A}'''$ sémában az A_i operátor végrehajtása után — a $\{\beta_{ij}\}$ $(j=1, 2, \dots, n+2)$ halmazok ortogonalitása értelmében — szükségszerűen az A_j operátor kerül végrehajtásra (ahol $A_{n+1}: \underset{\eta}{\lrcorner} 0 \underset{\eta}{\llcorner}$ „üres ciklus", A_{n+2}: üres operátor), azaz $\overline{\alpha_{ij}} = 1$. Bizonyítjuk, hogy $\alpha_{ij} \to \overline{\beta'_{ij}}$. Tegyük fel az ellenkezőjét, azaz található olyan Δ_s értékrendszer, hogy $\alpha_{ij}(\Delta_s)=1$ és $\beta'_{ij}(\Delta_s)=1$. Mivel $\alpha_{ij} \to A_i^{**}$ (az α_{ij} függvények 02.10-ben adott definíciója miatt), így

$$A_i^{**}(\Delta_s)=1, \tag{5}$$

és következésképpen, (4) miatt $\beta_{ij}(\Delta_s)=1$. Akkor, figyelembe véve azt, hogy a $\{\beta_{it}\}$ $(t=1, 2, \dots, n+2)$ halmaz normális, van olyan egyetlen $m \neq j$ $(1 \leqq m \leqq n+2)$, hogy $\beta_{im}(\Delta_s)=0$. (5)-öt és (4)-et tekintve, ez azt jelenti, hogy $\beta'_{im}(\Delta_s)=0$ és $\beta'_{il}(\Delta_s)= =1$ $l \neq m$-re. Emellett (5)-ből a 2.1 lemma (1. §) értelmében következik, hogy az értékrendszerek valamely megengedett sorozatára az A_i operátor végrehajtása után az

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{IV}} \equiv \beta'_{01} \underset{01}{\llcorner} \dots \beta'_{0,n+2} \underset{0,n+2}{\llcorner} \underset{01}{\lrcorner} \dots \underset{n1}{\lrcorner} A_1 \beta'_{11} \underset{11}{\llcorner} \dots \beta'_{1,n+2} \underset{1,n+2}{\llcorner} \dots A_n \beta'_{n1} \underset{n1}{\llcorner} \dots$$

$$\dots \beta'_{n,n+2} \underset{n,n+2}{\llcorner} \underset{0,n+1}{\lrcorner} \dots \underset{n,n+1}{\lrcorner} \underset{\eta}{\lrcorner} 0 \underset{\eta}{\llcorner} \underset{0,n+2}{\lrcorner} \dots \underset{n,n+2}{\lrcorner}$$

sémában a Δ_s értékrendszernél végrehajtásra kerül a $\beta'_{i1} \underset{i1}{\llcorner}$ logikai feltétel. Ha $m \neq 1$, és következésképpen $\beta'_{i1}(\Delta_s)=1$, akkor még ugyanennél a Δ_s értékrendszernél végrehajtásra kerül a $\beta'_{i2}\underset{i2}{\llcorner}$ logikai feltétel és így tovább $\beta'_{im}\underset{im}{\llcorner}$-ig. Mivel $\beta'_{im}(\Delta_s)=0$, ezért $\beta'_{im}\underset{im}{\llcorner}$ végrehajtása után vagy az A_m (ha $m\leqq n$) operátor, vagy a $0\underset{\eta}{\llcorner}$ logikai feltétel (ha $m=n+1$), vagy semmi sem kerül végrehajtásra (ha $m=n+2$). De ez ellentmond annak, hogy $\alpha_{ij}(\Delta_s)=1$, mivel $j\neq m$. Így $\beta'_{ij}\equiv\bar{\alpha}_{ij}$ ($i=0,1,\dots,n$; $j=1,2,\dots,n+2$), azaz $\mathfrak{A}^{\mathrm{IV}}$ és $\mathfrak{A}^*$ sémák egybeesnek, és következésképpen az $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^*$ formula levezethető. Ezzel az I—XI rendszer teljességét bebizonyítottuk.

5. Effektív alárendeltség üres változáseloszlásnál

Most definiáljuk az úgynevezett effektív alárendeltség fogalmát, és bizonyítjuk ennek ekvivalenciáját az üres változáseloszlásnál tekintett alárendeltség fogalmával. Mivel ebben a pontban a sémákat csak üres változáseloszlásnál fogjuk vizsgálni, ezért az „üres változáseloszlásnál" kifejezést rövidség kedvéért elhagyjuk.

02. 12. Indukcióval definiáljuk az n-edfokú feltételes alárendeltség fogalmát, amelyre közvetlenül szükségünk lesz az effektív alárendeltség definíciójához.

Legyen $\mathscr{R}$ — logikai feltételek valamely halmaza.

1. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{A}$ kifejezésben $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés — $\mathscr{R}$ elsőfokú feltételnél — *alá van rendelve* α függvénynek, és ezt jelöljük $\mathfrak{B}\prec\alpha\underset{1}{|}\mathscr{R}$-rel, ha az $\mathfrak{A}$ kifejezésben található olyan $\beta\underset{j}{\llcorner}$ logikai feltétel, hogy teljesülnek a következők:

1°. $\mathfrak{B}\in O^+(\beta\underset{j}{\llcorner})$.

2°. $\beta\to\alpha$.

3°. Minden olyan jobb félzárójel, amely a $(\beta\underset{j}{\llcorner},\mathfrak{B})$ intervallumban van, olyan $\gamma\underset{k}{\llcorner}$ logikai feltételhez tartozik, amely legalább egyet kielégít a következő feltételek közül:

$$(3_1)\qquad \gamma\underset{k}{\llcorner}\in(\beta\underset{j}{\llcorner},\mathfrak{B}).$$

$$(3_2)\qquad \gamma\underset{k}{\llcorner}\in\mathscr{R}.$$

$$(3_3)\qquad \bar{\gamma}\to\alpha.$$

2. Legyen definiálva az n-ediknél nem magasabb fokú feltételes alárendeltség. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{A}$ kifejezésben $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés az — $\mathscr{R}$ $n+1$-ed fokú feltételnél — *alá van rendelve* α függvénynek, és ezt jelöljük $\mathfrak{B}\prec\alpha\underset{n+1}{|}\mathscr{R}$-rel, ha az $\mathfrak{A}$ kifejezésben van olyan $\beta\underset{j}{\llcorner}$ logikai feltétel, hogy teljesül az 1°, 2°, valamint a következő:

3^1. Minden olyan jobb félzárójel, amely a $(\beta\underset{j}{\llcorner},\mathfrak{B})$ intervallumban van, olyan $\gamma\underset{k}{\llcorner}$ logikai feltételhez tartozik, amely legalább egynek eleget tesz a (3_1), (3_2), (3_3) vagy

(3_4) $\gamma\underset{k}{\llcorner}\prec\alpha\underset{m}{|}\mathscr{R}_1$, ahol $\mathscr{R}_1\subseteqq\mathscr{R}$, $m\leqq n$ — követelmények közül.

E definícióból következnek a feltételes alárendeltség következő tulajdonságai:

1. *Ha* $\mathcal{R}\prec\alpha\underset{n}{|}\mathcal{R}$, *akkor* $\mathfrak{B}\prec\alpha\underset{n}{|}\mathcal{R}\cup\sigma$, ahol σ — logikai feltételek tetszőleges halmaza.

2. *Ha* $\mathfrak{B}\prec\alpha\underset{n_1}{|}\mathcal{R}\cup\{\gamma\underset{k}{\llcorner}\}$ és $\gamma\underset{k}{\llcorner}\prec\alpha\underset{n_2}{|}\sigma$, *akkor* $\mathfrak{B}\prec\alpha\underset{\max(n_1,n_2+1)}{|}\mathcal{R}\cup\sigma$. *Speciálisan, ha* $\mathfrak{B}\prec\alpha\underset{n_1}{|}\mathcal{R}\cup\{\gamma\underset{k}{\llcorner}\}$ és $\gamma\underset{k}{\llcorner}\prec\alpha\underset{n_2}{|}\Lambda$, ahol Λ — logikai feltételek üres halmaza, akkor

$$\mathfrak{B}\prec\alpha\underset{\max(n_1,n_2+1)}{|}\mathcal{R}. \tag{1}$$

3. *Ha* $\mathfrak{B}\prec\alpha\underset{n}{|}\mathcal{R}$ *és* $\alpha\to\beta$, *akkor* $\mathfrak{B}\prec\beta\underset{n}{|}\mathcal{R}$.

4. *Ha* $\gamma\underset{k}{\llcorner}\prec\alpha\underset{1}{|}\mathcal{R}\cup\{\gamma\underset{k}{\llcorner}\}$, *akkor* $\gamma\underset{k}{\llcorner}\prec\alpha\underset{1}{|}\mathcal{R}$.

1. Példa. A

$$p_1\underset{1}{\llcorner}A_1p_3\underset{2}{\llcorner}\underset{1}{\lrcorner}A_2\bar{p}_2\underset{3}{\llcorner}\underset{2}{\lrcorner}A_3\underset{3}{\lrcorner}$$

sémában fennáll:

$$A_3\prec\bar{p}_2\underset{1}{|}\left\{p_3\underset{2}{\llcorner}\right\},\quad A_3\prec\bar{p}_2\vee\bar{p}_3\underset{1}{|}\Lambda;\quad A_3\prec\bar{p}_2\vee p_1\underset{2}{|}\Lambda.$$

2. Példa. A

$$p_1\underset{1}{\llcorner}A_1p_2\underset{2}{\llcorner}A_2\underset{1}{\lrcorner}A_3p_3\underset{3}{\llcorner}\underset{2}{\lrcorner}A_4p_4\underset{4}{\llcorner}\underset{5}{\lrcorner}A_5\underset{3}{\lrcorner}A_6\underset{4}{\lrcorner}p_5\underset{5}{\llcorner}$$

sémában:

$$A_6\prec p_2\vee p_4\underset{1}{|}\left\{p_3\underset{3}{\llcorner},p_5\underset{5}{\llcorner}\right\}\quad\text{és}\quad p_3\underset{3}{\llcorner}\prec p_2\vee p_4\underset{1}{|}\left\{p_1\underset{1}{\llcorner}\right\},$$

következésképpen, az 1. és 2. tulajdonságok miatt

$$A_6\prec p_2\vee p_4\underset{2}{|}\left\{p_1\underset{1}{\llcorner},p_5\underset{5}{\llcorner}\right\}.$$

A feltételes alárendeltség jelentését a következő lemma világítja meg, amelyre a továbbiakban is szükségünk lesz.

1. 2. LEMMA. *Ha valamely* $\mathfrak{A}$ *sémában a* $\mathfrak{B}$ *elemi kifejezés* — $\mathcal{R}=\{\gamma_1\underset{k_1}{\llcorner},\dots,\gamma_l\underset{k_l}{\llcorner}\}$ *n-ed fokú feltételnél — alá van rendelve* α *függvénynek:* $\mathfrak{B}\prec\alpha\underset{n}{|}\{\gamma_1\underset{k_1}{\llcorner},\dots,\gamma_l\underset{k_l}{\llcorner}\}$, *akkor az értékrendszerek minden olyan* $\Delta_s,\Delta_s,\dots$ *stacionárius sorozatára, amelyre* $\alpha(\Delta_s)=0$, *a* $\mathfrak{B}$ *kifejezés nem kerülhet előbb végrehajtásra, mint legalább egy a* $\gamma_i\underset{k_i}{\llcorner}$ *-k* $(1\leqq i\leqq l)$ *közül, és következésképpen, az* $\mathfrak{A}$ *sémában a* $\mathfrak{B}$ *kifejezés alá van rendelve az*

$$\alpha\vee\left(\gamma_1\underset{k_1}{\llcorner}\right)^{\otimes}\vee\dots\vee\left(\gamma_l\underset{k_l}{\llcorner}\right)^{\otimes}$$

függvénynek.

Bevezetjük a következő jelölést: $\varphi=(\gamma_1\underset{k_1}{\llcorner})^{\otimes}\vee\dots\vee(\gamma_l\underset{k_l}{\llcorner})^{\otimes}$. Akkor a lemma következtetését felírhatjuk így: ha $\mathfrak{B}\prec\alpha\underset{n}{|}\{\gamma_1\underset{k_1}{\llcorner},\dots,\gamma_l\underset{k_l}{\llcorner}\}$, akkor $\mathfrak{B}\prec\alpha\vee\varphi$, azaz $\bar{\alpha}\cdot\bar{\varphi}\to\overline{\mathfrak{B}^{\otimes}}$.

Bizonyítás n szerinti indukcióval. Legyen $\mathfrak{B} \prec \alpha \underset{1}{|} \{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}\}$, azaz található olyan $\beta \underset{j}{\llcorner}$, hogy 1°, 2° és 3° feltételek teljesülnek. A 2° feltételből következik, hogy ha $\alpha(\Delta_s)=0$, akkor $\beta(\Delta_s)=0$, ezért a sémát a Δ_s értékrendszernél végrehajtva, csak úgy juthatunk $\beta \underset{j}{\llcorner}$ hatástartományának egyenes részébe, ha végrehajtunk valamilyen $\gamma \underset{k}{\llcorner} \bar{\in} (\beta \underset{j}{\llcorner}, \mathfrak{B})$ logikai feltételt, amelynek jobb félzárójele a $(\beta \underset{j}{\llcorner}, \mathfrak{B})$ intervallumban van úgy, hogy $\gamma(\Delta_s)=0$. De a 3° miatt ilyen logikai feltételek szükségszerűen az $\mathscr{R}$-hez tartoznak.

Legyen a lemma igaz n-nél nem magasabb fokú alárendeltségre, és legyen $\mathfrak{B} \prec \alpha \underset{n+1}{|} \{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}\}$, azaz az $\mathfrak{A}$ sémában van olyan $\beta \underset{j}{\llcorner}$ logikai feltétel, hogy a 02. 12 definíció 1°, 2° és 3^1 feltételei teljesülnek. Legyen $\gamma'_1 \underset{t_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma'_m \underset{t_m}{\llcorner}$ az összes olyan logikai feltétel, amelyek jobb félzárójele a $[\beta \underset{j}{\llcorner}, \mathfrak{B}]$ zárt intervallumban van és amelyek a (3_1)—(3_3) feltételek egyikét sem elégítik ki. 3^1 miatt ezek eleget tesznek a (3_4)-nek, azaz minden $r(=1, 2, \ldots, m)$-re:

$$\gamma'_r \underset{t_r}{\llcorner} \prec \alpha \underset{n_r}{|} \left\{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}\right\} \qquad (n_r \leqq n). \tag{2}$$

De nyilvánvaló, hogy

$$\mathfrak{B} \prec \alpha \underset{1}{|} \left\{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}, \gamma'_1 \underset{t_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma'_m \underset{t_m}{\llcorner}\right\}, \tag{3}$$

azaz az α-t 0-ra változtató stacionárius értékrendszer-sorozatokra, a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés nem hajtható végre előbb, mint legalább egy a következő logikai feltételek közül:

$$\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}, \gamma'_1 \underset{t_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma'_m \underset{t_m}{\llcorner}.$$

De (2)-ből az indukciós feltevés miatt következik, hogy ilyen sorozatokra a $\gamma'_r \underset{t_r}{\llcorner}$ $(1 \leqq r \leqq m)$-ek közül egy sem hajtható végre előbb, mint legalább egyike a $\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}$ logikai feltételeknek, ezért a (3) miatt $\mathfrak{B}$ is rendelkezik ugyanezzel a tulajdonsággal. Ezzel a lemmát bizonyítottuk.

Most definiáljuk az *effektív alárendeltség* fogalmát, amelyet $\prec^\circ$-val jelölünk.

02. 13. Legyen $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés, $\mathfrak{A}$ kifejezés; akkor:

I. *a)* $\mathfrak{B} \prec^\circ 1$ $\mathfrak{A}$-ban.

b) Ha $\mathfrak{B}$ nem fordul elő $\mathfrak{A}$-ban, akkor $\mathfrak{B} \prec^\circ 0$ az $\mathfrak{A}$-ban.

c) Ha van a logikai feltételeknek olyan $\mathscr{R} = \{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}\}$ halmaza és találhatók olyan $n, n_1, \ldots, n_l$ természetes számok, hogy az $\mathfrak{A}$ kifejezésben fennáll $\mathfrak{B} \prec \alpha \underset{n}{|} \mathscr{R}$ és minden $\gamma_i \underset{k_i}{\llcorner}$-re $\mathscr{R}$-ből: $\gamma_i \underset{k_i}{\llcorner} \prec \alpha \underset{n_i}{|} \mathscr{R}$, akkor $\mathfrak{B} \prec^\circ \alpha$ az $\mathfrak{A}$-ban.

II. Ha $\mathfrak{B} \prec^\circ \alpha_1$ és $\mathfrak{B} \prec^\circ \alpha_2$ az $\mathfrak{A}$-ban, akkor $\mathfrak{B} \prec^\circ \alpha_1 \cdot \alpha_2$ az $\mathfrak{A}$-ban.

Az effektív alárendeltség legegyszerűbb példája az alárendeltség üres feltételnél (bármely fok esetén). Például, a $p_1 \underset{1}{\llcorner} A_1 p_3 \underset{2}{\llcorner} \underset{1}{\lrcorner} A_2 \bar{p}_2 \underset{3}{\llcorner} \underset{2}{\lrcorner} A_3 \underset{3}{\lrcorner}$ sémában az A_3 operátor effektív módon alá van rendelve $p_1 \vee \bar{p}_2$ függvénynek, mivel $A_3 \prec p_1 \vee \bar{p}_2 \underset{2}{|} A$.

$$p_1 \underset{1}{\llcorner} A_1 \underset{2}{\lrcorner} p_2 \underset{3}{\llcorner} \underset{1}{\lrcorner} A_2 p_1 \underset{4}{\llcorner} \underset{3}{\lrcorner} A_3 p_2 \underset{2}{\llcorner} \underset{4}{\lrcorner}$$

sémában az A_3 operátor effektíven alárendelt a p_1 függvénynek, mivel

$$A_3 \prec p_1 \underset{1}{|} \left\{p_2 \underset{3}{\llcorner}, p_2 \underset{2}{\llcorner}\right\}, \quad p_2 \underset{3}{\llcorner} \prec p_1 \underset{1}{|} \left\{p_2 \underset{2}{\llcorner}\right\}, \quad p_2 \underset{2}{\llcorner} \prec p_1 \underset{1}{|} \left\{p_2 \underset{3}{\llcorner}\right\}.$$

Olyan függvény megtalálásához, amelynek adott elemi kifejezés effektíven alárendelt, hasznos a következő tétel:

3. TÉTEL. *Ha a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés — az $\mathscr{R} = \{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}\}$ n-edfokú feltételnél — alá van rendelve az α függvénynek: $\mathfrak{B} \prec \alpha \underset{n}{|} \mathscr{R}$, akkor a $\mathfrak{B}$ alá van rendelve az $\alpha \vee \bar{\gamma}_1 \vee \ldots \vee \bar{\gamma}_l$ függvénynek is.*

A bizonyítás n szerinti indukció segítségével megy. Nyilvánvalóan, ha

$$\mathfrak{B} \prec \alpha \underset{1}{|} \left\{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}\right\}, \quad \text{akkor} \quad \mathfrak{B} \prec \alpha \vee \bar{\gamma}_1 \vee \ldots \vee \bar{\gamma}_l \underset{1}{|} A.$$

Legyen igaz a tétel n-nél nem magasabb fokú alárendeltség esetére és legyen $\mathfrak{B} \prec \alpha \underset{n+1}{|} \{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}\}$. Ez azt jelenti, hogy található olyan $\beta \underset{j}{\llcorner}$ logikai feltétel, hogy az a 02.11. definíció 1°, 2° és 3^1 követelményeit kielégíti. Akkor az indukciós feltevések szerint azon $\gamma \underset{k}{\llcorner}$ logikai feltételek, melyekre teljesül a (3_4), teljesítik a

$$\gamma \underset{k}{\llcorner} \prec \alpha \vee \bar{\gamma}_1 \vee \ldots \vee \bar{\gamma}_l \underset{m}{|} A \qquad (m \leqq n)$$

feltételt.

Ezenkívül minden $\gamma_i \underset{k_i}{\llcorner}$ $(1 \leqq i \leqq l)$ kielégíti a (3_3) alakú feltételt: $\bar{\gamma}_i \to \alpha \vee \bar{\gamma}_1 \vee \ldots \vee \bar{\gamma}_l$. Következésképpen, $\mathfrak{B} \prec \alpha \vee \bar{\gamma}_1 \vee \ldots \vee \bar{\gamma}_l \underset{n+1}{|} A$ stb. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

Szükségünk van még a következő lemmára.

2. 2. LEMMA. *Ha $\delta \underset{s}{\llcorner}$ logikai függvény valamely $\mathfrak{A}$ sémában — a $\{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}, \delta \underset{s}{\llcorner}\}$ n-edfokú feltételnél — alá van rendelve az α függvénynek, akkor minden, az α-t 0-ra változtató, stacionárius értékrendszer-sorozatra fennáll, hogy a $\delta \underset{s}{\llcorner}$ nem hajtható végre előbb, mint legalább egy a $\gamma_i \underset{k_i}{\llcorner}$ $(1 \leqq i \leqq l)$-k közül, és így $\delta \underset{s}{\llcorner} \prec \alpha \vee \varphi$, ahol*

$$\varphi \equiv \left(\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}\right)^{\otimes} \vee \ldots \vee \left(\gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}\right)^{\otimes}.$$

Bizonyítás. A (3) feltétel azt jelenti, hogy az $\mathfrak{A}$ sémában található olyan $\beta \underset{j}{\llcorner}$ logikai feltétel, hogy a 02. 12. definíció 1°, 2° és 3^1 alakú feltételei teljesülnek, ahol $\mathfrak{B}$-nek a $\delta \underset{s}{\llcorner}$-et, $\mathscr{R}$-nek a $\{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}, \delta \underset{s}{\llcorner}\}$-et vesszük.

Legyen $\gamma_1' \underset{t_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_m' \underset{t_m}{\llcorner}$ az összes olyan logikai feltétel, amelyek nem tesznek eleget a 02. 12. definíció (3_1)—(3_3) követelményei egyikének sem, és amelyek jobb félzárójelei a $[\beta \underset{j}{\llcorner}, \delta \underset{s}{\llcorner}]$ zárt intervallumban vannak. Akkor a (3_4) szerint minden $r(=1, 2, ..., m)$-re:

$$\gamma'_r \underset{t_r}{\llcorner} \prec \alpha \underset{n_r}{|} \left\{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, ..., \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}, \delta \underset{s}{\llcorner}\right\}.$$

Következésképpen, az 1. 2. lemma alapján az α-t 0-ra változtató stacionárius értékrendszer-sorozatokra a $\gamma'_r \underset{t_r}{\llcorner}$-k egyike sem hajtható végre előbb, mint a $\gamma_i \underset{k_i}{\llcorner}$ feltételek $(1 \leqq i \leqq l)$ vagy $\delta \underset{s}{\llcorner}$ közül legalább egy. Másrészt nyilvánvaló, hogy

$$\delta \underset{s}{\llcorner} \prec \alpha \underset{1}{|} \left\{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, ..., \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}, \delta \underset{s}{\llcorner}, \gamma'_1 \underset{t_1}{\llcorner}, ..., \gamma'_m \underset{t_m}{\llcorner}\right\},$$

ahonnan a 4. tulajdonság (l. 194. oldal) szerint következik, hogy

$$\delta \underset{s}{\llcorner} \prec \alpha \underset{1}{|} \left\{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, ..., \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}, \gamma'_1 \underset{t_1}{\llcorner}, ..., \gamma'_m \underset{t_m}{\llcorner}\right\}.$$

Az 1. 2. lemma értelmében mindez azt jelenti, hogy az említett sorozatokra a $\delta \underset{s}{\llcorner}$ logikai feltétel az $\mathfrak{A}$ sémában nem hajtható végre előbb, mint legalább egy a $\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, ..., \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}$ közül, azaz $\delta \underset{s}{\llcorner} \prec \alpha \vee \varphi$, amit bizonyítani kellett.

KÖVETKEZMÉNY. Ha minden $i(=1, 2, ..., l)$-re a $\gamma_i \underset{k_i}{\llcorner}$ logikai feltétel — a $\{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, ..., \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}\}$ n_i-ed fokú feltételnél — alá van rendelve α függvénynek: $\gamma_i \underset{k_i}{\llcorner} \prec \alpha \underset{n_i}{|} \{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, ..., \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}\}$, akkor: $\bar{\alpha} \to \bar{\varphi}$, ahol $\varphi \equiv (\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner})^{\otimes} \vee ... \vee (\gamma_l \underset{k_l}{\llcorner})^{\otimes}$.

Valóban, a 2. 2. lemma alapján minden, az α-t 0-ra változtató, stacionárius értékrendszer-sorozatra egyik $\gamma_i \underset{k_i}{\llcorner}$ $(1 \leqq i \leqq l)$ sem hajtható végre addig, amíg a megmaradó $\gamma_j \underset{k_j}{\llcorner}$ feltételek ($j \neq i$-nél) valamelyike végrehajtásra nem kerül, azaz ilyen sorozatra a $\gamma_i \underset{k_i}{\llcorner}$ feltételek $(i = 1, 2, ..., l)$ egyike sem hajtható végre, azaz $\bar{\alpha} \to \bar{\varphi}$.

Végül bebizonyítjuk, hogy bármely sémára az effektív alárendeltség fogalma ekvivalens az üres változáseloszlásnál vett alárendeltség fogalmával.

4. TÉTEL. *Minden sémában — üres változáseloszlásnál —, ha a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés az α függvénynek effektíven alá van rendelve, akkor $\mathfrak{B}$ egyszerűen alá van rendelve α függvénynek, és fordítva, ha $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés az α függvénynek alá van rendelve (üres változáseloszlásnál), akkor $\mathfrak{B}$ effektíven alá van rendelve az α-nak.*

1. Megmutatjuk, hogy ha $\mathfrak{B} \prec^{\circ} \alpha$, akkor $\mathfrak{B} \prec \alpha$.

Mivel abból, hogy $\mathfrak{B} \prec \alpha_1$ és $\mathfrak{B} \prec \alpha_2$ következik $\mathfrak{B} \prec \alpha_1 \cdot \alpha_2$, ezért elegendő csak a 02. 13. definíció I esetét vizsgálni. Az I, a) és I, b) esetek triviálisak. Álljon fenn az I, c) eset, azaz

$$\mathfrak{B} \prec \alpha \underset{n}{|} \left\{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, ..., \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}\right\}, \tag{4}$$

és minden $\gamma_i \underset{k_i}{\llcorner}$ kielégíti a

(5) $$\gamma_i \underset{k_i}{\llcorner} \prec \alpha \Big|_{n_i} \left\{\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}\right\}, \qquad (i=1,2,\ldots,l)$$

feltételt. Jelöljük φ-vel a $(\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner})^{\otimes} \vee \ldots \vee (\gamma_l \underset{k_l}{\llcorner})^{\otimes}$ diszjunkciót.

A (4)-ből az 1. 2. lemma miatt következik, hogy

(4^1) $$\bar{\alpha} \cdot \bar{\varphi} \rightarrow \overline{\mathfrak{B}}^{\otimes}.$$

(5)-ből a 2. 2. lemma alapján kapjuk, hogy $\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\varphi}$, azaz $\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\alpha}\bar{\varphi}$, és így (4^1) miatt $\bar{\alpha} \rightarrow \overline{\mathfrak{B}^{\otimes}}$, azaz $\mathfrak{B} \prec \alpha$.

2. Legyen az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k)$ sémában üres változáseloszlásnál a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés az $\alpha(p_1, \ldots, p_k)$ függvénynek alárendelve. Bizonyítjuk, hogy akkor $\mathfrak{B}$ effektíven alá van rendelve α függvénynek. Arra az esetre, amikor $\alpha \equiv 1$, az állítás triviális, ezért feltesszük, hogy $\alpha \not\equiv 1$. Legyen $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ a $p_1, \ldots, p_k$ változók összes olyan értékrendszere, amelyek az α függvényt 0-ra változtatják. Jelöljük α_i-vel $(i=1, \ldots, m)$ a $p_1, \ldots, p_k$ változók azon függvényét, amely a Δ_i értékrendszeren 0-val egyenlő, és 1 az összes többi esetben, azaz

$$\alpha_i(\Delta_j) = \begin{cases} 0, & \text{ha } j=i, \\ 1, & \text{ha } j \neq i. \end{cases}$$

Világos, hogy $\alpha \equiv \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_m$, ezért a 02. 13. II. pontját figyelembe véve elegendő bizonyítanunk, hogy $\mathfrak{B} \prec^{\circ} \alpha_i$ minden $i(=1,2,\ldots,m)$-re. Így rögzítsünk le egy tetszőleges i-t $(1 \leqq i \leqq m)$. Nyilvánvalóan $\mathfrak{B} \prec \alpha_i$, mivel $\alpha \rightarrow \alpha_i$.

Először megmutatjuk, hogy az $\mathfrak{A}$ sémában található olyan $\beta \underset{j}{\llcorner}$ logikai feltétel, hogy $\mathfrak{B}$-re és α_i-re vonatkozóan a 02. 12. definíció 1° és 2° feltételei teljesülnek, azaz $\mathfrak{B} \in O^{+}(\beta \underset{j}{\llcorner})$ és $\beta \rightarrow \alpha_i$. Tegyük fel az ellenkezőjét, azaz azt, hogy $\mathfrak{B}$ vagy nem tartozik egyetlen logikai feltétel hatástartománya egyenes részébe sem, vagy az összes $\beta_s \underset{j_s}{\llcorner}$ $(s=1,2,\ldots,t)$ logikai feltétel — amelyek hatástartománya egyenes részébe a $\mathfrak{B}$ beletartozik — olyan, hogy

(6) $$\beta_s \rightarrow \alpha_i \not\equiv 1, \quad \text{azaz} \quad \bar{\alpha}_i \cdot \beta_s \not\equiv 0 \qquad (s=1,2,\ldots,t).$$

Az első esetben, nyilvánvalóan, a $\mathfrak{B}$ bármely stacionárius értékrendszer-sorozatnál végrehajtásra kerül, de ez ellentmond annak, hogy $\mathfrak{B} \prec \alpha_i$ (mivel $\alpha_i \not\equiv 1$). A második esetben legyen $\beta_r \underset{j_r}{\llcorner}$ — a legbaloldalibb a $\beta_s \underset{j_s}{\llcorner}$ $(s=1,2,\ldots,t)$ logikai feltételek közül. Az α_i függvények definíciójából és a (6) feltételből következik, hogy $\alpha_i(\Delta_i)=0$, és minden $s(=1,2,\ldots,t)$-re $\beta_s(\Delta_i)=1$. Akkor, figyelembe véve $\mathfrak{B} \prec \alpha_i$-t, az $\mathfrak{A}$ séma — az értékrendszerek $\Delta_i, \Delta_i, \ldots, \Delta_i, \ldots$ stacionárius sorozatára tekintett — végrehajtásánál nem szükségszerű a $[\beta_r \underset{j_r}{\llcorner}, \mathfrak{B}]$ zárt intervallumba jutnunk, azaz az $\mathfrak{A}$ sémában kell hogy legyen olyan $\beta \underset{j}{\llcorner}$ logikai feltétel, amely hatástartományának egyenes részében tartalmazza $\beta_r \underset{j_r}{\llcorner}$-et és $\mathfrak{B}$-t, ami ellentmond az arról szóló feltevésünknek, hogy $\beta_r \underset{j_r}{\llcorner}$ — legbaloldalibb azon logikai feltételek közül, amelyek $\mathfrak{B}$-t hatástartományuk egyenes részében tartalmazzák. Ezért az $\mathfrak{A}$ sémában találhatók olyan $\beta\underset{j}{\llcorner}$ logikai feltételek, melyekre $\mathfrak{B}\in O^+(\beta\underset{j}{\llcorner})$ (1° feltétel) és $\beta\to\alpha$ (2° feltétel).

Kimutatjuk, hogy közülük legalább egyre, minden — a $[\beta\underset{j}{\llcorner}, \mathfrak{B}]$ zárt intervallumba tartozó — jobb félzárójel olyan $\gamma\underset{k}{\llcorner}$ logikai feltételhez tartozik, amely az alábbi követelmények (legalább) egyikét kielégíti: $\gamma\underset{k}{\llcorner}\in[\beta\underset{j}{\llcorner}, \mathfrak{B}]$ (3_1 feltétel), $\bar{\gamma}\to\alpha_i$ (3_3 feltétel) vagy

$$\gamma\underset{k}{\llcorner}\prec\alpha_i. \tag{7}$$

Tegyük fel az ellenkezőjét, azaz, hogy minden olyan $\beta\underset{j}{\llcorner}$-re, speciálisan a legjobboldalibbra is, amely az 1° és 2° feltételeknek eleget tesz, a $[\beta\underset{j}{\llcorner}, \mathfrak{B}]$ zárt intervallumban található olyan $\underset{k}{\lrcorner}$ jobb félzárójel, amely olyan $\gamma\underset{k}{\llcorner}$ logikai feltételhez tartozik, hogy 3_1, 3_3 és (7) követelmények egyikének sem tesz eleget. De a 3_3 és (7) feltételek nem teljesítése azt jelenti, hogy $\gamma(\Delta_i)=0$ és hogy a $\gamma\underset{k}{\llcorner}$ logikai feltétel az $\mathfrak{A}$ sémában a $\Delta_i, \Delta_i, \ldots, \Delta_i, \ldots$ sorozatnál végrehajtásra kerül, ezért erre a sorozatra a $\mathfrak{B}$ kifejezés is végrehajtásra kerül, ami ellentmond annak, hogy $\mathfrak{B}\prec\alpha_i$.

Így az $\mathfrak{A}$ sémában található olyan $\beta\underset{j}{\llcorner}$ logikai feltétel, hogy 1° és 2° feltételek teljesülnek rá, és minden — a $[\beta\underset{j}{\llcorner}, \mathfrak{B}]$ zárt intervallumban levő — jobb félzárójel olyan $\gamma\underset{k}{\llcorner}$ logikai feltételhez tartozik, amely a 3_1, 3_3 és (7) közül legalább az egyiket kielégíti. Legyen $\mathscr{R}^1=\left\{\gamma_1^1\underset{k_1^1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_{l_1}^1\underset{k_{l_1}^1}{\llcorner}\right\}$ — az összes olyan logikai feltételek halmaza, amelyek jobb félzárójelei a $[\beta\underset{j}{\llcorner}, \mathfrak{B}]$ zárt intervallumban vannak, és eleget tesznek a (7) követelménynek, azaz $\gamma_{r_1}^1\underset{k_{r_1}^1}{\llcorner}\prec\alpha_i$ ($r_1=1, 2, \ldots, l_1$). Világos, hogy $\mathfrak{B}\prec\alpha_i\underset{1}{|}\mathscr{R}^1$. Alkalmazva a $\gamma_{r_1}^1\underset{k_{r_1}^1}{\llcorner}$-$k$ ($r_1=1, 2, \ldots, l_1$) mindegyikére az összes olyan meggondolást, amelyeket a $\mathfrak{B}$-re vonatkozóan elvégeztünk, találunk olyan $\beta_{r_1}^1\underset{j_{r_1}^1}{\llcorner}$ — a $\gamma_{r_1}^1\underset{k_{r_1}^1}{\llcorner}$-re nézve az 1° és 2° alakú feltételeket kielégítő — logikai feltételeket, hogy minden — a $\left[\beta_{r_1}^1\underset{j_{r_1}^1}{\llcorner}, \gamma_{r_1}^1\underset{k_{r_1}^1}{\llcorner}\right]$ zárt intervallumban levő — jobb félzárójel olyan logikai feltételhez tartozik, amely (az α_i-re és a $\gamma_{r_1}^1\underset{k_{r_1}^1}{\llcorner}$-re vonatkozóan) a 3_1, 3_3 és (7) követelmények egyikét kielégíti. Legyen ezek közül $\mathscr{R}_{r_1}^2=\left\{\gamma_1^2\underset{k_1^2}{\llcorner}, \ldots, \gamma_{l_2}^2\underset{k_{l_2}^2}{\llcorner}\right\}$ — azoknak a halmaza, amelyek a (7) feltételt kielégítik, azaz $\gamma_{r_2}^2\underset{k_{r_2}^2}{\llcorner}\prec\alpha_i$ ($1\leqq r_2\leqq l_2$). Világos, hogy $\gamma_{r_1}^1\underset{k_{r_1}^1}{\llcorner}\prec\alpha_i\underset{1}{|}\mathscr{R}_{r_1}^2$ ($r_1=1, 2, \ldots, l_1$). Bevezetjük a következő jelölést:

$$\mathscr{R}^2=\bigcup_{r_1=1}^{l_1}\mathscr{R}_{r_1}^2.$$

Az $\mathcal{R}^2$ minden logikai feltételére hasonló meggondolást alkalmazva kapjuk az $\mathcal{R}^3$ halmazt stb. Jelöljük $\mathcal{R}_\nu$-vel a

$$\bigcup_{\lambda=1}^{\nu} \mathcal{R}^\lambda$$

sémát. Mivel a séma csak véges sok logikai feltételt tartalmaz, ezért van oly μ természetes szám, amelyre $\mathcal{R}_{\mu+1} = \mathcal{R}_\mu$. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{B} \prec \alpha_i \underset{1}{|} \mathcal{R}_\mu$, és minden $\mathcal{R}_\mu$-be tartozó logikai feltétel — az $\mathcal{R}_\mu$ elsőfokú feltételnél — α_i-nek alá van rendelve, azaz a $\mathfrak{B}$ effektíven alá van rendelve az α_i függvénynek. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

E tételből következik, hogy az $\mathfrak{A}$ sémában $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés végrehajtása első feltételét úgy is definiálhatjuk, mint a legerősebb olyan függvényt, amelynek $\mathfrak{B}$ effektíven alá van rendelve.[3]

Megjegyzés. Sok esetben az effektív alárendeltség egybeesik a nem üres változáseloszlásnál vett alárendeltséggel. Például, ha $\mathfrak{B} \prec \alpha \underset{1}{|} A$, és az 1°, 2°, 3° feltételt kielégítő $\beta \underset{j}{\llcorner}$ logikai feltételre fennáll a következő: a $(\beta \underset{j}{\llcorner}, \mathfrak{B})$ intervallumban nincsenek olyan operátorok, amelyeknek az adott változáseloszlás olyan logikai változók halmazát feleltetné meg, amelyektől az α lényegesen függ, — akkor ennél a változáseloszlásnál $\mathfrak{B} \prec \alpha$. Továbbá, ha a $\mathfrak{B} \prec \alpha \underset{n}{|} A$, és a $(\beta \underset{j}{\llcorner}, \mathfrak{B})$ intervallum eleget tesz a fenti követelménynek, akkor az adott változáseloszlásnál $\mathfrak{B}$ alá van rendelve α-nak, ha a 3^1 követelményben szereplő és a (3_1)—(3_3) feltételeket nem kielégítő $\gamma \underset{k}{\llcorner}$ logikai feltételek ennél a változáseloszlásnál — analóg módon — az α függvénynek alá vannak rendelve.

3. § MATRIX-SÉMÁK

1. Alapfogalmak

Algoritmusok logikai sémái nemcsak az operátorok végrehajtásának sorrendjét határozzák meg a logikai változók értékeitől függően, hanem a logikai feltételek végrehajtásának sorrendjét is. Ezen utóbbi információ gyakran feleslegesnek bizonyul, mint pl. az ekvivalencia problémák megoldásánál, amikor csak a végrehajtott operátorok halmaza érdekel bennünket. Másrészt algoritmusok sémái szintézisénél felmerül annak szükségessége, hogy felírjuk az operátorok végrehajtása függését a logikai változók értékeitől az algoritmusok sémái nyelvénél egyszerűbb nyelven. Jelen paragrafusban ilyen nyelvként a matrix-sémákat (m.-s.) használjuk, amelyek segítségével megoldjuk az algoritmusok sémái ekvivalenciájának problémáját és bizonyos más problémákat.

Legyen adva $A_1, \ldots, A_n$ operátorok valamely halmaza és $p_1, \ldots, p_k$ elemi logikai változók halmaza. Nyilvánvalóan, az $A_1, \ldots, A_n$ operátorok végrehajtása sor-

[3] α függvény akkor erősebb β függvénynél, ha $\alpha \to \beta$.

rendjének a $p_1, \ldots, p_k$ logikai változók értékeitől való tetszőleges függését[4] matrix alakjában lehet felírni:

$$(1) \qquad \begin{array}{c|c} & A_1 \ldots A_n \\ \hline A_0 & \alpha_{01} \ldots \alpha_{0n} \\ A_1 & \alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} \\ \vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n & \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nn}, \end{array}$$

ahol az $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(p_1, \ldots, p_k)$ kifejezések $(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ logikai függvények, amelyek kielégítik a következő feltételt: ha az $A_i (0 \leqq i \leqq n)$ operátor végrehajtása után az A_j operátort kell végrehajtani a Δ_s értékrendszernél, akkor $\alpha_{ij}(\Delta_s) = 1$ és $\alpha_{im}(\Delta_s) = 0$ $m \neq j$-re (megállapodunk, hogy A_0-on üres operátort értünk, amely az eljárás kezdetét jelöli). Például operátorok végrehajtásának azt a sorrendjét, amelyet $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$ algoritmus logikai sémája ad, felírhatjuk (1) alakú matrix segítségével, amelynek elemei a 2. § 02. 10-ben meghatározott α_{ij} függvények.

Ahhoz hasonlóan, mint ezt az algoritmusok logikai sémáinál tettük, az (1) alakú matrixokat különböző változáseloszlásoknál tekintjük.

Az (1) alakú matrix értékeinek és végrehajtása eljárásának alapfogalmait a következőképpen definiáljuk:

03. 1. Tekintsük az alábbi matrixot,

$$\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k) \equiv \begin{array}{c|c} & A_1\ A_2 \ldots A_n \\ \hline A_0 & \alpha_{01}\ \alpha_{02} \ldots \alpha_{0n} \\ A_1 & \alpha_{11}\ \alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ \vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n & \alpha_{n1}\ \alpha_{n2} \ldots \alpha_{nn}, \end{array}$$

— ahol α_{ij} — a $p_1, \ldots, p_k$ változók tetszőleges logikai függvényei, — és a $p_1, \ldots, p_k$ változók értékrendszereinek valamely sorozatát:

$$(2) \qquad \Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots .$$

[4] Ez azt jelenti, hogy az adott függvény $N(i, s) = j$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n+1;\ s = 1, 2, \ldots, 2^k)$ alakú, amely a $p_1, \ldots, p_k$ változók értékrendszereinek tetszőleges $\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \ldots$ sorozatához egyértelműen meghatározza az operátorok $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m} \ldots$ sorozatát a következő módon: $i_1 = N(0, s_1), \ldots, i_{m+1} = N(i_m, s_{m+1})$, — emellett, ha valamely l-re $i_l = n+1$, akkor az operátorok sorozata véges és $l-1$ tagot tartalmaz.

Megjegyezzük, hogy általában az algoritmusok logikai sémái megadják mind az operátorok, mind az üres ciklus végrehajtásának sorrendjét, amelyet azonban szintén operátornak tekintünk.

Nem tekintjük különbözőknek azokat a matrixokat, amelyek csak sorok és oszlopok elhelyezése sorrendjében különböznek, ezért matrixok sorainak és oszlopainak a bennük álló operátorok számát fogjuk tulajdonítani, függetlenül a matrixban való elhelyezésüktől.

Az $\mathfrak{A}$ matrix (2) sorozatra tekintett végrehajtásának eljárását a következőképpen definiáljuk:

Első lépés: megvizsgáljuk a Δ_{s_1} értékrendszernél a 0-adik sor α_{0j} $(j=1, \ldots, n)$ elemeinek értékét és kiírunk egyet, pl. A_{i_1}-et azon operátorok közül, amelyekre: $\alpha_{0i_1}(\Delta_{s_1})=1$ fennáll.

Tegyük fel, hogy m lépést elvégeztük, és az m-edik lépésben kiírtuk az A_{i_m} operátort; akkor az $(m+1)$-edik lépésben megvizsgáljuk az i_m-edik sor elemeinek értékeit $\Delta_{s_{m+1}}$ értékrendszernél, és kiírjuk azon $A_{i_{m+1}}$ operátort, amelyre $\alpha_{i_m i_{m+1}}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1$. Az eljárás megszakad, ha a tekintett sor összes elemeinek értéke 0, vagy ha a szükséges számú sor nincs a matrixban.

Ezen eljárás eredményeként kiírt operátorok $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}, \ldots$ sorozatát nevezzük *az* $\mathfrak{A}$ *matrix (2) sorozatra kapott értékének.*

Nyilvánvalóan, a matrix értéke lehet operátorok mind véges, mind végtelen, periodikus vagy nem periodikus sorozata.

Tekintsünk az (1) alakú matrixokat — amelyeket egyszerűen $\overline{A_i}|\overline{\alpha_{ij}}$ alakban fogunk írni — valamely változáseloszlásnál:

$$A_i - \mathfrak{W}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

03. 2. A

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots \tag{2}$$

értékrendszerek sorozatát az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k) \equiv \overline{A_i}|\overline{\alpha_{ij}}$ matrix számára megengedettnek nevezzük a (3) változáseloszlásnál, ha e sorozatra az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k)$ matrixnak van olyan

$$A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, \ldots$$

értéke, hogy bármely $m=(1,2,\ldots)$-re, amely ezen érték hosszát nem haladja még, a $\Delta_{s_{m+1}}$ értékrendszer csak $\mathfrak{W}_{i_m}$-beli változók értékeiben különbözik a Δ_{s_m} értékrendszertől.

Nyilvánvaló, hogy a $\Delta_s, \Delta_s, \ldots, \Delta_s, \ldots$ alakú stacionárius sorozatok megengedettek bármely $\overline{A_i}|\overline{\alpha_{ij}}$ matrix számára. Természetszerű a *matrix-séma* (m.-s.) következő definícióját adni:

03. 3. $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k)$ matrixot a (3) változáseloszlásnál matrix-sémának nevezzük, ha bármely megengedett sorozatra ennek a matrixnak csak egy értéke van (esetleg üres).

Ez a definíció nem effektív, ezért vele ekvivalens effektív definíciót adunk. Először definiálunk az A_i^* és A_i^{**} függvényekkel — amelyeket az 1. §-ban sémák számára definiáltunk — analóg függvényeket.

03. 4. Tekintsünk az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k) \equiv \overline{A_i}|\overline{\alpha_{ij}}$ matrix számára, (3) változáseloszlásnál a függvények következő rendszerét $(i=1, 2, \ldots, n)$:

$$\alpha_i^0 = \alpha_{0i}; \qquad \beta_i^0 = \max_{\mathfrak{W}_i} \alpha_i^0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_i^{\nu+1} = \alpha_i^\nu \vee \bigvee_{j=1}^{n} \beta_j^\nu \alpha_{ji}, \quad \beta_i^{\nu+1} = \max_{\mathfrak{W}_i} \alpha_i^{\nu+1},$$

ahol a maximumot $\mathfrak{W}_i$-beli változók értékeinek összes lehetséges sorozatai szerint vesszük.

Nyilvánvaló, hogy ν növekedésével az α_i^ν és β_i^ν függvények nem csökkenők, azaz

(4) $$\alpha_i^\nu \to \alpha_i^{\nu+1} \quad \text{és} \quad \beta_i^\nu \to \beta_i^{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Ezért található olyan μ, hogy minden $i(=1, 2, \ldots, n)$-re fennáll, és így

(5) $$\alpha_i^\mu \equiv \alpha_i^{\mu+1}$$

fennáll, és így $\beta_i^\mu \equiv \beta_i^{\mu+1}$. Az α_i^μ függvényeket, amelyek kielégítik az (5) feltételt, jelöljük $A_{i(\mathfrak{A})}^*$-val, vagy egyszerűen A_i^*-gal, a megfelelő β_i^μ függvényeket jelöljük A_i^{**}-gal, azaz

(6) $$A_i^{**} \equiv \max_{\mathfrak{W}_i} A_i^*.$$

Ezenkívül feltételezzük, hogy

$$A_0^* \equiv A_0^{**} \equiv 1.$$

Nyilvánvaló, hogy a definiált A_i^* és A_i^{**} függvények kielégítik a következő ekvivalenciákat:

(7) $$A_i^* \equiv \alpha_{0i} \vee \bigvee_{j=1}^{n} A_j^{**} \alpha_{ji} \equiv \bigvee_{j=0}^{n} A_j^{**} \alpha_{ji}.$$

Valóban, $\alpha_i^1 \equiv \alpha_{0i} \vee \bigvee_{j=1}^{n} \beta_j^0 \alpha_{ji}$. Tegyük fel, hogy $\alpha_i^\nu \equiv \alpha_{0i} \vee \bigvee_{j=1}^{n} \beta_j^{\nu-1} \alpha_{ji}$; akkor

$$\alpha_i^{\nu+1} \equiv \alpha_i^\nu \vee \bigvee_{j=1}^{n} \beta_j^\nu \alpha_{ji} \equiv \alpha_{0i} \vee \bigvee_{j=1}^{n} \beta_j^{\nu-1} \alpha_{ji} \vee \bigvee_{j=1}^{n} \beta_j^\nu \alpha_{ji} \equiv \alpha_{0i} \vee \bigvee_{j=1}^{n} \beta_j^\nu \alpha_{ji},$$

mivel (4)-et figyelembe véve: $\bigvee_{j=1}^{n} \beta_j^{\nu-1} \alpha_{ji} \to \bigvee_{j=1}^{n} \beta_j^\nu \alpha_{ji}$. $\nu = \mu$-nél kapjuk a kívánt eredményt.

Példa. Az

$$\mathfrak{A} = \begin{array}{c|ccc} & A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline A_0 & p_1 & \bar{p}_1 & 0 \\ A_1 & 0 & \bar{p}_1 & p_1 \\ A_2 & p_1 p_2 & \bar{p}_1 p_2 & \bar{p}_2 \\ A_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

matrixra az $A_1 - \{p_1\}$, $A_2 - \{p_2\}$, $A_3 - 0$ változáseloszlásnál kapjuk:

$$\begin{array}{llll} \alpha_1^0 \equiv p_1, & \beta_1^0 \equiv 1, & \alpha_1^1 \equiv p_1, & \beta_1^1 \equiv 1, \\ \alpha_2^0 \equiv \bar{p}_1, & \beta_2^0 \equiv \bar{p}_1, & \alpha_2^1 \equiv \bar{p}_1, & \beta_2^1 \equiv \bar{p}_1, \\ \alpha_3^0 \equiv 0, & \beta_3^0 \equiv 0, & \alpha_3^1 \equiv p_1 \vee \bar{p}_1 \bar{p}_2 \equiv p_1 \vee \bar{p}_2, & \beta_3^1 \equiv p_1 \vee \bar{p}_2, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha_1^2 \equiv p_1 \equiv A_1^*, & A_1^{**} \equiv 1, \\ \alpha_2^2 \equiv \bar{p}_1 \equiv A_2^*, & A_2^{**} \equiv \bar{p}_1, \\ \alpha_3^2 \equiv p_1 \vee \bar{p}_2 \equiv A_3^*, & A_3^{**} = p_1 \vee \bar{p}_2. \end{array}$$

Az $A_1-\{p_1\}$, $A_2-\{p_1,p_2\}$, A_3-0 változáseloszlásnál pedig:

$$\begin{array}{llllll}\alpha_1^0\equiv p_1, & \beta_1^0\equiv 1, & \alpha_1^1\equiv p_1, & \beta_1^1\equiv 1, & \alpha_1^2\equiv p_1\equiv A_1^*, & A_1^{**}\equiv 1,\\ \alpha_2^0\equiv \bar p_1, & \beta_2^0\equiv 1, & \alpha_2^1\equiv \bar p_1, & \beta_2^1\equiv 1, & \alpha_2^2\equiv \bar p_1\equiv A_2^*; & A_2^{**}\equiv 1,\\ \alpha_3^0\equiv 0. & \beta_3^0\equiv 0, & \alpha_3^1\equiv p_1\vee\bar p_2, & \beta_3^1\equiv p_1\vee\bar p_2, & \alpha_3^2\equiv p_1\vee\bar p_2\equiv A_3^*, & A_3^{**}\equiv p_1\vee\bar p_2.\end{array}$$

1.3. LEMMA. *Legyen a*

(2) $$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \dots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \dots$$

megengedett sorozatra (3) *változáseloszlásnál az* $\mathfrak{A}\equiv \overline{A_i}\,|\,\overline{\alpha_{ij}}$ *matrix értéke*

(8) $$A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, \dots .$$

Akkor $A_{i_m}^*(\Delta_{s_m})=1$, $A_{i_m}^{**}(\Delta_{s_{m+1}})=1$ *minden* $m(=1,2,\dots,)$*-re teljesül.*

Bizonyítás: Mivel $\alpha_{0i_1}(\Delta_{s_1})=1$, így $A_{i_1}^*(\Delta_{s_1})=1$. Tegyük fel, hogy $A_{i_m}^*(\Delta_{s_m})=1$, és bizonyítjuk, hogy akkor $A_{i_{m+1}}^*(\Delta_{s_{m+1}})=1$. Valóban, mivel $A_{i_m}^{**}(\Delta_{s_m})=1$ és $A_{i_m}^{**}$ nem függ a $\mathfrak{W}_{i_m}$-be tartozó változóktól, a (2) sorozat pedig megengedett, ezért $A_{i_m}^{**}(\Delta_{s_{m+1}})=1$. Emellett, a matrix értékének definíciója szerint $\alpha_{i_m i_{m+1}}(\Delta_{s_{m+1}})=1$. (7) miatt $A_{i_{m+1}}^*(\Delta_{s_{m+1}})$-be tartozik az $A_{i_m}^{**}(\Delta_{s_{m+1}})\alpha_{i_m i_{m+1}}(\Delta_{s_{m+1}})$ diszjunktív tag, amely egyenlő 1-gyel, következésképpen $A_{i_{m+1}}^*(\Delta_{s_{m+1}})=1$. Az is nyilvánvaló, hogy $A_{i_{m+1}}^{**}(\Delta_{s_{m+2}})=1$.

2. 3. LEMMA. *Ha az* $\mathfrak{A}\equiv \overline{A_i}\,|\,\overline{\alpha_{ij}}$ *matrixra a* (3) *változáseloszlásnál fennáll, hogy* $A_i^*(\Delta_s)=1$, *akkor létezik olyan*

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \dots \Delta_{s_m}, \Delta_s, \dots$$

megengedett sorozat, hogy Δ_s *értékrendszernél az* A_i *operátor végrehajtásra kerül (azaz található az* $\mathfrak{A}$ *matrixnak olyan értéke erre a sorozatra, amelyben az* $m+1$*-edik helyen az* A_i *operátor áll).*

Bizonyítás: Ha $A_i^*(\Delta_s)=1$, akkor van olyan ν, hogy $\alpha_i^\nu(\Delta_s)=1$, ezért elegendő a lemma állítását azon feltétel mellett bizonyítanunk, hogy valamilyen ν természetes számra:

$$\alpha_i^\nu(\Delta_s)=1.$$

1. Ha $\alpha_i^0(\Delta_s)=1$, akkor nyilvánvalóan a $\Delta_s, \Delta_s, \dots, \Delta_s, \dots$ sorozat a lemma állításának eleget tesz.

2. Legyen az állítás igaz arra az esetre, amikor $\alpha_j^\nu(\Delta_r)=1$ $(1\leqq j\leqq n;\ 1\leqq r\leqq 2^k;\ 1\leqq \nu\leqq\mu)$. Tegyük fel, hogy $\alpha_i^\nu(\Delta_s)=0$, $\alpha_i^{\nu+1}(\Delta_s)=1$. Akkor $\alpha_i^{\nu+1}$ definíciója szerint található olyan $j(1\leqq j\leqq n)$ hogy

(9) $$\beta_j^\nu(\Delta_s)=1,$$

és

(10) $$\alpha_{ji}(\Delta_s)=1.$$

A (9) feltétel azt jelenti, hogy van olyan — a Δ_s értékrendszertől csak a $\mathfrak{W}_j$-beli változók értékeiben különböző $-\Delta_{s'}$ értékrendszer, hogy $\alpha_j^\nu(\Delta_{s'})=1$. Feltevésünk szerint ez azt jelenti, hogy létezik olyan

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \dots, \Delta_{s'}, \dots$$

megengedett sorozat, hogy a $\Delta_{s'}$ értékrendszernél az A_j operátor végrehajtásra kerül. Akkor (10)-et figyelembe véve:

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s'}, \Delta_s, \ldots$$

lesz a keresett megengedett sorozat, — amit bizonyítani kellett.

A matrix-sémák effektív definícióját adja a következő tétel.

5. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{A} \equiv \overline{A_i} \,|\, \overline{\alpha_{ij}}$ *matrix adott változáseloszlásnál* (3) *matrix-séma legyen, szükséges és elegendő, hogy minden* $i(=0, 1, 2, \ldots, n)$*-re teljesüljenek a következő feltételek:*

$$(11) \qquad A_i^{**} \to (\alpha_{ij} \to \bar{\alpha}_{il}) j \neq l\text{-nél} \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Bizonyítás. Szükségesség. Ha $A_i^{**}(\Delta_s) = 1$, akkor van olyan — a Δ_s-től csak $\mathfrak{W}_i$-beli változók értékeiben különböző — $\Delta_{s'}$ értékrendszer, hogy $A_i^*(\Delta_{s'}) = 1$. Akkor a 2.3. lemma szerint olyan van

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s'}, \ldots$$

megengedett sorozat, hogy $\Delta_{s'}$ értékrendszernél A_i operátor végrehajtásra kerül. Mivel a Δ_s értékrendszer a $\Delta_{s'}$ értékrendszertől csak $\mathfrak{W}_i$-be tartozó változók értékeiben különbözik, így a

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s'}, \Delta_s, \Delta_s, \ldots$$

sorozat szintén megengedett. De akkor az A_i operátor végrehajtása után az $\mathfrak{A}$ mátrix végrehajtási eljárása folytatásának egyértelműségéhez szükséges, hogy bármely $j, l(=1, 2, \ldots, n;\ j \neq l)$-re teljesüljenek az

$$\alpha_{ij}(\Delta_s) \to \bar{\alpha}_{il}(\Delta_s)$$

feltételek, ahonnan következik a (11).

Elegendőség. Legyen a

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots$$

sorozat megengedett az $\mathfrak{A}$ matrixra és teljesüljön (11). Mivel $\alpha_{0j} \to \bar{\alpha}_{0l}$ $j \neq l$-nél (mert $A_0^{**} \equiv 1$), ezért az $\mathfrak{A}$ matrix bármely értékének első operátora egyértelműen meghatározott. Legyen az első m egyértelműen meghatározott operátor: $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$. Az 1. 3. lemma miatt $A_{i_m}^{**}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1$, és következésképpen:

$$\alpha_{i_m j}(\Delta_{s_{m+1}}) \to \bar{\alpha}_{i_m l}(\Delta_{s_{m+1}}) \qquad (j \neq l;\ j, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Ez azonban azt jelenti, hogy az $(m+1)$-edik végrehajtásra kerülő operátor is egyértelműen meghatározott. A tételt bizonyítottuk.

2. Matrix-sémák ekvivalenciájának kritériumai

03. 5. Az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k)$ és a $\mathfrak{B}(p_1, \ldots, p_k)$ matrix-sémát *ekvivalensnek* nevezzük adott változáseloszlásnál, — és ezt $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$-vel jelöljük —, ha az értékrendszerek bármely — ennél a változáseloszlásnál $\mathfrak{A}$-ra vagy $\mathfrak{B}$-re megengedett — sorozatánál értékeik egybeesnek.

Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy a tekintett matrix-sémák az operátorok ugyanazon halmazával rendelkeznek, mivel minden matrixot kiegészíthetünk csak 0-kat tartalmazó sorokkal és oszlopokkal, ettől értéke nem változik meg.

A következő tétel a matrix-sémák ekvivalenciájának effektív kritériumát adja adott változáseloszlásnál.

6. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az*

$$\mathfrak{A} \equiv \begin{array}{c|c} & A_1 \ldots A_n \\ \hline A_0 & \alpha_{01} \ldots \alpha_{0n} \\ A_1 & \alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} \\ \vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n & \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nn} \end{array} \quad \text{és} \quad \mathfrak{B} \equiv \begin{array}{c|c} & A_1 \ldots A_n \\ \hline A_0 & \beta_{01} \ldots \beta_{0n} \\ A_1 & \beta_{11} \ldots \beta_{1n} \\ \vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n & \beta_{n1} \ldots \beta_{nn} \end{array}$$

matrix-sémák adott változáseloszlásnál (3) *ekvivalensek legyenek, szükséges és elegendő hogy minden $i(=0, 1, \ldots, n)$-re teljesüljenek a következő feltételek:*

1°. $A_{i\,(\mathfrak{A})}^{**} \equiv A_{i\,(\mathfrak{B})}^{**}$.

2°. $A_i^{**} \to (\alpha_{ij} \equiv \beta_{ij}), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$

Bizonyítás. Szükségesség. Ha

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \tag{12}$$

akkor a 2. 3. és az 1. 3. lemma szerint $A_{i(\mathfrak{A})}^{*} \equiv A_{i(\mathfrak{B})}^{*}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, tehát $A_{i(\mathfrak{A})}^{**} \equiv A_{i(\mathfrak{B})}^{**}$. Legyen

$$A_i^{**}(\Delta_s) = 1. \tag{13}$$

Kimutatjuk, hogy akkor $\alpha_{ij}(\Delta_s) = \beta_{ij}(\Delta_s)$ minden $j(=1, 2, \ldots, n)$-re. A szimmetria miatt elegendő azt bizonyítani, hogy ha $\alpha_{ij}(\Delta_s) = 1$, akkor $\beta_{ij}(\Delta_s) = 1$. A (13)-ból következik, hogy van olyan — a Δ_s-től csak $\mathfrak{W}_i$-be tartozó változók értékeiben különböző — Δ_{s_m} értékrendszer, hogy $A_i^*(\Delta_{s_m}) = 1$. A 2. 3. lemma értelmében ekkor található olyan

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_s, \ldots$$

megengedett sorozat, hogy Δ_{s_m} értékrendszernél $\mathfrak{A}$-ban és $\mathfrak{B}$-ben is ((12)-t figyelembe véve) az A_i operátor végrehajtásra kerül. Mivel $\alpha_{ij}(\Delta_s) = 1$, ezért a Δ_s értékrendszernél mindkét matrix-sémában végrehajtásra kerül az A_j operátor, azaz $\beta_{ij}(\Delta_s) = 1$. A szükségességet ezzel bizonyítottuk.

Elégségesség. Legyen a tetszőleges, — $\mathfrak{A}$-ra megengedett —

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots$$

sorozatra az $\mathfrak{A}$ és a $\mathfrak{B}$ matrix-sémák értéke

(14) $$A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, \ldots$$
és
(15) $$A_{i'_1}, A_{i'_2}, \ldots, A_{i'_m}, A_{i'_{m+1}}, \ldots.$$

A 2° feltételt figyelembe véve, $i'_1 = i_1$. Tegyük fel, hogy $i'_m = i_m$. Az 1. 3. lemma értelmében $A^{**}_{i_m(\mathfrak{A})}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1$, következésképpen 1° miatt

(16) $$A^{**}_{i_m(\mathfrak{B})}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1.$$

A matrix értékének definíciója szerint (14)-ből következik, hogy $\alpha_{i_m i_{m+1}}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1$, ezért (11)-et tekintve (5. tétel) $\alpha_{i_m j}(\Delta_{s_{m+1}}) = 0, j \neq i_{m+1}$-nél. Ekkor (16) és 2° figyelembevételével

$$\beta_{i_m i_{m+1}}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1, \quad \beta_{i_m j}(\Delta_{s_{m+1}}) = 0 \qquad (j \neq i_{m+1}).$$

(15)-ből azonban következik, hogy $\beta_{i_m i'_{m+1}}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1$, ezért $i'_{m+1} = i_{m+1}$, azaz a (14) és a (15) ér tékek egybeesnek. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

3. A matrix-sémák azonos átalakításai

03. 6. Az α függvény Π_φ-átalakításának nevezünk minden olyan $\Pi_\varphi(\alpha) = \alpha'$ alakú átalakítást, ahol α' kielégíti a $\varphi \to (\alpha' \equiv \alpha)$ feltételt (azaz α' egybeesik α-val azokon az értékrendszereken, amelyeken $\varphi = 1$).

Az $\mathfrak{A} \equiv \overline{A_i}|\overline{\alpha_{ij}}$ matrix Π^i_φ-átalakításának nevezzük az i-edik sora tetszőleges α_{ij} elemének az $\alpha'_{ij} \equiv \Pi_\varphi(\alpha_{ij})$ függvénnyel való helyettesítését.

Nyilvánvalóan az $\mathfrak{A} \equiv \overline{A_i}|\overline{\alpha_{ij}}$ matrix A_i^{**} függvényei invarinásak a $\Pi^j_{A_j^{**}}$-átalakításokkal szemben. Valóban, ha valamely Δ_s értékrendszerre $A_j^{**}(\Delta_s) = 0$, akkor a (7) ekvivalencia jobb oldalán álló $A_j^{**}\alpha_{ij}$ konjunkció a Δ_s értékrendszernél 0-val egyenlő, függtelenül az α_{ij} függvény értékétől. Ha pedig $A_j^{**}(\Delta_s) = 1$, akkor $\alpha'_{ji}(\Delta_s) = = \alpha_{ji}(\Delta_s)$. Következésképpen az A_i^* függvények és így az A_i^{**} függvények ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) nem változnak a $\Pi^j_{A_j^{**}}$-átalakítások során. Innen és a 6. tételből következik a

7. TÉTEL. *A $\Pi^i_{A_i^{**}}$-átalakítások bármely matrix-sémát vele ekvivalensbe visznek át, és fordítva, minden — az adottal ekvivalens — matrix-séma megkapható az adott matrix-sémából $\Pi^i_{A_i^{**}}$-átalakítások segítségével, továbbá olyan sorok és oszlopok hozzávételével és törlésével, amelyek minden eleme azonosan* 0 (l. az 4. lábjegyzetet).

A Π_φ-átalakítások használhatóbb alakját adjuk meg.

03. 7. Az $\alpha' = \alpha \cdot \varphi$ és $\alpha' = \alpha \vee \bar{\varphi}$ alakú átalakításokat az α függvény — φ függvénnyel végzett — &- és $\vee$-átalakításainak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy a φ függvénnyel végzett &- és $\vee$-átalakítások Π_φ-átalakítások. Igaz a fordított állítás is:

3. 3. LEMMA. *Minden Π_φ-átalakítás ($\alpha' = \Pi_\varphi(\alpha)$) előállítható, mint egy — φ_1 függvénnyel végzett — &-átalakítás és egy — φ_2 függvénnyel végzett — $\vee$-átalakítás egymásutáni végrehajtása* (azaz $\alpha' = \alpha\varphi_1 \vee \bar{\varphi}_2$), *ahol φ_1 és φ_2 gyengébb φ-nél (azaz kielégítik a $\varphi \to \varphi_1$ és $\varphi \to \varphi_2$ feltételeket).*

Bizonyítás. α' tegyen eleget a $\varphi \to (\alpha' \equiv \alpha)$ feltételnek. φ_1-nek válasszuk azt a függvényt, amely az argumentumoknak azokon és csak azokon az értékrendszerein egyenlő 1-gyel, amelyeken α' és α egybeesnek. Világos, hogy $\varphi \to \varphi_1$, mivel minden olyan értékrendszeren, amelyen $\varphi = 1$, α és α' értékek egybeesnek. Alkalmazva α-ra a — φ_1 függvénnyel végzett — &-átalakítást, kapjuk az $\alpha'' = \alpha\varphi_1$ függvényt, amely α'-vel egybeesik minden olyan értékrendszeren, amelyen α' egybeesik α-val és még azokon az értékrendszerken, ahol $\alpha = 1$, $\alpha' = 0$ (mivel ilyen értékrendszereken $\varphi_1 = 0$). Következésképpen α'' az α'-től csak olyan értékrendszereken különbözik, ahol $\alpha = 0$ és $\alpha' = 1$. Válasszuk φ_2-nek azt a függvényt, amely ezeken és csak ezeken az értékrendszereken 0-val egyenlő. Világos, hogy $\varphi \to \varphi_2$. Könnyű meggyőződni arról, hogy az α'' függvényre alkalmazva a φ_2 függvénnyel végzett $\vee$-átalakítást, az α' függvényt kapjuk, amit bizonyítani kellett.

Ily módon, a 7. tételből következik:

7'. TÉTEL. *Az $\overline{A_i | \alpha_{ij}}$ matrix-sémákat α_{ij} elemei — az A_i^{**}-nál gyengébb függvényekkel végzett — &- és $\vee$-átalakításai ekvivalens matrix-sémákba viszik át, és fordítva, minden — az adottal ekvivalens — matrix-séma megkapható abból elemeinek — A_i^{**}-nál gyengébb függvényekkel végzett — &- és $\vee$-átalakításaival (és 0-kból álló sorok és oszlopok hozzávételével vagy törlésével).*

4. Matrix-sémák redukált alakja és a legegyszerűbb szintézisfeladat

03. 8. Az $\overline{A_i | \alpha_{ij}}$ matrixot akkor nevezzük *teljesnek*, ha minden i ($=0, 1, \ldots, n$)-re

$$A_i^{**} \to \bigvee_j \alpha_{ij}, \tag{17}$$

és *ortogonálisnak*, ha minden sora elemeinek halmaza ortogonális.

Normálisnak nevezzük az ortogonális és teljes matrixokat.

Világos, hogy minden ortogonális matrix matrix-sémává lesz tetszőleges változáseloszlásnál. Könnyű kimutatni, hogy minden $\mathfrak{A} \equiv \overline{A_i | \alpha_{ij}}$ matrix-sémához létezik vele ekvivalens ortogonális matrix-séma. Valóban, az 5. tételből következik, hogy a

$$\mathfrak{B} \equiv \overline{A_i | (A_i^{**} \alpha_{ij})} \tag{18}$$

matrix ortogonális.

Megmutatjuk, hogy a 6. tétel feltételei teljesülnek. Nyilvánvalóan $\alpha^0_{i(\mathfrak{B})} \equiv \equiv \alpha^0_{i(\mathfrak{A})}$. Tegyük fel, hogy $\alpha^\nu_{i(\mathfrak{B})} \equiv \alpha^\nu_{i(\mathfrak{A})}$ és következésképpen $\beta^\nu_{i(\mathfrak{B})} \equiv \beta^\nu_{i(\mathfrak{A})}$. Akkor

$$\alpha^{\nu+1}_{i(\mathfrak{B})} \equiv \alpha^\nu_{i(\mathfrak{B})} \vee \bigvee_{j=1}^{n} \beta^\nu_{j(\mathfrak{B})} A^{**}_{j(\mathfrak{A})} \alpha_{ji} \equiv \alpha^\nu_{i(\mathfrak{A})} \vee \bigvee_{j=1}^{n} \beta^\nu_{j(\mathfrak{A})} \alpha_{ji} \equiv \alpha^{\nu+1}_{i(\mathfrak{A})},$$

mivel (4) szerint $\beta^{\nu}_{j(\mathfrak{A})} \to A^{**}_{j(\mathfrak{A})}$. Ily módon $A^{*}_{i(\mathfrak{A})} \equiv A^{*}_{i(\mathfrak{B})}$. A 6. tétel 2° feltételének teljesülése nyilvánvaló. Következésképpen, az $\mathfrak{A}$ és a $\mathfrak{B}$ matrix-sémák ekvivalensek.

A (18) alakú matrixokat *redukáltaknak* nevezzük.

Az elmondottakból és az 5. tételből következik, hogy valamely matrix akkor és csak akkor matrix-séma, ha redukált alakja ortogonális.

Megjegyzünk a redukált matrixoknak egy fontos tulajdonságát. Mivel az $\overline{A_i}|\overline{\alpha'_{ij}}$ redukált matrix minden α'_{ij} eleme kielégíti az $\alpha'_{ij} \to A^{**}_i$ feltételt, a (7) formulából a redukált matrixokra érvényes:

$$A^{*}_i \equiv \bigvee_j \alpha'_{ji} \tag{7'}$$

és következésképpen,

$$A^{**}_i \equiv \bigvee_j \max_{\mathfrak{W}_i} \alpha'_{ji}. \tag{7''}$$

A matrix-sémák és algoritmusok logikai sémái közötti összefüggések megállapításához (1) alakú matrixok helyett olyan matrixokat tekintünk, amelyeknél valamely oszlopban az operátor helyén az üres periódus szimbóluma[6] vagy az eljárás végének szimbóluma a „pont" áll. Ez lehetőséget ad arra, hogy csak *teljes* matrix-sémákat vizsgáljunk. Valóban, minden matrix-sémára (1) a

$$\begin{array}{c|ccc}
 & A_1 \;\ldots\; A_n & & . \\
\hline
A_0 & \alpha_{01} \;\ldots\; \alpha_{0n} & & \alpha_{0,n+1} \\
A_1 & \alpha_{11} \;\ldots\; \alpha_{1n} & & \alpha_{1,n+1} \\
\vdots & . \;\ldots\; . & & . \\
A_n & \alpha_{n1} \;\ldots\; \alpha_{nn} & & \alpha_{n,n+1}
\end{array}$$

matrix — ahol $\alpha_{i,n+1} \equiv \mathop{\&}\limits_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_{ij}$ $(i=0, 1, \ldots, n)$, — teljes és ekvivalens (1) matrix-sémánál bármely változáseloszlásnál.

Világos, hogy a redukált teljes matrix-séma normális[7] és kielégíti a következő feltételt: minden i $(=0, 1, \ldots, n)$-re:

$$\bigvee_j \alpha_{ij} \equiv A^{**}_i, \tag{19}$$

mivel a redukált matrix-sémákra $\alpha_{ij} \to A^{**}_i$.

Ily módon, minden matrix-sémához — adott változáseloszlásnál — egyetlen vele ekvivalens normális redukált matrix-séma tartozik[8] (ez a 6. tételből és a redukált matrix-séma definíciójából következik).

03. 9. Azt mondjuk, hogy az $\overline{A_i}|\overline{\alpha_{ij}(p_1, \ldots, p_k)}$ matrix-séma és az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$, „algoritmus logikai sémája" *ekvivalens* adott változáseloszlásnál, ha a $p_1, \ldots, p_k$ változók értékrendszerei bármely — ennél a változáseloszlásnál $\overline{A_i}|\overline{\alpha_{ij}}$-re vagy $\mathfrak{A}$-ra megengedett — sorozatára értékeik egybeesnek.

[6] L. a 4. lábjegyzetet.
[7] Ha a 0-elemekből álló sorokat töröljük.
[8] A csak 0-kat tartalmazó oszlopok pontosságával.

Ha az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$ „algoritmus logikai sémája” adott, akkor a

$$(20)\qquad \begin{array}{c|cccc} & A_1 \ldots A_n & ( ) & \cdot & \\ \hline A_0 & \alpha_{01} \ldots \alpha_{0n} & \alpha_{0,n+1} & \alpha_{0,n+2} & \\ A_1 & \alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} & \alpha_{1,n+1} & \alpha_{1,n+2} & \\ \vdots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \\ A_n & \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nn} & \alpha_{n,n+1} & \alpha_{n,n+2} & \end{array}$$

matrix, — ahol α_{ij} $(i=0, 1, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, n+2)$ a 2. §-ban (02. 10) definiált függvény, — nyilvánvalóan ekvivalens $\mathfrak{A}$-val adott változáseloszlásnál. Emellett világos, hogy a (20) matrix normális.

Vannak az „algoritmus adott sémájával” ekvivalens matrix-sémák felépítésének egyszerűbb módszerei, amelyekhez nincs szükség az α_{ij} és így az A_i^{**} függvények megadására. Így például, ha az α'_{ij} függvényeket az α_{ij} függvényekhez hasonlóan definiáljuk, de azzal a különbséggel, hogy az $\hat{\mathfrak{A}}_i$ sémák (l. 02. 10.) helyett vesszük az $\mathfrak{A}'_i \equiv 0 \underset{s}{\llcorner}\ \mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_i \underset{s}{\lrcorner}, \ldots, A_n)$ sémákat, akkor az $\overline{A_i \,|\, \alpha'_{ij}}$ matrix-séma ekvivalens lesz az $\mathfrak{A}$ sémával bármely változáseloszlásnál.

Felmerül a fordított feladat: keresni olyan algoritmust, amely adott matrix-sémában megadná a vele ekvivalens „algoritmus logikai sémáját”. E feladatnak szintén triviális megoldása van. Valóban, tekintsük a (20) alakú matrixot, amely adott változáseloszlásnál (3) szerinti teljes matrix-séma. Könnyű meggyőződni arról, hogy az

$$\bar{\alpha}_{01} \underset{01}{\llcorner} \ldots \bar{\alpha}_{0,n+2} \underset{0,n+2}{\llcorner} \underset{01}{\lrcorner} \ldots \underset{n1}{\lrcorner} A_1 \bar{\alpha}_{11} \underset{11}{\llcorner} \ldots \bar{\alpha}_{1,n+2} \underset{1,n+2}{\llcorner} \underset{02}{\lrcorner} \ldots \underset{n2}{\lrcorner} A_2 \ldots$$

$$\ldots A_n \bar{\alpha}_{n1} \underset{n1}{\llcorner} \ldots \bar{\alpha}_{n,n+2} \underset{n,n+2}{\llcorner} \underset{0,n+1}{\lrcorner} \ldots \underset{n,n+1}{\lrcorner} \underset{\eta}{\lrcorner} 0 \underset{\eta}{\llcorner} \underset{0,n+2}{\lrcorner} \ldots \underset{n,n+2}{\lrcorner}$$

algoritmus-séma adott változáseloszlásnál ekvivalens a (20) matrix-sémával.

Példa. Tekintsük univerzális változáseloszlásnál a következő matrix-sémát:

$$\begin{array}{c|cccc} & A_1 & A_2 & ( ) & \cdot \\ \hline A_0 & p_1 & \bar{p}_1 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & \bar{p}_1 & 0 & p_1 \\ A_2 & p_1 \cdot p_2 & \bar{p}_1 \cdot p_2 & 0 & \bar{p}_2 \end{array}$$

A fenti módon kapott, vele ekvivalens „algoritmus logikai sémája” a következő alakú lesz:

$$\mathfrak{A} \equiv \bar{p}_1 \underset{1}{\llcorner} p_1 \underset{2}{\llcorner} \underset{1}{\lrcorner} \underset{5}{\lrcorner} A_1 p_1 \underset{3}{\llcorner} \bar{p}_1 \underset{4}{\llcorner} \underset{2}{\lrcorner} \underset{6}{\lrcorner} \underset{3}{\lrcorner} A_2 \bar{p}_1 \vee \bar{p}_2 \underset{5}{\llcorner} p_1 \vee \bar{p}_2 \underset{6}{\llcorner} p_2 \underset{7}{\llcorner} \underset{7}{\lrcorner} \underset{4}{\lrcorner};\ ^{9})$$

[9] Itt mellőztük az 1-gyel azonosan egyenlő függvényekkel álló logikai feltételeket, a bal félzárójeleket pedig keletkezésük sorrendjében számoztuk meg.

átalakítások után kapjuk:

$$\mathfrak{A}=p_1\underset{2}{\llcorner}\,\underset{5}{\lrcorner}A_1\bar{p}_1\underset{4}{\llcorner}\,\underset{2}{\lrcorner}\,\underset{6}{\lrcorner}A_2p_2\underset{7}{\llcorner}\bar{p}_1\underset{5}{\llcorner}\,\underset{7}{\lrcorner}p_2\underset{8}{\llcorner}p_1\underset{6}{\llcorner}\,\underset{8}{\lrcorner}\,\underset{4}{\lrcorner}=$$

$$=\underset{5}{\lrcorner}p_1\underset{2}{\llcorner}A_1\bar{p}_1\underset{4}{\llcorner}\,\underset{2}{\lrcorner}\,\underset{6}{\lrcorner}A_2p_2\underset{7}{\llcorner}\bar{p}_1\underset{5}{\llcorner}p_1\underset{6}{\llcorner}\,\underset{7}{\lrcorner}\,\underset{4}{\lrcorner}=$$

$$=\underset{5}{\lrcorner}\,\underset{6}{\lrcorner}p_1\underset{2}{\llcorner}A_1\bar{p}_1\underset{4}{\llcorner}\,\underset{2}{\lrcorner}A_2p_2\underset{7}{\llcorner}\bar{p}_1\underset{5}{\llcorner}0\underset{6}{\llcorner}\,\underset{7}{\lrcorner}\,\underset{4}{\lrcorner}=$$

$$=\underset{6}{\lrcorner}p_1\underset{2}{\llcorner}A_1\bar{p}_1\underset{4}{\llcorner}\,\underset{2}{\lrcorner}A_2p_2\underset{7}{\llcorner}\bar{p}_1\underset{5}{\llcorner}\,\underset{5}{\lrcorner}0\underset{6}{\llcorner}\,\underset{7}{\lrcorner}\,\underset{4}{\lrcorner}=$$

$$=\underset{6}{\lrcorner}p_1\underset{2}{\llcorner}A_1\bar{p}_1\underset{4}{\llcorner}\,\underset{2}{\lrcorner}A_2\bar{p}_2\underset{6}{\llcorner}\,\underset{4}{\lrcorner}.$$

Gyakorlati szempontból nagy jelentősége van a legutóbbi feladat ilyen megoldásainak, amelyek egyszerre adnak minimális (például a betűk számát tekintve) vagy azokhoz közeli algoritmus-sémákat. Azonban e feladatok megoldásánál ugyanolyan jellegű nehézségek lépnek fel, mint kontakt-sémák szintézisének feladataiban.

5. Sémák ekvialenciájának problémái meghatározó összefüggések esetén

Az algoritmusok logikai sémái és a matrix-sémák közötti — a 4. pontban megállapított — kapcsolat lehetővé teszi, hogy egy fogalomba egyesítsük őket, — a *séma* fogalmába. Emellett az adott sémával ekvivalens normális redukált matrix-sémát e séma *matrix-alakjának* nevezzük.

Eddig olyan sémákat vizsgáltunk, amelyekben az operátorok között semmiféle kapcsolat nem volt. Általában a sémában előforduló $A_1, \ldots, A_n$ operátorok kielégíthetnek

(21) $$A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_s}=A_{j_1}A_{j_2}\ldots A_{j_t}$$

alakú szimmetrikus összefüggéseket.

Speciálisan, ha ugyanaz az operátor többször előfordul a sémában, akkor felmerülnek az

(22) $$A_i=A_j$$

alakú összefüggések.

Pontosan megfogalmazzuk sémák ekvivalenciájának fogalmát (21) alakú összefüggések rendszere esetén.

A (21) alakú meghatározó összefüggések rendszere definiál bizonyos $\mathfrak{U}$ asszociatív rendszert az $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ábécében (l. [1]), amely maga után vonja szavak ekvivalenciájának fogalmát ebben az ábécében.

Kiterjesztjük ezeket a fogalmakat végtelen hosszúságú szavak vizsgálatára is. A sémák ekvivalenciája fogalmát ekkor természetes módon így határozzuk meg:

03. 10. Az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k,\ A_1, \ldots, A_n)$ és $\mathfrak{B}(p_1, \ldots, p_k,\ A_1, \ldots, A_n)$ sémákat (adott változáselosztásnál) ekvivalenseknek nevezzük a (21) alakú meghatározó összefüggések rendszerénél, ha bármely — az $\mathfrak{A}$-ra vagy $\mathfrak{B}$-re megengedett — sorozatnál értékeik ekvivalensek az $\mathfrak{U}$ asszociatív rendszerben.

Sémák ekvivalenciájának ezzel a definícióval kapcsolatos problémájában jelentkeznek olyan nehézségek, amelyek asszociatív rendszerekben szavak ekvivalenciájának problémájával kapcsolatosak. Például, ha a meghatározó összefüggések rendszere olyan, hogy a megfelelő asszociatív rendszerben az ekvivalencia probléma megoldhatatlan az üres szóhoz, akkor sémák ekvivalenciájának problémája e meghatározó összefüggéseknél megoldhatatlan.

A legegyszerűbb, de fontos olyan eset, amely meghatározó összefüggésekre vezet az, amikor valamely operátor többszörösen előfordul a sémában. Ez az eset nyilvánvalóan a (22) alakú meghatározó összefüggésekkel írható le.

Jelen munkában az egyszerűség kedvéért egy (22) alakú meghatározó összefüggés vizsgálatára korlátozódunk, miközben az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $i=1$, $j=2$. Emellett feltételezzük, hogy az $A_1=A_2$ összefüggés a változáselosztásra is megfelelő feltételt ad, nevezetesen csak olyan $A_i-\mathfrak{W}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ változáselosztásokat vizsgálunk, ahol $\mathfrak{W}_1=\mathfrak{W}_2$. Nem jelent komoly nehézséget az alábbi vizsgálatok kiterjesztése több — (22) alakú — meghatározó összefüggés esetére.

Először megvizsgáljuk az $\mathfrak{A}(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$ séma valamely $\mathfrak{B}(A_1, A_3, \ldots, A_n)$ „ismétlés nélküli" sémával (amely az A_2 operátort nem tartalmazza) való ekvivalenciájának problémáját az $A_1=A_2$ feltételnél. Legyen az $\mathfrak{A}$ séma matrixalakja:

$$\mathfrak{A}'\equiv\begin{array}{c|cccc} & A_1 & A_2 \ldots & A_n & \cdot \\ \hline A_0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} \ldots & \alpha_{0n} & \alpha_{0,n+1} \\ A_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots & \alpha_{1n} & \alpha_{1,n+1} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots & \alpha_{nn} & \alpha_{n,n+1} \end{array}$$

Ekkor érvényes a következő tétel:

8. TÉTEL. *Ha minden* $j(=3, 4, \ldots, n+1)$ *esetén*

$$A^{**}_{1(\mathfrak{A}')}A^{**}_{2(\mathfrak{A}')}\rightarrow(\alpha_{1j}\equiv\alpha_{2j}) \text{ és } A^{**}_{1(\mathfrak{A}')}A^{**}_{2(\mathfrak{A}')}\rightarrow(\alpha_{11}\vee\alpha_{12}\equiv\alpha_{21}\vee\alpha_{22}), \tag{23}$$

akkor a

$$\mathfrak{B}\equiv\begin{array}{c|ccccc} & A_1 & A_3 & \ldots & A_n & \cdot \\ \hline A_0 & \alpha_{01}\vee\alpha_{02} & \alpha_{03} & \ldots & \alpha_{0n} & \alpha_{0,n+1} \\ A_1 & \alpha_{11}\vee\alpha_{12}\vee\alpha_{21}\vee\alpha_{22} & \alpha_{13}\vee\alpha_{23} & \ldots & \alpha_{1n}\vee\alpha_{2n} & \alpha_{1,n+1}\vee\alpha_{2,n+1} \\ A_3 & \alpha_{31}\vee\alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3n} & \alpha_{3,n+1} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n & \alpha_{n1}\vee\alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \ldots & \alpha_{nn} & \alpha_{n,n+1} \end{array}$$

matrix az $\mathfrak{A}$ *sémával — az* $A_1=A_2$ *feltételnél — ekvivalens matrix-séma, és fordítva, ha az* $\mathfrak{A}(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$ *séma ekvivalens valamely* $\mathfrak{B}(A_1, A_3, \ldots, A_n)$ *sémával az* $A_1=A_2$ *összefüggésnél, akkor a* (23) *feltételek teljesülnek.*

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy a (23) feltételek teljesülnek. Bizonyítjuk, hogy akkor a $\mathfrak{B}$ matrix matrix-séma. Nyilvánvalóan,

$$A^{**}_{1(\mathfrak{B})} \equiv A^{**}_{1(\mathfrak{A}')} \vee A^{**}_{2(\mathfrak{A}')},$$

ezért elegendő bizonyítanunk, hogy $i \neq j$ $(i, j \neq 1, 2)$ esetén

(24) $$A^{**}_{1(\mathfrak{A}')} \vee A^{**}_{2(\mathfrak{A}')} \to (\bar{\alpha}_{1i}\bar{\alpha}_{2i} \vee \bar{\alpha}_{1j}\bar{\alpha}_{2j})(\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{21}\bar{\alpha}_{22} \vee \bar{\alpha}_{1j}\bar{\alpha}_{2j}).$$

Jelöljük a következményt (utótagot) ebben az implikációban δ_{ij}-vel. Mivel az $\mathfrak{A}'$ matrix redukált, ezért bármely $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$-re

(25) $$\bar{\alpha}_{1i} \vee \bar{\alpha}_{1j}$$

és

(26) $$\bar{\alpha}_{2i} \vee \bar{\alpha}_{2j},$$

és minden $i(=1, 2, \ldots, n+1)$-re

(27) $$\overline{A^{**}_{1(\mathfrak{A}')}} \to \bar{\alpha}_{1i}$$

és

(28) $$\overline{A^{**}_{2(\mathfrak{A}')}} \to \bar{\alpha}_{2i}.$$

A (23) és a (25) összefüggésből következik, hogy

(29) $$A^{**}_{1(\mathfrak{A}')} A^{**}_{2(\mathfrak{A}')} \to \delta_{ij} \qquad (i \neq j;\ j = 3, 4, \ldots, n+1).$$

(23)-ból ugyanis $A^{**}_{1(\mathfrak{A}')} A^{**}_{2(\mathfrak{A}')} \to (\bar{\alpha}_{1i} \equiv \bar{\alpha}_{2i})$ $i \neq 1,2$-re és $A^{**}_{1(\mathfrak{A}')} A^{**}_{2(\mathfrak{A}')} \to (\bar{\alpha}_{11} \cdot \bar{\alpha}_{12} \equiv \equiv \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{\alpha}_{22})$, az 5. tétel szerint pedig $A^{**}_{1(\mathfrak{A}')}$-ből következik $\bar{\alpha}_{11} \vee \bar{\alpha}_{1j}$ és $\bar{\alpha}_{12} \vee \bar{\alpha}_{1j}$, azaz $\bar{\alpha}_{11} \cdot \bar{\alpha}_{12} \vee \bar{\alpha}_{1j}$.) A (25) és a (28) állításból, továbbá a (26) és a (27) összefüggésből azt kapjuk, hogy

(30) $$A^{**}_{1(\mathfrak{A}')} \overline{A^{**}_{2(\mathfrak{A}')}} \to \delta_{ij}$$

és

(31) $$\overline{A^{**}_{1(\mathfrak{A}')}} A^{**}_{2(\mathfrak{A}')} \to \delta_{ij}.$$

A (29), (30) és (31) összefüggésből —, tekintettel arra, hogy

$$A^{**}_{1(\mathfrak{A}')} \vee A^{**}_{2(\mathfrak{A}')} \equiv A^{**}_{1(\mathfrak{A}')} A^{**}_{2(\mathfrak{A}')} \vee A^{**}_{1(\mathfrak{A}')} \overline{A^{**}_{2(\mathfrak{A}')}} \vee \overline{A^{**}_{1(\mathfrak{A}')}} A^{**}_{2(\mathfrak{A}')},$$

kapjuk a (24)-et. Ily módon $\mathfrak{B}$ valóban matrix-séma.

Könnyű belátni, hogy ha az $\mathfrak{A}'$ és a $\mathfrak{B}$ sémát végrehajtjuk egyikükre megengedett sorozatra, akkor az A_2 operátornak A_1-gyel való helyettesítésével mindkét sémára ugyanazt az értéket kapjuk, azaz $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}'$, és így $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ (az $A_1 = A_2$ feltételnél).

2. Legyen az $\mathfrak{A}(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$ séma ekvivalens a $\mathfrak{B}(A_1, A_3, \ldots, A_n)$ sémával az $A_1 = A_2$ feltételnél. Megmutatjuk, hogy akkor a (23) feltételek teljesülnek.

Valóban, ha $A^{**}_{1(\mathfrak{A}')}(\Delta_s) = A^{**}_{2(\mathfrak{A}')}(\Delta_s) = 1$, akkor a 2.3. lemma szerint kell találni olyan

$$\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_s, \ldots$$

és

$$\Delta_{s'_1}, \ldots, \Delta_{s'_r}, \Delta_s, \ldots$$

megengedett sorozatokat, amelyekre az $\mathfrak{A}'$ sémában Δ_{s_m} és $\Delta_{s'_r}$ értékrendszereknél A_1 és A_2 operátorok (megfelelően) végrehajtásra kerülnek. Akkor a feltétel miatt a $\mathfrak{B}$ sémában ezen sorozatokra a Δ_{s_m} és $\Delta_{s'_r}$ értékrendszereknél végrehajtásra kerül az A_1 operátor, ezért $\alpha_{1j}(\Delta_s)=\alpha_{2j'}(\Delta_s)=\beta_{1j''}(\Delta_s)$, ahol a β_{1l} feltételek a $\mathfrak{B}$ séma matrix-alakja első sorának elemei, $j=j'=j''$ vagy $j,j'=1, 2$, és $j''=1$. A tételt bizonyítottuk.

Tételünket csak algoritmusok logikai sémáira a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

8'. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az* $A_1=A_2$ *feltételnél az* $\mathfrak{A}(A_1, A_2, ..., A_n)$ *algoritmusséma ekvivalens legyen valamely* $\mathfrak{B}(A_1, A_3, ..., A_n)$ *sémával, szükséges és elegendő, hogy*

$$\overline{A^{**}_{1(\mathfrak{A})}A^{**}_{2(\mathfrak{A})}} \underset{s}{\llcorner} \mathfrak{A}\left(A_1 \underset{s}{\lrcorner}, A_2, ..., A_n\right) \quad \text{és} \quad \overline{A^{**}_{1(\mathfrak{A})}A^{**}_{2(\mathfrak{A})}} \underset{s}{\llcorner} \mathfrak{A}\left(A_1, A_2 \underset{s}{\lrcorner}, ..., A_n\right)$$

sémák gyengén ekvivalensek legyenek olyan pontossággal, amely az A_1 *operátornak* A_2*-vel való helyettesítését megengedi* (mivel ezen sémák ilyen ekvivalenciája egyenértékű azzal, hogy $A^{**}_{1(\mathfrak{A})} \cdot A^{**}_{2(\mathfrak{A})}$ feltételnél minden $j(=3, 4, ..., n+2)$-re $\alpha_{1j}\equiv\alpha_{2j}$ és $\alpha_{11}\vee\alpha_{12}\equiv\alpha_{21}\vee\alpha_{22}$).

Az $A_1=A_2$ összefüggésnél vett ekvivalencia probléma megoldásához vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket:

03. 11. Legyen adva két matrix-séma: $\mathfrak{A}\equiv\overline{A_i}|\overline{\alpha_{ij}}$ és $\mathfrak{B}\equiv\overline{A_i}|\overline{\beta_{ij}}$ valamely

$$A_i - \mathfrak{W}_i \qquad (i=1, 2, ...)$$

változáseloszlásnál, ahol $\mathfrak{W}_1=\mathfrak{W}_2$. Bevezetjük a következő jelölést:

$$\chi^0_{ij(\mathfrak{A},\mathfrak{L})} = \bigvee_{l\neq 1,2} (A^{**}_{l(\mathfrak{A})}\alpha_{li}A^{**}_{l(\mathfrak{L})}\beta_{lj}),$$

ahol i, j egymástól függetlenül felveszik az 1, 2 értékeket, a diszjunkció pedig minden $l(=0, 3, ..., n)$-re kiterjed. Legyen definiálva $\chi^\nu_{ij(\mathfrak{A},\mathfrak{B})}$, akkor

$$\chi^{\nu+1}_{ij(\mathfrak{A},\mathfrak{L})} = \chi^\nu_{ij(\mathfrak{A},\mathfrak{L})} \vee \bigvee_{k_1,k_2=1,2} \left[\left(\max_{\mathfrak{W}_1} \chi^\nu_{k_1,k_2}\right)\alpha_{k_1 i}\beta_{k_2 j}\right],$$

ahol a diszjunkció az összes k_1, k_2-re vonatkozik, melyek függetlenül felveszik az 1 és 2 értékeket.

Nyilvánvalóan található olyan μ, hogy $\chi^\mu_{ij(\mathfrak{A},\mathfrak{B})} \equiv \chi^{\mu+1}_{ij(\mathfrak{A},\mathfrak{B})}$ minden $i, j(=1, 2)$-re. Jelöljük erre a μ-re $\chi^\mu_{ij(\mathfrak{A},\mathfrak{B})}$-t χ_{ij}-vel. Könnyű bizonyítani a következőt:

4. 3. LEMMA. *Ha* $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ *az* $A_1=A_2$ *feltételnél és* $\chi_{ij}(\Delta_s)=1$, *akkor van olyan* $\Delta_{s_1}, ..., \Delta_{s_m}, \Delta_s, ...$ — *az* $\mathfrak{A}$*-ra és* $\mathfrak{B}$*-re megengedett — sorozat, hogy* Δ_s *értékrendszernél az* $\mathfrak{A}$ *sémában* A_i *operátor,* $\mathfrak{B}$ *sémában pedig* A_j *operátor végrehajtásra kerül*[10].

Bizonyítás. Ha $\chi^0_{ij}(\Delta_s)=1$, akkor az állítás közvetlenül következik a 2. 3. lemmából és abból, hogy $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ ekvivalens az $A_1=A_2$ feltételnél.

Tegyük fel, hogy a lemma igaz $\chi^\nu_{k_1k_2}(\Delta_s)=1$ esetén. Ha $\chi^{\nu+1}_{ij}(\Delta_s)=1, \chi^\nu_{ij}(\Delta_s)=0$, akkor van oly k_1, k_2, hogy

$$\left(\max_{\mathfrak{W}_1} \chi^\nu_{k_1k_2}\alpha_{k_1 i}\beta_{k_2 j}\right)_{\Delta_s} = 1,$$

[10] Emlékeztetünk arra, hogy a vizsgált esetben i és j csak az 1 és 2 értéket vehetik fel.

azaz

(32) $$\alpha_{k_1 i}(\Delta_s)=1, \qquad \beta_{k_2 j}(\Delta_s)=1,$$

és létezik olyan — a Δ_s-től csak $\mathfrak{W}_1$-beli változók értékeiben különböző — $\Delta_{s'}$ értékrendszer, melyre $\chi^{\nu}_{k_1 k_2}(\Delta_{s'})=1$. Az indukciós feltevés szerint található olyan megengedett $\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_r}, \Delta_{s'}, \ldots$ sorozat, hogy e sorozatra a $\Delta_{s'}$ értékrendszernél az $\mathfrak{A}$ sémában végrehajtásra kerül az A_{k_1} operátor, a $\mathfrak{B}$ sémában az A_{k_2} operátor. Világos, hogy a $\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_r}, \Delta_{s'}, \Delta_s, \Delta_s, \ldots$ is megengedett az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémákra, és a (32) értelmében e sorozatra Δ_s értékrendszernél az $\mathfrak{A}$ sémában az A_i operátor, a $\mathfrak{B}$ sémában az A_j operátor végrehajtásra kerül, amit bizonyítani kellett.

Következő tétel a vizsgált probléma megoldását adja:

9. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{A}=\overline{A_i}\,|\,\overline{\alpha_{ij}}$ és $\mathfrak{B}=\overline{A_i}\,|\,\overline{\beta_{ij}}$ *sémák* $A_1=A_2$ *feltételnél ekvivalensek legyenek (adott változáseloszlásnál* (3)*), szükséges és elegendő a következő feltételek teljesülése:*

1. $i\neq 1, 2$ *esetén*

$$[A^{**}_{i(\mathfrak{A})}(\alpha_{i_1}\vee\alpha_{i_2})\equiv A^{**}_{i(\mathfrak{B})}(\beta_{i_1}\vee\beta_{i_2})] \mathop{\&}_{h=3}^{n} (A^{**}_{i(\mathfrak{A})}\alpha_{ih}\equiv A^{**}_{i(\mathfrak{B})}\beta_{ih}).$$

2. $i, j=1, 2$ *esetén*

$$\max_{\mathfrak{W}_1}\chi_{ij}\rightarrow(\alpha_{i1}\vee\alpha_{i2}\equiv\beta_{j1}\vee\beta_{j2}) \mathop{\&}_{h=3}^{n} (\alpha_{ih}\equiv\beta_{jh}).$$

Redukált matrixokra az 1. feltétel ekvivalens a következővel:

1'. $$(\alpha_{i1}\vee\alpha_{i2}\equiv\beta_{i1}\vee\beta_{i2}) \mathop{\&}_{h=3}^{n} (\alpha_{ih}\equiv\beta_{ih}).$$

Bizonyítás. Az 1. és 2. feltételek szükségessége közvetlenül következik az 1. 3, 2. 3. és 4. 3 lemmákból. Az elegendőséget bizonyítjuk. Legyenek valamely

(2) $$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots$$

— az $\mathfrak{A}$ vagy $\mathfrak{B}$ sémára megengedett — sorozatra e sémák értékei

$$A_{i_1}, A_{i_2} \ldots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, \ldots$$

és

$$A_{i'_1}, A_{i'_2}, \ldots, A_{i'_m}, A_{i'_{m+1}}, \ldots$$

1-et figyelembe véve nyilvánvaló, hogy $i_1=i'_1\neq 1, 2$ vagy $i_1, i'_1=1, 2$ (azaz vagy $i_1=i'_1=1, 2$ vagy $i_1=1$, $i'_1=2$ vagy $i_1=2$, $i'_1=1$) és $\chi_{i_1 i'_1}(\Delta_{s_1})=1$ (mivel akkor $\chi^0_{i_1 i'_1}(\Delta_{s_1})=1$). Tegyük fel, hogy minden $l(\leqq m)$-re vagy $i_l=i_{l'}\neq 1, 2$ vagy $i_l, i'_l=1, 2$ és $\chi_{i_l i'_l}(\Delta_{s_l})=1$, és bizonyítjuk, hogy akkor vagy $i_{m+1}=i'_{m+1}\neq 1, 2$, vagy $i_{m+1}, i'_{m+1}=1, 2$ és $\chi_{i_{m+1} i'_{m+1}}(\Delta_{s_{m+1}})=1$. Ha $i_m=i'_m\neq 1, 2$, akkor az 1. 3. lemmából és az 1. feltételből következik, hogy vagy $i_{m+1}=i'_{m+1}\neq 1, 2$, vagy $i_{m+1}, i'_{m+1}=1,2$ és akkor 03. 11. miatt (1. 3. lemma szerint) $\chi^0_{i_{m+1} i'_{m+1}}(\Delta_{s_{m+1}})=1$, azaz $\chi_{i_{m+1} i'_{m+1}}(\Delta_{s_{m+1}})=1$.

Ha pedig $i_m, i'_m=1,2$ és $\chi_{i_m i'_m}(\Delta_{s_m})=1$, akkor $\max\limits_{\mathfrak{W}_1}\chi_{i_m i'_m}(\Delta_{s_{m+1}})=1$, és a 2. feltételből következik, hogy vagy $i_{m+1}=i'_{m+1}\neq 1,2$, vagy $i_{m+1}, i'_{m+1}=1, 2$ és (03. 11. miatt) $\chi_{i_{m+1} i'_{m+1}}(\Delta_{s_{m+1}})=1$, amit bizonyítani kellett.

Fordította: Gyuris László aspiráns

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1968. VII. 8. — Terjedelem: 9,25 (A/5) ív

68-6007 — Szegedi Nyomda

Ára: 20,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

INDEX

FROM THE FOREIGHN LITERATURE

Megjelent 1968. XI. 30.

Index: 26 498

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVIII. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1968

// A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XVIII. kötet 3—4. szám.

Szerkesztőség: Budapest, V., Münnich Ferenc utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

NOVOBÁTZKY KÁROLY EMLÉKEZETE

A fizika óriásembriókkal vajúdott, amikor NOVOBÁTZKY KÁROLY az alkotó korba lépett. 16 éves volt, amikor PLANCK megtalálta a feketesugárzás törvényét, 21 éves, amikor EINSTEIN felállította a speciális relativitás elméletét. A fizika akkori lendülete talán csak ahhoz hasonlítható, amely a matematikában a halmazelmélet megszületését követte. Az olyan embert, akinek volt szeme a látásra, egy életre rabul ejtette a feltáruló koncepciók vonzása. Ez a korszak nem a szorgalmas téglahordás korszaka volt. Súlyos acéltraverzek lendültek a magasba. Hogy az új világrahozatalában ki mekkora szellemi erőfeszítéssel vett részt, azt ebben a korban nem lehet a publikációk számával mérni. Az akkori elszántság példája és örökségeképpen pl. Albert EINSTEIN élete utolsó negyven évét olyan célkitűzésnek szentelte, amely teljesen sikertelen maradt. Akkoriban már ahhoz is fiatalos ruganyosság, és energia kellett, hogy valaki folyamatosan szembenézzen az új eszmék áradatával, NOVOBÁTZKY KÁROLY azonban éppen erre született.

A kutató tevékenység mellett az arccal az új felé fordulása az alapja NOVOBÁTZKY nevelő munkásságának is. Mint embert, talán az életmű e két oldalának szétválaszthatatlansága jellemzi legjobban. Kevés tudós fogta fel mindkettőt egyaránt olyan megingathatatlan s mégis szinte magától értetődően természetes komolysággal, mint ő. Kevesen érzik át az övéhez hasonló élményszerűséggel a kutatásban és a nevelésben rejlő legmagasabbrendű közöset: az életnek a haladás szolgálatába való állítását. S a „szolgálatba állítás" az ő számára valóban odaadást, személyes érdekek, önös szempontok felett zavartalanul elpillantó ügybuzgalmat s ugyanakkor szerénységet jelentett. Csak ennek a fegyelmezett, mégis kicsinyes gondolkodásra képtelen világnézetnek az ismeretében érthetjük a mindig tökéletesen szabatos, az egyetemi hallgatók között kristálytisztán felépített előadásairól híres, tanítványai körében pedig felülmúlhatatlan, holta napjáig aktív tudásáért irigyelt professzornak egy ízben tett kijelentését: „Egy szemernyi új igazság felfedezését többre becsülöm, mint két kötet feldolgozást ismert területről". S csak így erthetjük meg, hogyan lehetett az alkotó fizikus, aki olyan területeken tudott adni a tudománynak, amelyeken EINSTEIN, DIRAC, FERMI, HEISENBERG dolgozott, arra büszke, hogy az egyetemen éveken át, gyakorlatilag kivétel nélkül minden óráját megtartotta.

Minden tudósra jellemző, hogy szakmájának kiemelkedő alakjai közül ki mennyire szól őhozzá. NOVOBÁTZKY KÁROLYnak is gyakran feltették a kérdést: kinek az egyénisége, alkotása tette rá a legmélyebb benyomást a jelenkor fizikusai közül. A válasz hűen tükrözi világnézetét. A legnagyobb tudományos élmény számára a kvantumelmélet fejlődésének az a lépése volt, amely a fizikai mennyiségeket (HEISENBERG nyomán) operátor rangjára emelte; ehhez volt szükség a legnagyobb újat teremtő erőre. A szívéhez pedig MAX PLANCK állt legközelebb, aki évtizedekig tartó csendes munka után jutott el a róla elnevezett törvény felfedezéséig s akinek annak idején egyedül álló tankönyvei szerény stílusukkal csak a jószemű olvasó számára tették felismerhetővé, hogy szerzőjük írtózik minden felületességtől.

1884. márc. 3-án született Temesváron. Itt végezte el a reálgimnáziumot. Az egyetemi tanulmányait pedig Budapesten, Eötvös-kollégistaként. A két világháború között középiskolai tanárként működött, egy ideig vidéken, majd Budapesten. Dolgozatai és a budapesti egyetem elméleti fizikai intézetének szemináriumain tartott előadásai alapján fizikusaink a középiskolai tanár NOVOBÁTZKYt a relativitáselméletnek, az erőterek fizikájának legkiválóbb magyar tudósaként ismerték meg. A felszabadulás után a megüresedett budapesti elméleti fizikai katedrára őt hívták meg. 1949 óta tagja és csaknem haláláig alelnöke a Magyar Tudományos Akadémiának. Kétszer részesült Kossuth-díjban, 1954-ben a Munka Érdemrendjével, 1958-ban a Munka Vörös Zászló Érdemrendjével tüntették ki, 1962-ben megkapta az Akadémia aranyérmét.

Első kutatási területként az erőterek fizikáját választotta. Mihely kitünt, az éter elmélet megdőltével, hogy az erőterek viselkedését nem vezethetjük vissza valamilyen klasszikus mintára elképzelt rugalmas közeg feszültségi állapotaira, ez a témakör az elméleti fizika egyik legmodernebb, akkori anyagfogalmunkat szétfeszítő fejezetévé lépett elő. NOVOBÁTZKY KÁROLY első idevágó dolgozata 39 évvel ezelőtt jelent meg. Az elektromágnesség mélyebb megértésére éter híján először az a szoros kapcsolat kínált lehetőséget, amely a gravitáció és a téridő geometriai szerkezete között az általános relativitáselméletben feltárul. A 20-as években indultak el a kutatások az elektromágneses tér geometriai értelmezésének irányába. NOVOBÁTZKY KÁROLYt éppenúgy megejtette a gondolat szépsége, mint — EINSTEIN mellett — SCHRÖDINGERt, WEYLt vagy SCHOUTENt. Vizsgálatai az affin térelméletre, a projektív nemeuklidesi geometriára terjedtek ki, s még akadémiai székfoglaló értekezése is (1949) unitér térelméletet vázol fel, amely az elektromágnességet egyszerű és frappáns módon nemlineáris vektorátvitel bevezetésével interpretálja. Csak nehéz szívvel hagyta ott ezt a számára talán legkedvesebb gondolatkört, amely pedig technikai készségét és probléma meglátását olyan sikeresen tette próbára, mert az igazság iránt érzett szeretete nem engedte meg, hogy kivonja magát az újabb és újabb erőterek felfedezése által az unitér elméletek kilátásaira gyakorolt kedvezőtlen hatás alól.

A geometrizálási törekvések mellett a másik, sikeresebb útnak az anyagfogalom elmélyítésére az erőterek kvantálása bizonyult. A formalizmus kiépítése során éppen a legelőször kvantált erőtérrel, az elektromágneses térrel kapcsolatban fennmaradtak bizonyos formai, bár elég súlyos nehézségek. A *Maxwell*-egyenletek potenciálokra való átírásánál alkalmazott *Lorentz*-feltétel kvantumelméleti kezelésére gondolunk. NOVOBÁTZKY KÁROLY több dolgozatban foglalkozott ezzel a kérdéssel, rendkívül radikálisan, a mellékfeltételek elvetésével oldva meg azt. Az első dolgozat a *Zeitschrift für Physik*ben jelent meg, külföldön is értékes elismerést váltva ki. Ezt az eredményt idézik leggyakrabban a különböző monográfiák.

A klasszikus és a kvantumfogalmak érintkezése, illetve szétválása egész életén át ébren tartotta NOVOBÁTZKY KÁROLY érdeklődését. Kimutatja, hogy a *Maxwell*-féle feszültségeknek, amelyeket alkotójuk az éter rugalmas feszültségeinek fogott fel, az éter elmélet bukása után is reális értelmük marad: az elektromágneses tér tehetetlen tömegét gyorsítják.

Bebizonyítja — és ez éppen a kvantummechanika interpretációs kérdései körül napjainkban feléledt viták szempontjából jelentős — hogy az alapegyenletekhez s az operátorstatisztika szigorú szkémáihoz a többé-kevésbé „testidegen" optikai analógiák nélkül is el lehet jutni. A statisztikus értelmezéshez vezető utat NOVOBÁTZKY KÁROLY a variációs elv egyetemes alkalmazásával jelölte ki. Csaknem haláláig dolgozott.

A születőben levő lényegeset keresni és felismerni tudó hajlama tette számára lehetővé, hogy hazánkban az egyetemi elméleti fizika oktatást, amelyet az ő egyetemi hallgató évei alatt sok évtizedes elmaradás jellemzett, a kor színvonalára emelje, s maga körül a ma kutatásaiba kapcsolódó elméleti fizikai iskolát teremtsen. Az újért, a haladásért érzett lelkesedése nemcsak a tudomány, az oktatás és a tudományszervezés posztján, hanem kommunista meggyőződésének szilárdsága, politikai helytállása szempontjából is élő példaképpé, a szó legteljesebb értelmében vett nevelővé tette.

Az elméleti fizikai kutatás arculata megváltozott a XX. század második felében. A minden előbbrejutást új vezérlő elvek szelétől követelő lendület megtorpant, ismét a szorgalmas téglahordás korszakába jutottunk. De NOVOBÁTZKY KÁROLY egyéniségének emléke, ami talán legmaradandóbb öröksége, változatlan erejű inspirációt jelent. Befejezésül hadd idézzünk azokból a sorokból, amelyekkel egy volt tanítványa az Akadémia aranyérmének odaitélése alkalmával jellemezte. „Az önzetlenség, amellyel tudását és tapasztalatait tanítványainak átadja; az élénkség, amellyel a fiatalok önálló szereplését pártfogolja; a tökéletes alkati képtelenség mindenre, ami a tudományos féltékenységgel rokon: a körülötte levőkben azt a meggyőződést ébreszti, hogy ez az ember vagy vak, vagy pedig mindig a holnapba néz."

Károlyházy Frigyes

NOVOBÁTZKY KÁROLY BIBLIOGRÁFIÁJA

Könyvek

1. *Relativitás.* Magyar Szemle Társaság, Bp. (1943) 80 old.
2. *A relativitás elmélete.* Mérnöki Továbbképző Intézet Bp. (1947) 54. old.
3. *Termodinamika.* Egyetemi jegyzet Bp. (1951) 77 old.
4. Novobátzky Károly—Neugebauer Tibor: *Elektrodinamika és optika.* 1. kiadás. Tankönyvkiadó Bp. (1951) 339 old.
5. *A relativitás elmélete.* Tankönyvkiadó. 1. kiadás. Bp. (1951) 176 old.
6. Novobátzky Károly—Neugebauer Tibor: *Elektrodinamika és optika.* 2. kiadás. Tankönyvkiadó Bp. (1952) 339 old.
7. K. F. Novobátzky—Th. Neugebauer: *Theoretische Elektrizitätslehre und Wellenoptik.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1957) 419 old.
8. *A fizikai megismerés úttörői.* Akadémiai Kiadó Bp, (1959) 150 old.
9. Novobátzky Károly — Neugebauer Tibor: *Elektrodinamika és optika.* 3. átdolgozott kiadás. Tankönyvkiadó Bp. (1961) 408 old.
10. K. F. Novobátzky—Th.Neugebauer *Theoretische Elektrizitätslehre und Wellenoptik.*, 2. Auflage. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1962).
11. *A relativitás elmélete.* 2. javított kiadás. Tankönyvkiadó Bp. (1962) 202 old.

Tanulmányok

12. *Schema einer Feldtheorie.* Zeitschrift für Physik **58** (1929) 556.
13. *Einstein legújabb geometriája.* Matematikai és Fizikai Lapok **36** (1929) 57.
14. *Erweiterung der Feldgleichungen.* Zeitschrift für Physik **72** (1931) 683.
15. *Universelle Feldtheorie.* I. Zeitschrift für Physik **89** (1934) 373.
16. *Universelle Feldtheorie.* II. Zeitschrift für Physik **89** (1934) 750.
17. *Zur Quantenelektrodynamik.* Zeitschrift für Physik **111** (1940) 292.
18. *Többtestprobléma a kvantumelméletben.* Matematikai és Physikai Lapok **48** (1941) 312.
19. *Lichtbeugung an schwarzen Schirmen.* Zeitschrift für Physik **119** (1942) 102.
20. *Galileo Galilei.* Mennyiségtani és Természettudományi Didaktikai Lapok **1** (1943) 29.
21. *Isaac Newton.* Mennyiségtani és Természettudományi Didaktikai Lapok **2** (1944) 1.
22. *Einheitliche Feldtheorie in Vier Dimensionen.* Hungarica Acta Phys. No. 5 (1947) 1.
23. *Bewegtes Dielektrikum.* Hungarica Acta Phys. No. 5. (1947) 25.
24. *A fizikai megismerés.* Természettudomány **2** (1947) 1.
25. *Max Planck.* Magyar Technika **2** (1947) 216.
26. *Planck és a kvantumelmélet.* Természettudomány. **3** (1948) 38.
27. *Köszöntő* (a Fizikai Szemle indulásakor). Fizikai Szemle **1** (1950) 1.
28. *A variációszámítás és tenzorkalkulus fizikai alkalmazásai.* MTA III. Osztály Közleményei **1** (1951) 168.
29. *Előszó.* Békéssy A., Freud G., Marx Gy., Nagy K., *Elméleti Fizikai Feladatok* c. könyvhöz. Tankönyvkiadó Bp. (1951, 1962) 3.
30. *Kurdjavcev: A fizika története* — könyvismertetés. Akadémiai Értesítő **58** (1952) 414.
31. *Das klassische Modell der Quantentheorie.* Annalen Phys. **9** (1952) 406.
32. *A kvantumelmélet statisztikus sokasága.* MTA III. Osztály Közleményei **2** (1952) 343.
33. *A relativitás elméletének szerepe a fizikában.* Fizikai Szemle **2** (1952) 406.
34. *A Schrödinger—Gordon egyenlet.* MTA III. Osztály Közleményei **2** (1952) 419.
35. *Zur Schrödinger—Gordon Gleichung.* Annalen Phys. **11** (1953) 285.
36. *Eötvös Loránd emlékezetére.* Akadémiai Értesítő **60** (1953) 325.
37. *Az energia mechanikai mozgásegyenletei.* Magyar Fizikai Folyóirat **1** (1953) 5.
38. *Nicolaus Copernicus.* Tudományegyetem 1953. november 18.
39. *Roland Eötvös.* (Vorwort zu den Gesammelten Arbeiten) Akadémiai Kiadó Bp. (1953) 39.
40. *A magyar fizika helyzete.* Szabad Nép 1953. szeptember 3.
41. *A hazai fizika helyzete a múltban és ma.* Magyar Fizikai Folyóirat **2** (1954) 55.
42. *Válasz az üdvözlésekre.* Fizikai Szemle **4** (1954) 94.
43. *A relativitás elméletének ötvenéves jubileuma.* Magyar Fizikai Folyóirat **3** (1955) 37.
44. *Meghalt Albert Einstein.* Szabad Nép 1955. április 19.
45. *Fizika és filozófia.* Magyar Tudomány **1** (1956) 393.
46. *Pierre Curie halálának 50. évfordulóján.* Magyar Tudomány **1** (1956) 361.
47. *Strahlungs- und Gasstatistik.* Max Planck Festschrift, Berlin (1958).
48. *William Thomson* (emlékbeszéd). Fizikai Szemle **8** (1958) 71.
49. *Egy nagy fizikus emlékezete* (Joliot-Curie). Magyar Tudomány **4** (1958) 561.
50. *Statistische Ableitung der gequantelten Strahlungs-und Gasenergie.* Acta Phys. Hung. **10** (1959) 407.
51. *Tehetetlenség és gravitáció.* Fizikai Szemle **10** (1960) 259.
52. *Elméleti fizikai kollokvium* (megnyitó) Fizikai Szemle **11** (1961) 376.
53. *Előszó* Albert Einstein A speciális és általános relativitás elmélete című könyvéhez. Bp. Gondolat (1963) 5.
54. *Niels Bohr* (emlékbeszéd) Fizikai Szemle **13** (1963) 99.
55. Novobátzky Károly—Nagy Károly—Marx György: *A tér és idő megismeréséről.* Népszabadság 1963. február 23.
56. *Sok szabadsági fokú rendszerek* (megnyitó) Fizikai Szemle **14** (1964) 361.
57. *A relativitáselmélet filozófiai problémái* (könyvismertetés). Fizikai Szemle **14** (1964) 290.
58. *Appreciation of Roland Eötvös.* Annales Universitatis Scientiarum Bp. Sectio Geologica **7** (1964) 3.
59. *Eötvös Loránd* (emlékbeszéd) Fizikai Szemle **14** (1964) 3.
60. *Galileo Galilei* (emlékbeszéd) Fizikai Szemle **14** (1964) 163.
61. *A Lorentz-elv a kritika mikroszkópja alatt.* Magyar Tudomány **11** (1966) 385.
62. *Hetvenöt éves az Eötvös Társulat.* Fizikai Szemle **16** (1966) 354.

Novobátzky Károlyra vonatkozó cikkek

a) Valatin János, Danske Vid. Selskab. **26** (1951) No. 13.
b) Mátrai Tibor: *A relativitás elmélete* (könyvismertetés) Fizikai Szemle **2** (1952) 24.
c) Szamosi Géza: *A második Kossuth díj.* Fizikai Szemle **3** (1953) 55.
d) Jánossy Lajos: *Novobátzky Károly 70 éves.* Fizikai Szemle **4** (1954) 1.
e) J. M. Jauch—F. Rohrlich *The Theory of Photons and Electrons.* Addsion-Wesley, Cambridge Mass (1955) 110.
f) Gyulai Zoltán: *Novobátzky Károly 75 éves.* A fizikai megismerés úttörői, Akadémiai Kiadó (1959) 7.
g) Marx György: *Novobátzky Károly 75. éves.* Fizikai Szemle **9** (1959) 71.
h) M. Zemplén Jolán: *A fizikai megismerés úttörői.* (könyvismertetés) Fizikai Szemle **9** (1959) 223.
i) Györgyi Géza: *Theoretische Elektrizitätslehre* (könyvismertetés) Fizikai Szemle **9** (1959) 135.
j) *Carolo Novobátzky Octogenario* (emlékkötet). Acta Phys. Hung. **17** (1964) No. 1—2.
k) Nagy Károly: *K. F. Novobátzky Eighty Years Old.* Acta Phys. Hung. **17**. (1964) 3.
l) Marx György: *A Novobátzky-iskola.* Fizikai Szemle **14** (1964) 67.
m) Ruffy Péter: *Az öregség ragyogása.* Magyar Nemzet 1964. március 1.
n) Nagy Károly: *Az elméleti fizika magyar mestere.* Magyarország 1964. március 1.
o) Nagy Károly: *Novobátzky Károly meghalt.* Népszabadság 1967. december 22.
p) Marx György: *Búcsú a fizika professzorától.* Magyar Nemzet 1967. december 22.
r) Nagy Károly: *Gyászbeszéd.* Természet Világa **99** (1968) 60.
s) Hajduska János: *Tudósaink arcképcsarnoka.* Fizikai Szemle **18** (1968), megjelenőben.
t) Hajduska János: *A fürkésző elme.* Magyar Nemzet, 1967. december 24.
u) Gombás Pál: *Novobátzky Károly, 1884—1967.* Fizikai Szemle **18** (1968) 33.
v) Nagy Károly: *Novobátzky Károly* 1884—1967. Magyar Tudomány **13** (1968), megjelenőben.

ALGEBRAI EGYENLETEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSÁRÓL*

Írta: TURÁN PÁL

1. Jelen előadás, mely egy, tavaly Weimarban rendezett, alkalmazott matematikai kongresszuson tartott előadás továbbfejlesztett formája, a tárgynak egyes elméleti és gyakorlati oldalaival foglalkozik. Az elsőnek említett irányú megjegyzések helyes megvilágítása végett emlékeztetünk RUFFINI—ABEL azon klasszikus tételére, mely szerint $n \geqq 5$-re nincs olyan véges algoritmus, melynek elemi operációi

a) a négy alapművelet komplex számokkal,

b) komplex számból vont gyök egy meghatározott értékének meghatározása volnának és melyet bármely komplex együtthatós n-edfokú

$$f_0(z) = a_{00} + a_{10}z + \ldots + a_{n0}z^n = 0 \tag{1. 1}$$

$$a_{00}a_{n0} \neq 0$$

algebrai egyenletre alkalmazva az egyenlet egy gyökét kapnánk. Ha az algoritmus hosszán a benne szereplő elemi lépések számát értjük, akkor persze egy ilyen „megoldó algoritmus" hossza csak n-től függő lenne. Kézenfekvő kérdés, vajon hogyan áll a helyzet egy „közelítőleg megoldó" algoritmussal? Definiáljunk egy tetszőleges H operációtartomány feletti „közelítő megoldó" algoritmust, pontosabban N_1, $N_2, \ldots, N_k, \ldots$ „közelítőleg megoldó algoritmussorozatot" a következő két követelménnyel:

I. A N_k algoritmus elemi lépései H-ból valók és hossza csak n- és k-tól függ.

II. A N_k algoritmust tetszőleges (1. 1) alakú n-edfokú egyenletre alkalmazva, oly

$$\psi_k = \psi_k(a_{00}, \ldots, a_{n0})$$

komplex számot nyerünk, hogy az (1. 1) egyenlet egy alkalmas z^*-gyökére

$$\left| \frac{z^*}{\psi_k} - 1 \right| \leqq \frac{1}{k}. \tag{1.2}$$

Tekintsük azon H^* operációtartományt, melynek operációi csupán

c) a négy alapművelet komplex számokkal,

d) tetszőleges pozitív számból vont gyök pozitív értékének meghatározása. H^* biztosan nem bővebb az *a)* és *b)* alatt megadott operációtartománynál. Ekkor fennáll az

* Elhangzott a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok felolvasóülésén, 1968. május 14-én.

I. TÉTEL. *Minden rögzített n természetes egész mellett megadható az* (1. 1) *egyenletet H^* felett közelítőleg megoldó algoritmussorozat (és ilyent explicite meg is fogunk adni).*

Más szóval tehát meg fogunk adni minden pozitív egész n-hez és tetszőleges kis pozitív ε-hoz olyan algoritmust, melynek lépései *c)* és *d)*-ből valók; hossza csak n és ε-tól függ és amelyet tetszőleges komplex együtthatós n-edfokú egyenletre alkalmazva oly ψ_ε komplex számot nyerünk, melyre az adott egyenlet alkalmas z^*-gyökére

$$\left|\frac{z^*}{\psi_\varepsilon}-1\right| \leqq \varepsilon. \tag{1.3}$$

A tétel lényeges tartalma nyilván az algoritmusnak az együtthatóktól való teljes függetlensége (és így persze az algoritmus hossza is független az együtthatóktól). A *Ruffini—Abel* tétellel egybevetve tehát az I. tétel tartalma röviden úgy is fogalmazható, hogy a fenti értelemben vett közelítő megoldhatóságra *Ruffini—Abel* tételének analogonja nem áll fenn.

A numerikus analízis szempontjából a következőket jegyzem meg. Dacára annak, hogy a *Newton*-módszer a 17. század közepetájt, a *Graeffe—Bernoulli*-módszer 1728-ban keletkezett (nem is szólva a regula falsi-ról), A. RALSTON és H. I. WILF 1960-ban megjelent „*Mathematical methods for digital computers*” c. könyvükben azt írták, hogy egyenletek megoldására jelenleg nincs gépi használatra megfelelő módszer. Ennek oka egyrészt az, hogy az ismert közelítő módszerek limesz-módszerek, melyekre általános hibabecslés nincs, másrészt az, hogy erősen függenek (az algoritmus hossza is!) a megoldandó egyenlet együtthatóitól; márpedig szerintük gépi szempontból egy esetleg hosszabb, de teljesen egyöntetű algoritmus használhatóbb. A megoldandó algoritmus, amelyet az V. szabály fog megadni, ezen hiányosságok egyikében sem szenved, mint látni fogjuk, és a *c)—d)* elemi lépések nyilván könnyen programozhatók.

A módszernek még egy előnye van. Minden közelítő módszer elvben rögtön átírható $n\times n$-es matrix sajátértékeinek közelítésére, csak a numerikus keresztülvitel lesz rendszerint igen körülményes. Az V. szabályra azonban tetszőleges komplex-elemű $n\times n$-es A matrix esetén, mint a VI. szabály meg fogja mutatni, még elegánsabb alak adható.

Módszerünk az általánosabb

$$\det\{A_0+A_1\lambda+\ldots+A_k\lambda^k\} = 0 \tag{1.4}$$

egyenlet esetén is használható, ahol A_ν $n\times n$-es komplex-elemű matrix, $\nu=0, 1, \ldots, k$; ilyen egyenletek lépnek fel $k=2, 3, 4$ esetén az aerodinamikában. Ezekre azonban itt nem térünk ki. Módszerünk továbbá alkalmas általános egyenlőtlenségek bizonyítására, ezek közül a következőt emelném ki.

II. TÉTEL: *Az $n\times n$-es B matrix nyomát $\mathcal{T}_r(B)$-vel jelölve, a tetszőleges komplex-elemű $n\times n$-es A matrixnak van legalább egy sajátértéke a komplex z-sík*

$$|z| \leqq \max_{\nu=1,2,\ldots,n} |\mathcal{T}_r(A^\nu)|^{\frac{1}{\nu}}$$

körlemezében. Ez kisebb sugarú origó-centrumú körlemezzel nem helyettesíthető.

Ennek bizonyítását egy, az *Ostrowski—Festschrift*ben megjelenendő dolgozatom fogja tartalmazni, erre itt nem térek ki.

2. Ezután térjünk rá az említett szabályok kimondására. Legyenek az (1. 1) egyenlet gyökei $z_1, z_2, \ldots, z_n$, úgy, hogy

$$|z_1| \geqq |z_2| \geqq \ldots \geqq |z_n|. \tag{2. 1}$$

Legyen továbbá az $f_\nu(z)$ *Graeffe*-transzformáltak sorozata rekurzive az alábbi módon adva:

$$f_{\nu+1}(z) = f_\nu(\sqrt{z})f_\nu(-\sqrt{z}); \tag{2. 2}$$

legyen

$$f_\nu(z) = a_{0\nu} + a_{1\nu}z + \ldots + a_{n\nu}z^n, \tag{2. 3}$$

ahol nyilván

$$a_{0\nu}a_{n\nu} \neq 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots \tag{2. 4}$$

Ekkor fennáll az

ELSŐ SZABÁLY. Legyen m tetszőleges nemnegatív egész. A (2. 3) alatti m-edik *Graeffe*-transzformálttal, $f_m(z)$-vel képezzük rekurzíve a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ számokat az alábbi

$$\begin{gathered} a_{0m}\sigma_1 + a_{1m} = 0 \\ a_{0m}\sigma_2 + a_{1m}\sigma_1 + 2a_{2m} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{0m}\sigma_n + \ldots + a_{n-1,m}\sigma_1 + na_{nm} = 0 \end{gathered} \tag{2. 5}$$

formulákból. Ekkor M-et a következőképpen definiálva

$$M = \frac{1}{\max\limits_{\nu=1,2,\ldots,n} \left|\frac{\sigma_\nu}{n}\right|^{\frac{1}{\nu 2^m}}}, \tag{2. 6}$$

fennáll az

$$5^{-\frac{1}{2^m}} \leqq \frac{|z_n|}{M} \leqq 1 \tag{2. 7}$$

egyenlőtlenség.

Ezen szabály a H^*-beli elemi lépéseken felül még véges sok adott pozitív szám maximumának meghatározását is követeli. Ez azonban RIESZ FRIGYES azon megjegyzése értelmében, mely szerint valós a és b mellett a négyzetgyök pozitív értékét véve

$$\frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \max(a, b),$$

és amelyre CSÁSZÁR ÁKOS hívta fel figyelmemet, csak n-től függő sok H^*-beli lépésre redukálódik, azaz az első szabály elemi operációi csupa H^*-ból valókkal pótolhatók és számuk csak n-től és a kívánt pontosságtól függ. Érdekes megjegyezni, hogy pl. 1% relatív pontosságot előírva ez elérhető, ha m-et úgy választjuk, hogy

$$5^{-\frac{1}{2^m}} \geqq 0{,}99,$$

ami teljesül, ha

$$m = 8, \tag{2.8}$$

tehát 8 *Graeffe*-transzformációt elég alkalmaznunk, *még a megoldandó egyenlet fokszámától is függetlenül.*

Természetesen adódik analóg szabály a maximális abszolút értékű gyök abszolút értékének közelítő meghatározására. Ezt külön is megfogalmazzuk.

MÁSODIK SZABÁLY. A (2. 3) alatti *Graeffe*-transzformálttal és nemnegatív egész m-mel képezzük az $S_1, S_2, \ldots, S_n$ számokat rekurzíve az alábbi formulákból:

$$\begin{aligned} a_{nm}s_1 + a_{n-1,m} &= 0 \\ a_{nm}s_2 + a_{n-1,m}s_1 + 2a_{n-2,m} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{nm}s_n + \ldots + a_{1,m}s_1 + na_{0,m} &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ekkor M^*-ot a következőképpen definiálva,

$$M^* = \max_{\nu=1,2,\ldots,n} \left| \frac{S_\nu}{n} \right|^{\frac{1}{\nu 2^m}} \tag{2.10}$$

fennáll az

$$1 \leqq \frac{|z_1|}{M^*} \leqq 5^{\frac{1}{2^m}} \tag{2.11}$$

egyenlőtlenség.

3. Mindkét szabályban — melynek második is nyilván csak H^*-beli lépéseket használ — a *D. Bernoulli—Dandelin—Lobacsevszkij—Graeffe* eljárás egy továbbfejlesztésére ismerhetünk. Fenti szabályok azonban teljesen függetlenek attól, hogy a megoldandó egyenletnek vannak-e egyenlő abszolút értékű gyökei, ami az eljárás klasszikus formáinál az összes kényelmetlenségek fő forrása és oka annak, hogy a numerikus analízis összes tankönyveiben az eljárás lényegileg csak jól kiválasztott példákon van bemutatva. Az első olyan módosítás, amely hibabecslést tudott adni, OSTROWSKItól való 1940-ből. Ebben az egyenlethez bizonyos *Newton*-féle poligonokat rendel hozzá, melyek használata különösen akkor válik kényelmetlenné, ha matrixok sajátértékeire akarnánk azt alkalmazni. Ezzel szemben ez esetben szabályaink a következőképpen alakulnak.

III. SZABÁLY (a II. szabály matrixokra vonatkozó megfelelője). Ha A tetszőleges $n \times n$-es komplex elemű matrix és m tetszőleges nemnegatív egész, képezzük iterált négyzetreemeléssel az

$$\begin{gathered} A, A^2, A^{2^2}, A^{2^3}, \ldots, A^{2^m} \overset{\text{def}}{=} B \\ B, B^2, B^3, \ldots, B^n \end{gathered} \tag{3.1}$$

matrixokat. Ha A sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ és

(3.2) $$|\lambda_1| \geqq |\lambda_2| \geqq \ldots \geqq |\lambda_n|,$$

továbbá

(3.3) $$L^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\nu=1,2,\ldots,n} \left| \frac{1}{n} \mathcal{T}_r(B^\nu) \right|^{\frac{1}{\nu 2^m}},$$

akkor

(3.4) $$1 \leqq \frac{|\lambda_1|}{L^*} \leqq 5^{\frac{1}{2^m}}.$$

IV. SZABÁLY (az I. szabály matrixokra vonatkozó megfelelője). Ha A nem szinguláris $n \times n$-es komplex elemű matrix és m tetszőleges pozitív egész, képezzük előbb az A^{-1}, majd iterált négyzetreemeléssel az

(3.5) $$\begin{gathered} A^{-1}, (A^{-1})^2, \ldots, (A^{-1})^{2^m} \stackrel{\text{def}}{=} B_1 \\ B_1, B_1^2, B_1^3, \ldots, B_1^n \end{gathered}$$

matrixokat. Ha

(3.6) $$L = \frac{1}{\max\limits_{\nu=1,2,\ldots,n} \left| \frac{1}{n} \mathcal{T}_r(B_1^\nu) \right|^{\frac{1}{\nu 2^m}}},$$

akkor

$$5^{-\frac{1}{2^m}} \leqq \frac{|\lambda_n|}{L} \leqq 1.$$

4. A két utóbbi szabály közül különösen a III. szabály látszik programozásra alkalmasnak. Mindkét szabály alkalmazható a technikában ún. veszélyességi zónák megállapítására. Különösen előnyösnek tűnik a III. szabály paraméterektől függő matrix maximális abszolút értékű sajátértékének közelítő meghatározására; ilyen eset áll elő pl. multiplett spektrumvonalak mágneses térben való felbontásának vizsgálatánál, ahol még tovább egyszerűsíti a dolgot az, hogy a matrix szimmetrikus lévén, a sajátértékek valósak. Ez esetben tehát pl. egy μ paraméter esetén a λ maximális sajátértéket legfeljebb 6% relatív hibával a következőképpen nyerjük. Képezzük ötszöri iterált négyzetreemeléssel az A matrix

$$A, A^2, A^{2^2}, A^{2^3}, A^{2^4}, A^{2^5}$$

hatványait és az utóbbit B_2-vel jelölve, a

$$B_2, B_2^2, B_2^3, \ldots, B_2^n$$

matrixokat. Ekkor a B_2^ν matrixok elemei egy $a \leqq \mu \leqq b$ közben μ-nek adott függvénye lévén, az

$$\left| \frac{1}{n} \mathcal{T}_r(B_2^\nu) \right|^{\frac{1}{32\nu}} \qquad \nu = 1, \ldots, n$$

kifejezések a μ-nek explicite adott, gépben egyszer s mindenkorra grafikusan előállítható függvényei és így a felső burkolójuk is. A kapott görbe az $A=A(\mu)$ matrix legnagyobb sajátértékét fogja adni legfeljebb 6% hibával *minden* oly μ-re, amely az (a, b) közbe esik.

5. Ezután rátérhetünk az I. tételben említett algoritmus megadására (V. szabály), majd a matrixokra vonatkozó analóg VI. szabály megadására.

V. SZABÁLY. Ha (1.1) a megoldandó egyenlet, akkor 0-adik lépésként alkalmazzuk az első szabályt $m=4$-gyel. A kapott $M \overset{\text{def}}{=} M^{(0)}$-val és $\zeta^{(0)} \overset{\text{def}}{=} 0$-val képezzük $j=0, 1, \dots 11$-re első lépésként a

$$\zeta_j^{(1)} \overset{\text{def}}{=} \zeta^{(0)} + \frac{19}{20} M^{(0)} e^{\frac{j\pi i}{6}} \tag{5.1}$$

számokat. Amennyiben valamelyik $f_0(\zeta_j^{(1)})=0$, készen vagyunk; ha nem, alkalmazzuk az első szabályt $m=4$-gyel a 12 $f_0(\zeta_j^{(1)}+w)$ polinomra. Így nyerjük az $M_j^{(1)}$ $(j=0, 1, \dots, 11)$ számokat. Definiáljuk $M^{(1)}$-et, a μ_1-indexet és a $\zeta^{(1)}$-értéket a következőképpen:

$$\min_{j=0,1,\dots,11} M_j^{(1)} = M_{\mu_1}^{(1)} = M^{(1)}. \tag{5.2}$$

Ezután második lépésként képezzük $j=0, 1, \dots, 11$-re a

$$\zeta_j^{(2)} \overset{\text{def}}{=} \zeta^{(1)} + \frac{19}{20} M^{(1)} e^{\frac{j\pi i}{6}}$$

számokat. Amennyiben valamelyik $f_0(\zeta_j^{(2)})=0$, készen vagyunk; ha nem, alkalmazzuk az első szabályt $m=4$-gyel a 12 $f_0(\zeta_j^{(2)}+w)$ polinomra. Így nyerjük az $M_j^{(2)}$ $(j=0, 1, \dots, 11)$ számokat. Definiáljuk $M^{(2)}$-t, a μ_2-indexet és a $\zeta^{(2)}$-értéket

$$\min_{j=0,1,\dots,11} M_j^{(2)} = M_{\mu_2}^{(2)} = M^{(2)}. \tag{5.3}$$

által. Ezen algoritmus korlátlanul folytatható (legfeljebb gyökben végződik). Állítás, hogy tetszőleges $d \geqq 2$-re az (1. 1) egyenletnek van olyan $z^{(d)}$ gyöke, hogy a fenti módon nyert $\zeta^{(d)}$-vel

$$\left|\frac{z^{(d)}}{\zeta^{(d)}} - 1\right| \leqq 2\left(\frac{9}{28}\right)^d \quad \left(< \frac{2}{3^d}\right). \tag{5.4}$$

Ha tehát pl. legfeljebb 7% relatív hibát akarunk garantálni, $d=3$ vehető. Megjegyzendő, hogy a *Graeffe*-lépések száma előírt relatív hiba mellett az együtthatóktól és a fokszámtól is független algoritmusunkban! A szabályos 12-szög választását az motiválja, hogy így az $f(\zeta_j^{(d)}+w)$ polinomok normálalakba írásánál az együtthatók könnyen megadhatók az eredetiekből.

A matrixok sajátértékeire vonatkozik a

VI. SZABÁLY. Alkalmazzuk a reguláris A matrixra 0-dik lépésként a negyedik szabályt $m=4$-gyel. A kapott $L \overset{\text{def}}{=} L^{(0)}$-val és $\eta^{(0)} \overset{\text{def}}{=} 0$-val képezzük első lépésként $j=0, 1, \dots, 11$-re az

$$\eta_j^{(1)} \overset{\text{def}}{=} \eta^{(0)} + \frac{19}{20} L^{(0)} e^{\frac{j\pi i}{6}} \tag{5.5}$$

számokat. Amennyiben az

(5. 6) $\quad A+\eta_j^{(1)}E, \qquad j=0, 1, \ldots, 11,$ E az $n\times n$-es egységmatrix

matrixok valamelyike szinguláris, úgy a megfelelő $\eta_j^{(1)}$ sajátérték és készen vagyunk; ha nem, alkalmazzuk a IV. szabályt $m=4$-gyel az (5. 6) alatti matrixokra. Így nyerjük az $L_j^{(1)}$ ($j=0, 1, \ldots, 11$) számokat. Definiáljuk $L^{(1)}$-et, a ν_1-indexet és az $\eta^{(1)}$-értéket

(5. 7) $$\min_{j=0,1,\ldots,11} L_j^{(1)} = L_{\nu_1}^{(1)} = L^{(1)}$$

által. Ezután második lépésként képezzük $j=0, 1, 2, \ldots, 11$-re az

(5. 8) $$\eta_j^{(2)} \overset{\text{def}}{=} \eta^{(1)} + \frac{19}{20} L^{(1)} e^{\frac{j\pi i}{6}}$$

számokat. Amennyiben az

(5. 9) $$A+\eta_j^{(2)}E, \qquad j=0, 1, \ldots, 11$$

matrixok valamelyike szinguláris, készen vagyunk; ha nem, alkalmazzuk a IV. szabályt $m=4$-gyel az (5. 9) alatti matrixokra. Így nyerjük az $L_j^{(2)}$ ($j=0, \ldots, 11$) számokat. Definiáljuk $L^{(2)}$-t, a ν_2-indexet és az $\eta^{(2)}$-értéket

$$\min_{j=0,1,\ldots,11} L_j^{(2)} = L_{\nu_2}^{(2)} = L^{(2)}$$

által. Ezen algoritmus korlátlanul folytatható (legfeljebb egy sajátértékben végződik). Állítás, hogy tetszőleges $d \geqq 2$-re az A matrixnak van oly $\lambda^{(d)}$ sajátértéke, hogy a fenti módon nyert $\eta^{(d)}$-vel

(5. 10) $$\left|\frac{\lambda^{(d)}}{\eta^{(d)}} - 1\right| \leqq \frac{2}{3^d}.$$

6. Térjünk rá az I—IV. szabályok tárgyalására; mivel ezek tárgyalása teljesen analóg, elég lesz II. és III. szabályokat igazolni. Még 1950-ben vettem észre, hogy hatványösszeg-módszerem, melyet eredetileg számelméleti kérdések megoldására találtam, alkalmas a *Graeffe*-módszer javítására; ha s_ν a (2. 9) alatti jelentésű és

(6. 1) $$M_1^* \overset{\text{def}}{=} \max_{\nu=1,\ldots,n} |s_\nu|^{\frac{1}{\nu 2^m}},$$

akkor (2. 11) helyett az adódott, hogy

(6. 2) $$n^{-2^{-m}} \leqq \frac{|z_1|}{M_1^*} \leqq \left(\frac{\log(n+1)}{\log 2}\right)^{2^{-m}}.$$

Ebből is elérhető volt az 1%-os relatív hiba, ha m-et csupán n-től függően (tehát az együtthatóktól függetlenül) elég nagynak vesszük. Az alapul szolgáló hatványösszeg tételem az volt, hogy ha $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ komplex számok, melyekre

(6. 3) $$\max_{i=1,2,\ldots,n} |\xi_j| = 1,$$

akkor

(6. 4) $$\max_{\nu=1,2,\ldots,n} |\zeta_1^\nu + \ldots + \zeta_n^\nu| \geqq \frac{\log 2}{\log n}.$$

Azon sejtésemet, hogy (6. 4)-ben a jobb oldal egy n-től független állandóval helyettesíthető, ATKINSON[1] 1961-ben bebizonyította $\frac{1}{6}$-dal; újabb dolgozata, melyben ezt $\frac{1}{3}$-ra javította, közlés alatt áll az *Acta Math. Hung.*-ban. Ezzel helyettesítve (6. 4)-et eredeti bizonyításomban, (6. 2) alakja

$$(6.5)\qquad \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2^m}} \leqq \frac{|z_1|}{M_1^*} \leqq 3^{\frac{1}{2^m}}$$

lett, azaz a *Graeffe*-lépések számának n-től való függésének szükségessége a felső korlátban eltűnt. Az alsó korlátnál ennek eltüntetése csak BUCHHOLTZ[2] egy szellemes megjegyzése után volt lehetséges. Gondolatát általánosabban úgy lehet megfogalmazni, hogy bizonyos alkalmazásokhoz célszerű a hatványösszegeket *súlyozva* vizsgálni. Az előző vizsgálatokban a súly mindig 1 volt; BUCHHOLTZ észrevétele abban állott, hogy (6.4)-ben célszerű az

$$(6.6)\qquad n^{-\frac{1}{\nu}}$$

súlyokat bevezetni. Tétele szerint (6. 3) normálás mellett

$$(6.7)\qquad \max_{\nu=1,\dots,n} n^{-\frac{1}{\nu}} |\zeta_1^\nu + \dots + \zeta_n^\nu|^{\frac{1}{\nu}} \geqq \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)} \quad \left(> \frac{1}{5}\right).$$

Ezzel helyettesítve (6. 4)-et, eredeti bizonyításomban a második szabály a következőképp látható be. Vegyük észre, hogy a (2. 9) alatt nyert S_ν-k a *Newton—Girard* formulák szerint a z_j-gyökökkel oly módon függnek össze, hogy

$$(6.8)\qquad s_\nu = \sum_{j=1}^{n} z_j^{\nu\cdot 2^m}.$$

Ha mármost $\nu = \nu_1$ egy olyan kitevő (2. 10)-ben, melyre a maximum realizálódik, akkor

$$(6.9)\qquad M^* = \left|\frac{1}{n} s_{\nu_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1\cdot 2^m}} \leqq \left(\frac{|z_1|^{\nu_1\cdot 2^m} + \dots + |z_n|^{\nu_1\cdot 2^m}}{n}\right)^{\frac{1}{\nu_1\cdot 2^m}} \leqq |z_1|,$$

ami máris adja (2. 11)-ben az alsó becslést. A felső becsléshez használjuk (6. 7)-et, a

$$\zeta_j = \left(\frac{z_j}{z_1}\right)^{2^m} \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

választással, melyre a (6. 3) normálás nyilván teljesül. Ha $\nu = \nu_2$ azon kitevő, melyre a maximum (6. 7)-ben realizálódik, akkor

$$\frac{|z_1^{\nu_2\cdot 2^m} + z_2^{\nu_2\cdot 2^m} + \dots + z_n^{\nu_2\cdot 2^m}|^{\frac{1}{\nu_2}}}{n^{\frac{1}{\nu_2}} |z_1|^{2^m}} > \frac{1}{5}.$$

[1] ATKINSON, „On power sums of complex numbers", *Acta Math. Hung.* **12** (1961) p. 185—189.
[2] J. D. BUCHHOLTZ „Sums of powers of complex numbers". *Journ. Math. of Analysis and Appl.* **17** (1967), p. 269—279.

Vagyis

$$|z_1| < 5^{\frac{1}{2^m}} \left| \frac{S_{\nu_2}}{n} \right|^{\frac{1}{\nu_2 \cdot 2^m}},$$

azaz M^* definíciója szerint

$$|z_1| < 5^{2^{-m}} M^*. \qquad Q. e. d.$$

A III. szabály igazolására elég megjegyezni, hogy B^ν sajátértékei a $\lambda_j^{\nu \cdot 2^m}$ számok és így

$$T_r B^\nu = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{\nu \cdot 2^m}. \tag{6.10}$$

7. Térjünk rá mármost az V. szabály igazolására. Ez mutat egyes formai hasonlatosságokat D. H. LEHMER egy algoritmusával[3], melynek a mienktől való lényeges különbözőségét a lépésszám korlátlansága mellett az is mutatja, hogy annak matrixokra való alkalmazása igen nehézkes volna. Jegyezzük meg[4], hogy

$$\frac{19}{21} > 5^{-\frac{1}{16}} > \frac{9}{10}, \tag{7.1}$$

azaz az I. szabály $m=4$-gyel a fortiori adja a

$$\frac{9}{10} M \leqq |z_n| \leqq M \tag{7.2}$$

egyenlőtlenséget. Jelentse $G_j^{(1)}$ ($j=0, 1, \ldots, 11$) az V. szabályban adott jelölésekkel a

$$\begin{gathered} \frac{9}{10} M^{(0)} \leqq |z| \leqq M^{(0)} \\ \frac{(2j-1)\pi}{12} \leqq \arc z < \frac{(2j+1)\pi}{12} \end{gathered} \tag{7.3}$$

gyűrűszektort és tekintsük ebben az (5.1) alatt definiált $\zeta_j^{(1)}$-pontokat. Mint egyszerű geometriai meggondolás mutatja, $G_j^{(1)}$ le van fedve az

$$|z-\zeta_j^{(1)}| = M^{(0)} \cdot \sqrt{\frac{1}{400} + \frac{19}{5} \sin^2 \frac{\pi}{24}} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda M^{(0)} \tag{7.4}$$

körvonalak határolta körlemezekkel; (7.2) miatt tehát z_n ezen körlemezek valamelyikében benne van. Legyen tehát j_1 ezen index; így

$$|z_n - \zeta_{j_1}^{(1)}| \leqq \lambda M^{(0)}. \tag{7.5}$$

Amennyiben az $f_0(\zeta_j^{(1)})$ számok egyike sem 0 (különben készen volnánk), az V.

[3] D. H. LEHMER „A machine method for solving polynomial equations, *Journ. of the Assoc. for Computing Machinery*, 1961. Mint cikkében írja, algoritmusa az IBM 704 géptípusában realizáltatott és sikerült eliminálnia a kerekítési hibákat: ez a jelen algoritmus technikai realizációjánál hasznos lehet.

[4] Ezen számadatért M. HOPKINS és J. J. HUBERTnek (Univ. Alberta) tartozom köszönettel.

szabályban definiált $M_j^{(1)}$-ek közül $\zeta_{j_1}^{(1)}$-re, — egyenletünknek *ehhez legközelebbi* gyökét z'-vel jelölve — (7. 2) alapján

$$\frac{9}{10} M_{j_1}^{(1)} \leqq |z' - \zeta_{j_1}^{(1)}| \leqq M_{j_1}^{(1)}. \tag{7. 6}$$

Ezt (7. 5)-tel egybevetve és tekintve z' minimáldefinícióját adódik, hogy

$$\frac{9}{10} M_{j_1}^{(1)} \leqq |z' - \zeta_{j_1}^{(1)}| \leqq |z_n - \zeta_{j_1}^{(1)}| \leqq \lambda M^{(0)}.$$

Vagyis $M^{(1)}$ minimáldefiníciójával

$$M^{(1)} \leqq \frac{10}{9} \lambda M^{(0)}. \tag{7. 7}$$

De ekkor a μ_1-index (5. 2) alatti definíciójából — ha $z^{(1)}$ egyenletünknek $\zeta^{(1)} = \zeta_{\mu_1}^{(1)}$-hez legközelebbi görbe — akkor

$$|z^{(1)} - \zeta^{(1)}| \leqq M^{(1)} \leqq \frac{10}{9} \lambda M^{(0)},$$

ill.

$$\left| \frac{z^{(1)}}{\zeta^{(1)}} - 1 \right| \leqq \frac{10}{9} \lambda \frac{M^{(0)}}{|\zeta^{(1)}|},$$

és (5. 1) miatt

$$\left| \frac{z^{(1)}}{\zeta^{(1)}} - 1 \right| \leqq \frac{200}{171} \lambda = \frac{20}{19} \cdot \frac{\frac{10}{9}\lambda}{1}. \tag{7. 8}$$

8. Tegyük fel, hogy $d \geqq 2$-re

$$\begin{gathered} M^{(0)}, M^{(1)}, \ldots, M^{(d-1)} \\ \zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(d-1)} \end{gathered} \tag{8. 1}$$

már definiálva vannak éspedig úgy, hogy $\nu = 1, 2, \ldots, (d-1)$-re

$$M^{(\nu)} \leqq \frac{10}{9} \lambda \cdot M^{(\nu-1)}, \tag{8. 2}$$

továbbá $\left(|\zeta^{(1)}| = \frac{19}{20} M^{(0)} \text{ és } 2 \leqq \nu \leqq d-1\text{-re}\right)$

$$|\zeta^{(\nu)}| \leqq \frac{19}{20} M^{(0)} \left\{ 1 - \frac{10}{9} \lambda - \left(\frac{10}{9} \lambda \right)^2 - \ldots - \left(\frac{10}{9} \lambda \right)^{\nu-1} \right\} \tag{8. 3}$$

és egyenletünk alkalmas $z^{(d-1)}$ gyökére

$$\frac{9}{10} M^{(d-1)} \leqq |z^{(d-1)} - \zeta^{(d-1)}| \leqq M^{(d-1)}. \tag{8. 4}$$

Képezzük $j=0, 1, \ldots, 11$-re a

$$(8.5)\qquad G_j^{(d)}:\quad \begin{cases} \dfrac{9}{10} M^{(d-1)} \leqq |z-\zeta^{(d-1)}| \leqq M^{(d-1)} \\[2ex] \dfrac{(2j-1)\pi}{12} \leqq \operatorname{arc} z < \dfrac{(2j+1)\pi}{12} \end{cases}$$

körgyűrűszektorokat és a

$$(8.6)\qquad \zeta_j^{(d)} = \zeta^{(d-1)} + \frac{19}{20} M^{(d-1)} e^{\frac{j\pi i}{6}}$$

számokat. A $G_j^{(d)}$ tartományok ismét le vannak fedve az

$$|z-\zeta_j^{(d)}| \leqq \lambda M^{(d-1)}$$

körlemezekkel; (8. 4) miatt $z^{(d-1)}$ ezek valamelyikében benne van. Legyen tehát j_d ezen index; így

$$(8.7)\qquad |z^{(d-1)} - \zeta_{j_d}^{(d)}| \leqq \lambda M^{(d-1)}.$$

Amennyiben az $f_0(\zeta_j^{(d)})$ számok egyike sem 0 (különben készen volnánk) az V. szabályban definiált $M_j^{(d)}$-k közül $\zeta_{j_d}^{(d)}$-re — egyenletünk *ehhez legközelebbi* gyökét z''-vel jelölve — (7. 2) alapján

$$(8.8)\qquad \frac{9}{10} M_{j_d}^{(d)} \leqq |z'' - \zeta_{j_d}^{(d)}| \leqq M_{j_d}^{(d)}.$$

Ezt (8. 7)-tel egybevetve és tekintve z'' minimáldefinícióját adódik, hogy

$$\frac{9}{10} M_{j_d}^{(d)} \leqq |z''-\zeta_{j_d}^{(d)}| \leqq |z^{(d-1)} - \zeta_{j_d}^{(d)}| \leqq \lambda M^{(d-1)}.$$

Vagyis $M^{(d)}$ minimáldefiníciójával

$$(8.9)\qquad M^{(d)} \leqq \frac{10}{9} \lambda M^{(d-1)}.$$

Továbbá (8. 6)-ból

$$|\zeta^{(d)}| \geqq |\zeta^{(d-1)}| - \frac{19}{20} M^{(d-1)};$$

felhasználva (8. 3)-at és (8. 2)-t nyerjük, hogy

$$(8.10)\qquad |\zeta^{(d)}| \geqq \frac{19}{20} M^{(0)} \left\{ 1 - \frac{10}{9}\lambda - \ldots - \left(\frac{10}{9}\lambda\right)^{d-2} - \left(\frac{10}{9}\lambda\right)^{d-1} \right\}.$$

De ekkor a μ_d-index definíciójából — ha $z^{(d)}$ egyenletünknek $\zeta^{(d)} = \zeta_{\mu_d}^{(d)}$-hoz legközelebbi gyöke — akkor

$$|z^{(d)} - \zeta^{(d)}| \leqq M^{(d)} \leqq \left(\frac{10}{9}\lambda\right)^d M^{(0)},$$

azaz ebből és (8. 10)-ből

$$\left|\frac{z^{(\alpha)}}{\zeta^{(d)}}-1\right| \leqq \frac{\left(\frac{10}{9}\lambda\right)^d}{\frac{19}{20}\left\{1-\frac{10}{9}\lambda-\ldots-\left(\frac{10}{9}\lambda\right)^{d-1}\right\}}.$$

Így

(8.11)
$$\left|\frac{z^{(d)}}{\zeta^{(d)}}-1\right| < \frac{20}{19}\left(\frac{10}{9}\lambda\right)^d\cdot\frac{9-10\lambda}{9-20\lambda}.$$

Mint a

$$\sin\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}}$$

előállításból rögtön látható (7. 4) alapján, hogy

$$\lambda < \frac{81}{280},$$

mikor is

$$\frac{20}{19}\cdot\frac{9-10\lambda}{9-20\lambda} < 2,$$

azaz

$$\left|\frac{z^{(d)}}{\zeta^{(d)}}-1\right| < 2\left(\frac{9}{28}\right)^d < \frac{2}{3^d}.$$

valóban.

A VI. szabály V.-ből (6. 10) figyelembevételével adódik.

9. Az algoritmus paraméterei a technikai kivitel optimalizációja szerint esetleg másképp választandók meg; ezzel nem foglalkozunk, de megemlítünk néhány olyan kérdést, melyek az algoritmus gépi realizációjával kapcsolatban merültek fel.

I. probléma. Legyen $p_1, p_2, \ldots, p_{25}$ az első 25 prímszám, továbbá s és β két adott pozitív egész (β „nagy") és

$$\alpha = \prod_{\nu=1}^{25} p_\nu.$$

Az ismeretlen pozitív ζ számról tegyük fel, hogy tudjuk, hogy ζ^β egész szám, mely $<\alpha$ és ugyancsak ismerjük azon h_ν egészeket, melyekre

$$\xi^\beta \equiv h_\nu \bmod \mu_\nu, \qquad 0 \leqq h_\nu < \mu_\nu,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, 25.$$

Ezekből persze ξ^β a kínai maradéktétel alkalmazásával egyértelműen meghatározható és utána elvben ξ gyökvonással meghatározható. A kérdés azonban épp az, hogyan lehetne ξ-nek első s tizedes jegyét ξ^β előzetes meghatározása *nélkül* meghatározni a h_ν (legfeljebb kétjegyű) számokból és β-ból?

II. probléma. Legyen $s<l$ és tekintsük az

$$A_{1\nu}X_1 + A_{2\nu}X_2 + \ldots + A_{l\nu}X_l = 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots, s \tag{9.1}$$

homogén lineáris rendszert, ahol az $A_{\mu\nu}$-k és X_j-k *nxn*-es komplex elemű matrixok. Hogyan lehet egy nemtriviális megoldást (amely nyilván létezik) közönséges lineáris rendszerré való átírás *nélkül* algoritmikusan megadni?

III. probléma. Lehet-e az V. szabályt úgy módosítani, hogy az (1. 1) egyenlet *valamelyik* gyöke helyett egy *legkisebb abszolút értékű* gyökére adjon közelítést?

IV. probléma. Lehet-e a VI. szabályt alkalmas határátmenettel integráloperátorok sajátértékeire kiterjeszteni?

Előbbiek alapja lényegileg az I. szabály volt, tehát az algebrai egyenlet maximális és minimális *abszolútértékű* gyökeire vonatkozott. Stabilitási vizsgálatokban azonban hasonló jelentősége van a legnagyobb valós rész vagy, (ami ekvivalens feladat) a maximális képzetes rész közelítő meghatározásának. Erre vonatkozólag csupán a *D. Bernoulli*-féle gondolat legegyszerűbb formája van kidolgozva „On the approximative solution of algebraic equations" c. dolgozatomban, mely (számos sajtóhibával) a *Publ. Mathem. Debrecen* 2. kötetében jelent meg. Eszerint, ha $H_m(z)$ az

$$e^{-z^2} H_m(z) = (-1)^m (e^{-z^2})^{(m)}$$

által definiált m-edik *Hermite*-polinom és az $f_0(z)=0$ egyenlet gyökeit (2. 1) helyett

$$|Im\, z_1| \leqq |Im\, z_2| \leqq \ldots \leqq |Im\, z_n|$$

szerint indexeljük, akkor

$$|Im z_{n-1}| < Im|z_n| \tag{9.2}$$

esetén az

$$U_m = \sum_{j=1}^{n} H_m(z_j) \tag{9.3}$$

számokkal, (melyek nyilván az a_{j0} együtthatók racionális együtthatós polinomjai) fennáll a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2m}} \log \left\{ |U_m| \frac{\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)}{\Gamma(1+m)} \right\} = |Im z_n| \tag{9.4}$$

limeszreláció. Ezután tehát kézenfekvő az összefoglaló jellegű

V. probléma. Hogyan alakul az előbbiekben kifejtett elmélet hatványösszegek helyett a (8. 3) alatti U_m kifejezésekkel?

EGERVÁRY RANGCSÖKKENTŐ ALGORITMUSÁNAK TOVÁBBFEJLESZTÉSE

Írta: TEVAN GYÖRGY

EGERVÁRY rangcsökkentő algoritmusa lehetővé teszi a lineáris egyenletrendszerek áttekinthető numerikus megoldását matrixalgebrai úton, továbbá nagy segítséget nyújt a projektormatrixokkal kapcsolatos számításokhoz és ezzel összefüggésben matrixok *Jordan*-transzformációjának numerikus meghatározásához. Mindazonáltal a lineáris egyenletrendszerek megoldását az [1] cikkben közölt módszernél is nehézkessé teszi az, hogy az ismeretleneket a felső trianguláris matrixból még külön ki kell számítani: az algoritmus nem teljesen matrixalgebrai. Továbbá a *Jordan*-transzformáció kiszámítására adott módszer [2] — bár az eddigieknél egyszerűbb —, még mindig elég bonyolult.

Ez a cikk az ismertetett hátrányokat a rangcsökkentő algoritmus továbbfejlesztése útján küszöböli ki. *Az egyenletek megoldására tiszta matrixalgebrai (tenzoralgebrai) algoritmust ad, matrixok (tenzorok) Jordan-transzformációjára pedig olyat, amelynél nem kell felhasználni a Hermite-féle polinomokat és nincs szükség bizonyos együtthatók rekurzív kiszámítására.* E cikkben EGERVÁRY tételeit is ismertetjük, tenzoros alakban. A későbbi magyarázatok tehermentesítésére ezeket — az eredetitől eltérő módon — bizonyítjuk is. Így egyben egyszerűbb bizonyításokhoz is jutunk.

Fogalmak, elnevezések, jelölések

A cikkben nem metrikus n-dimenziós lineáris vektortérben [4], [5], [6], [7] és a hozzárendelt konjugált vektortérben [5], [6] operáló vegyes [7] tenzorokkal dolgozunk, amelyekkel az eredeti vektortér $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... vektorait „jobbról", a konjugált vektortér $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, ... vektorait „balról" szorozva az eredményvektor a tényezővektorok terébe esik: pl. $\mathfrak{y}=\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ és $\mathfrak{v}=\mathfrak{u}\mathfrak{A}$. A diadikus szorzást kör jelöli, az egységtenzor jele pedig $\mathfrak{J}$.

A cikk használja az $\mathfrak{A}$ tenzor jobb oldali ill. bal oldali *nullalterének* és *értéktartományának* fogalmát [6]; a nullalterek $\mathfrak{x}_0$ ill. $\mathfrak{u}_0$ vektoraira $\mathfrak{A}\mathfrak{x}_0=\mathfrak{o}$ ill. $\mathfrak{u}_0\mathfrak{A}=\mathfrak{o}$. Az értéktartomány az $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ ill. az $\mathfrak{u}\mathfrak{A}$ vektorok halmaza, miközben $\mathfrak{x}$ ill. $\mathfrak{u}$ az egész vektorteret befutja. Az irodalomtól eltérően az értéktartomány helyett a *szorzataltér* elnevezést fogjuk használni, e halmaz altérjellegének, valamint annak kihangsúlyozására, hogy elemeihez vektorokkal való szorással jutunk. Az $\mathfrak{A}$ tenzor jobb oldali szorzatalterét $S(\mathfrak{A})$-val, a bal oldalit $S'(\mathfrak{A})$-val, jobb oldali nullalterét $N(\mathfrak{A})$-val, a bal oldalit $N'(\mathfrak{A})$-val fogjuk jelölni. Ismeretes [6], hogy $S(\mathfrak{A})$ és $S'(\mathfrak{A})$ közös dimenziószámát az $\mathfrak{A}$ tenzor $\varrho(\mathfrak{A})$ rangjának, $N(\mathfrak{A})$ és $N'(\mathfrak{A})$ közös dimenziószámát az $\mathfrak{A}$ tenzor *ranghiányának*, *nullicitásának* nevezik és ez $n-\varrho(\mathfrak{A})$ értékű; ezenkívül $S'(\mathfrak{A})\perp N(\mathfrak{A})$ és $N'(\mathfrak{A})\perp S(\mathfrak{A})$. Az $\mathfrak{A}$ tenzor *invariáns alterén* oly R alteret értünk, amelyre $\mathfrak{x}\subset R$ esetén $\mathfrak{A}\mathfrak{x}\subset R$, [4], [5], [6], [7]. Könnyen belátható, hogy $S(\mathfrak{A})$, $S'(\mathfrak{A})$, $N(\mathfrak{A})$, $N'(\mathfrak{A})$ az $\mathfrak{A}$ tenzor invariáns alterei.

A cikkben külön nevet, a *redukált*-tenzor nevet adjuk az olyan $\mathfrak{B}$ tenzornak, amely saját szorzatalterét dimenziócsökkentés nélkül viszi át, tehát amelyre $S(\mathfrak{B}^2)=S(\mathfrak{B})$. Ebből következik, hogy $S(\mathfrak{B})\cap N(\mathfrak{B})=O$, mert ha volna olyan $\mathfrak{x}_1\neq\mathfrak{o}$, hogy $\mathfrak{x}_1\subset S(\mathfrak{B})$ és $\mathfrak{x}_1\subset N(\mathfrak{B})$, azaz $\mathfrak{x}_1=\mathfrak{B}\mathfrak{x}_2$ és $\mathfrak{B}\mathfrak{x}_1=\mathfrak{o}$, akkor $S(\mathfrak{B}^2)\subset S(\mathfrak{B})$ lenne. Az $S(\mathfrak{B})\cap N(\mathfrak{B})=O$ kapcsolatból következik az ortogonalitások miatt az $S'(\mathfrak{B})\cap$ $\cap N'(\mathfrak{B})=O$ összefüggés és ebből azután az $S'(\mathfrak{B}^2)=S'(\mathfrak{B})$ egyenlőség is. A redukált-tenzor elnevezést az indokolja, hogy az ilyen tenzor hatása szorzataltereire redukálódik; (nulla-sajátértékű Jordan-blokkja diagonal-blokk).

A *projektor* — a redukált tenzor különleges esete — szorzatalterének vektorait *változatlanul*, egységtenzor módjára viszi át, tehát a $\mathfrak{P}$ projektorra $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}\mathfrak{x})=\mathfrak{P}\mathfrak{x}$ bármely $\mathfrak{x}$-re, és így $\mathfrak{P}^2=\mathfrak{P}$ [2], [6], amiből $(\mathfrak{u}\mathfrak{P})\mathfrak{P}=\mathfrak{u}\mathfrak{P}$, tehát bal oldali szorzatalterének vektorait is változatlanul viszi át. Minthogy $S(\mathfrak{P})\cap N(\mathfrak{P})=O$, azért a tetszőleges $\mathfrak{x}$ vektor egyértelműen felbontható $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_S+\mathfrak{x}_N$ módra, ahol $\mathfrak{x}_S\subset S(\mathfrak{P})$ és $\mathfrak{x}_N\subset N(\mathfrak{P})$, és így $\mathfrak{P}\mathfrak{x}=\mathfrak{P}\mathfrak{x}_S+\mathfrak{P}\mathfrak{x}_N=\mathfrak{x}_S+\mathfrak{O}=\mathfrak{x}_S$. Tehát a projektort (egyik oldali) szorzat- és nullaltere, vagy az ortogonalitások figyelembevételével két szorzataltere (vagy két nullaltere) egyértelműen meghatározza.

Egerváry tételeinek egyszerű bizonyítása

I. TÉTEL.

Ha $$\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}-\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{y}_1\circ\mathfrak{v}_1\mathfrak{A}}{\mathfrak{v}_1\mathfrak{A}\mathfrak{y}_1}\quad(\mathfrak{v}_1\mathfrak{A}\mathfrak{y}_1\neq0),\quad\textit{akkor}\quad\varrho(\mathfrak{A}_1)=\varrho(\mathfrak{A})-1.$$

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{A}\mathfrak{x}_0=\mathfrak{o}$, akkor $\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_0=\mathfrak{o}$, tehát $N(\mathfrak{A})\subseteqq N(\mathfrak{A}_1)$. Továbbá $\mathfrak{A}\mathfrak{y}_1\neq\mathfrak{o}$ és $\mathfrak{A}_1\mathfrak{y}_1=\mathfrak{o}$, tehát $N(\mathfrak{A})\subset N(\mathfrak{A}_1)$. Másrészt $N(\mathfrak{A}_1)$ dimenziószáma csak *eggyel* lehet nagyobb $N(\mathfrak{A})$ dimenziószámánál, mert $\mathfrak{y}_0\subset N(\mathfrak{A}_1)$ esetén kell, hogy

$$\mathfrak{A}\left(\mathfrak{y}_0-\frac{\mathfrak{v}_1\mathfrak{A}\mathfrak{y}_0}{\mathfrak{v}_1\mathfrak{A}\mathfrak{y}_1}\mathfrak{y}_1\right)=\mathfrak{o},$$

azaz $\mathfrak{y}_0$ nem lehet lineárisan független az $N(\mathfrak{A})$ vektoraival és $\mathfrak{y}_1$-gyel generált altér vektoraitól. Így az $\mathfrak{A}_1$ tenzor nullicitása éppen eggyel nagyobb, rangja eggyel kisebb az $\mathfrak{A}$ tenzorénál. *Qu. e. d.*

Megjegyzés. Az $\mathfrak{A}_1$ tenzor nullalterei éppen az $\mathfrak{y}_1$ ill. $\mathfrak{v}_1$ segédvektorral bővülnek az $\mathfrak{A}$ tenzor nullaltereihez képest.

Következmény. Az

$$\mathfrak{A}_k=\mathfrak{A}_{k-1}-\frac{\mathfrak{A}_{k-1}\mathfrak{y}_k\circ\mathfrak{v}_k\mathfrak{A}_{k-1}}{\mathfrak{v}_k\mathfrak{A}_{k-1}\mathfrak{y}_k};\quad\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A}$$

rangcsökkentő algoritmust egymás után alkalmazva, mindig eggyel kisebb rangú tenzorhoz jutunk. Ha $\varrho(\mathfrak{A})=r$, akkor r lépés után a zérusrangú $\mathfrak{O}$-tenzorhoz jutunk: $\mathfrak{A}_r=\mathfrak{O}$. A levont r-számú diad összege tehát éppen az $\mathfrak{A}$ tenzorral egyenlő: olyan algoritmust kaptunk, amellyel az $\mathfrak{A}$ tenzor rangszámával egyenlő számú diadra bontható.

Az I. tétel megjegyzése alapján világos, hogy a segédvektorok az algoritmusba való bevonásuk után kapott valamennyi tenzor nullalterébe kerülnek, tehát $\mathfrak{A}_k\mathfrak{y}_k=\mathfrak{o}$,

$\mathfrak{A}_{k+1}\mathfrak{y}_k = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{A}_{k+2}\mathfrak{y}_k = \mathfrak{o}$, ..., és hasonlóan $\mathfrak{v}_k\mathfrak{A}_k = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{v}_k\mathfrak{A}_{k+1} = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{v}_k\mathfrak{A}_{k+2} = \mathfrak{o}, \ldots$. Így tehát nem tudunk bevonni az algoritmusba oly segédvektort, amely az előzőleg bevont (ugyanolyan oldali) segédvektorok lineáris kombinációja, mert a diad egyik vektora és a nevező O-vá válnék; *az algoritmusba bevonható segédvektorok lineárisan függetlenek.*

II. TÉTEL. *A rangcsökkentő algoritmus az egységtenzort teljes, a projektorokat nem teljes biortogonális rendszert alkotó vektorok diadjainak összegeként állítja elő. Az $\mathfrak{I}-\mathfrak{P}$ projektor diadikus felbontása teljessé egészíti ki a $\mathfrak{P}$ projektor diadikus elbontásából adódó nem teljes biortogonális rendszert.*

Bizonyítás. A $\mathfrak{P}$ projektor a rangcsökkentő algoritmussal $\varrho(\mathfrak{P}) = k$-számú diad összegeként adódik:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{z}_1 \circ \mathfrak{w}^1 + \mathfrak{z}_2 \circ \mathfrak{w}^2 + \ldots + \mathfrak{z}_k \circ \mathfrak{w}^k.$$

Ebből

$$\mathfrak{P}\mathfrak{x} = (\mathfrak{w}^1 \mathfrak{x})\mathfrak{z}_1 + (\mathfrak{w}^2 \mathfrak{x})\mathfrak{z}_2 + \ldots + (\mathfrak{w}^k \mathfrak{x})\mathfrak{z}_k,$$

és így a $\mathfrak{P}$ projektor jobb oldali szorzataltérét a lineárisan független $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_k$ vektorok generálják. A projektor definíciója szerint tehát

$$\mathfrak{P}\mathfrak{z}_j = \mathfrak{z}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

ami legutóbbi egyenlőségünk szerint csak úgy állhat fenn, ha

$$\mathfrak{w}^i \mathfrak{z}_j = \delta^i_j.$$

Ha $k < n$, a biortogonális rendszer nem teljes, ha $k = n$, tehát $\mathfrak{P} = \mathfrak{I}$, akkor a kapott biortogonális rendszer teljes.

Könnyen belátható, hogy

$$(\mathfrak{I}-\mathfrak{P})^2 = \mathfrak{I}-\mathfrak{P}, \quad S(\mathfrak{I}-\mathfrak{P}) = N(\mathfrak{P}) \quad \text{és} \quad N(\mathfrak{I}-\mathfrak{P}) = S(\mathfrak{P}),$$

tehát $\mathfrak{I}-\mathfrak{P}$ $n-\varrho(\mathfrak{P}) = n-k$ rangú projektor. Így a rangcsökkentő algoritmussal a biortogonális vektorokból álló

$$\mathfrak{I}-\mathfrak{P} = \mathfrak{z}_{k+1} \circ \mathfrak{w}^{k+1} + \mathfrak{z}_{k+2} \circ \mathfrak{w}^{k+2} + \ldots + \mathfrak{z}_n \circ \mathfrak{w}^n$$

felbontás adódik, amelyhez a $\mathfrak{P}$ projektor felbontását hozzáadva a bal oldalon $\mathfrak{I}$-t kapjuk, a jobb oldalon pedig n-számú diad összegét; ennek vektorai ily módon teljes biortogonális rendszert alkotnak. *Qu. e. d.*

III. TÉTEL. *Ha*

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_k = \mathfrak{I}, \quad \text{és} \quad \mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_j = \mathfrak{O} \qquad (i \neq j),$$

akkor a $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_k$ *tenzorok projektorok, és*

$$\varrho(\mathfrak{P}_1) + \varrho(\mathfrak{P}_2) + \ldots + \varrho(\mathfrak{P}_k) = \varrho(\mathfrak{I}) = n.$$

Bizonyítás. A tétel első egyenlőségét $\mathfrak{P}_i$-vel szorozva és felhasználva a másodikat $\mathfrak{P}_i^2 = \mathfrak{P}_i$ adódik, így $\mathfrak{P}_i$ projektor. Másrészt a II. tétel szerint a $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_k$ projektorok egyenként nem teljes biortogonális rendszert adó vektorokból alkotott $\varrho(\mathfrak{P}_1), \varrho(\mathfrak{P}_2), \ldots, \varrho(\mathfrak{P}_k)$ számú diad összegeként állíthatók elő. E vektorrendszerek *együttvéve* a $\mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_j=\mathfrak{O}$ $(i \neq j)$ kapcsolat miatt *ugyancsak biortogonális rendszert alkotnak* és a $\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2+\ldots+\mathfrak{P}_k=\mathfrak{J}$ összefüggés kapcsán *teljeset*, ezért

$$\varrho(\mathfrak{P}_1)+\varrho(\mathfrak{P}_2)+\ldots+\varrho(\mathfrak{P}_k)=n. \quad Qu.\ e.\ d.$$

Megjegyzés. A III. tétel a következő változatban is érvényes:
Ha $\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2+\ldots+\mathfrak{P}_k=\mathfrak{J}$, *és a* $\mathfrak{P}_i$ *tenzorok projektorok, akkor*

$$\varrho(\mathfrak{P}_1)+\varrho(\mathfrak{P}_2)+\ldots+\varrho(\mathfrak{P}_k)=\varrho(\mathfrak{J})=n$$

és $i \neq j$ *esetén* $\mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_j=\mathfrak{O}$.

Egy tenzor (első) skalárinvariánsa, nyoma ugyanis diadjai nyomának összege és $\mathfrak{x}\circ\mathfrak{u}$ nyoma $\mathfrak{x}\mathfrak{u}$, tehát a II. tétel felhasználásával a $\mathfrak{P}$ projektor skalárinvariánsa éppen $\varrho(\mathfrak{P})$. Így azután a módosított tétel első összefüggése mindkét oldalának nyomát véve megkapjuk a másodikat. A projektorok diadikus felbontása ily módon egyenként nem teljes, összességükben teljes biortogonális vektorrendszert ad; a különböző projektorok diadjainak jobb és bal oldali vektorai tehát ortogonálisak, ezért azután fennáll a harmadik egyenlőség is. *Qu. e. d.*

Az első irányított algoritmus

A rangcsökkentő algoritmus e cikkbeli továbbfejlesztése abban áll, hogy a segédvektorokat meghatározott módon vesszük fel: az algoritmust irányítjuk.

1. TÉTEL. *Ha a O ranghiányú* $\mathfrak{A}$ *tenzorra a rangcsökkentő algoritmust oly módon alkalmazzuk, hogy az egyik, pl. a bal oldali* $\mathfrak{v}_i$ *segédvektorokra* $\mathfrak{v}_i \subset S(\mathfrak{B})$ *legyen, akkor a lehető legtöbb diad levonása után kapott* $\mathfrak{M}$ *maradéktenzorra:*

$$S(\mathfrak{M})=N(\mathfrak{B}).$$

(Az I. tétel következményének jelöléseivel $\mathfrak{M}$ a legnagyobb k-indexű $\mathfrak{A}_k$ tenzor).

Bizonyítás. Az I. tétel következményében kifejtettek alapján világos, hogy a lineárisan független $\mathfrak{v}_i$ vektorok révén $S'(\mathfrak{B})\subset N'(\mathfrak{M})$. Minthogy azonban $N'(\mathfrak{A})=O$, azért $S'(\mathfrak{B})=N'(\mathfrak{M})$, és így az ortogonalitások miatt $N(\mathfrak{B})=S(\mathfrak{M})$. *Qu. e. d.*

Megjegyzés. Ha az 1. tételben $\mathfrak{A}=\mathfrak{J}$, akkor a II. tétel szerint összegül az $\mathfrak{J}-\mathfrak{M}$ tenzort adó levont diadok vektorai biortogonálisak, így $\mathfrak{J}-\mathfrak{M}$ és vele együtt $\mathfrak{J}-(\mathfrak{J}-\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$ projektor.

Alkalmazások

a) Lineáris egyenletrendszer megoldása

Csak homogén egyenletrendszerrel kell foglalkozni [1]. A $\mathbf{Bx}=\mathbf{o}$ egyenletrendszer megoldásához a $\mathbf{B}$ matrixú tenzor nullalterét keressük. Az 1. tétel alapján az $\mathbf{E}$ egységmatrixra (az $\mathfrak{J}$ tenzor matrixára) olyan rangcsökkentő algoritmust alkalmazunk, amelynél a segédvektorok rendre a $\mathbf{B}$ matrix sorai:

$\mathbf{v}_i=\mathbf{e}_i\mathbf{B}=\mathbf{b}_i$. ($\mathbf{e}_i$-vel ill. $\mathbf{e}_i^*$-gal az $\mathbf{E}$ egységmatrix i-edik oszlopvektorát ill. sorvektorát jelöljük). Az egységmatrix helyett bármely nem szinguláris matrixból is kiindulhatnának, így azonban kényelmesebb számolni. A megoldásvektorokat a maradékmatrix további — most már megkötés nélküli — diadfelbontásának oszlopvektorai adnák. Ezt a felbontást azonban már elkerülhetjük. Ha ugyanis az algoritmus $\mathbf{y}_i$ segédoszlopvektorait az $\mathbf{e}_i$ oszlopvektorok közül választjuk, akkor $\mathbf{e}_i \subset N(\mathbf{M})$ kapcsán $\mathbf{Me}_i = \mathbf{O}$ tehát a maradékmatrixnak annyi o oszlopvektora lesz, amennyi a ranghiánya; a maradékmatrix többi oszlopvektorai adják a homogén egyenletrendszer megoldásrendszerét.

1. példa

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Bx} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{x} = ?$$

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E}\mathbf{e}_1\mathbf{b}_1^*\mathbf{E}}{\mathbf{b}_1^*\mathbf{E}\mathbf{e}_1} = \mathbf{E} - \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{b}_2^*\mathbf{P}_1\mathbf{e}_2 = 0$, ezért $\mathbf{e}_3$-at választjuk.

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 - \frac{\mathbf{P}_1\mathbf{e}_3\mathbf{b}_2^*\mathbf{P}_1}{\mathbf{b}_2^*\mathbf{P}_1\mathbf{e}_3} = \mathbf{P}_1 - \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 - \frac{\mathbf{P}_2\mathbf{e}_2\mathbf{b}_3^*\mathbf{P}_2}{\mathbf{b}_3^*\mathbf{P}_2\mathbf{e}_2} =$$

$$= \mathbf{P}_2 - \frac{1}{(-2)}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} \mathbf{b}_4^*\mathbf{P}_3 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{b}_5^*\mathbf{P}_3 = \mathbf{0}. \end{matrix}$$

Tehát $\mathbf{M} = \mathbf{P}_3$, a megoldás a $\mathbf{P}_3$ matrix utolsó két oszlopvektorának lineáris kombinációja.

b) Egy nem szinguláris matrix inverzének kiszámítása

Nyilvánvaló, hogy ha a nem szinguláris, n-dimenziós $\mathbf{C}$ matrixszal a

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|cccc} & -1 & & & \\ \mathbf{C} & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & 0 & \end{array}\right]$$

matrixú egyenletrendszerre alkalmazzuk az *a)*-ban leírt algoritmust, — ügyelve arra, hogy a $2n$-dimenziós egység-matrixnak csak az első n oszlopából válasszuk a segédoszlopvektorokat, akkor maradékmatrixként a következőt kapjuk:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & & \mathbf{C}^{-1} & & \\ \hline & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right]$$

c) Minimálpolinom meghatározása

Az $\mathbf{A}$-matrixú tenzor minimálpolinomjának meghatározására KRÜLOV módszerét [3], [4] használva, képezzük eléggé általános kezdő $\mathbf{z}$ oszlopvektorral a (balról jobbra haladva) $\mathbf{z}, \mathbf{Az}, \mathbf{A}^2\mathbf{z}, \ldots, \mathbf{A}^n\mathbf{z}$ oszlopvektorú, alulról $\mathbf{o}$ sorvektorral kiegészített $n+1$-dimenziós $\mathbf{B}$ matrixot. Mint ismeretes, a minimálpolinom együtthatóit a $\mathbf{Bx} = \mathbf{o}$ egyenletrendszer azon megoldásoszlopvektora adja, amelynek utolsó komponensei közül legtöbb a 0, és utolsó nem 0 komponense 1. Ha tehát a $\mathbf{B}$ matrixra az *a)*-ban leírt algoritmust alkalmazzuk — ügyelve arra, hogy a választható $\mathbf{e}_i$ oszlopvektorok közül mindig a *legkisebb indexűt* válasszuk segédoszlopvektoroknak —, akkor a maradékmatrix első nem $\mathbf{o}$ oszlopvektora adja a minimálpolinom együtthatóit.

2. példa. Meghatározandó az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -28 & -43 & 59 & 12 \\ 2 & -17 & -26 & 34 & 8 \\ -1 & -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & -16 & 23 & 4 \\ 1 & 6 & 11 & -16 & -1 \end{bmatrix} \text{ matrixú tenzor}$$

minimálpolinomja!

A Krülov-módszer kiindulási vektorául a $\mathbf{z}^* = [1, 1, 1, 1, 1]$ $\mathbf{z}$ oszlopvektorát választva a $\mathbf{B}$ matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & 16 \\ 1 & 1 & 3 & 7 & 13 & 21 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & -5 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E}\mathbf{e}_1\mathbf{b}_1^*\mathbf{E}}{\mathbf{b}_1^*\mathbf{E}\mathbf{e}_1} = \mathbf{E} - \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & 16 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & -7 & -11 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 - \frac{\mathbf{P}_1\mathbf{e}_2\mathbf{b}_2^*\mathbf{P}_1}{\mathbf{b}_2^*\mathbf{P}_1\mathbf{e}_2} =$$

$$= \mathbf{P}_1 - \frac{1}{(-1)}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -7 & -15 & -26 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 - \frac{\mathbf{P}_2\mathbf{e}_3\mathbf{b}_3^*\mathbf{P}_2}{\mathbf{b}_3^*\mathbf{P}_2\mathbf{e}_3} = \mathbf{P}_2 - \frac{1}{(-3)}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -9 & -18 & -30 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} \mathbf{b}_4^*\mathbf{P}_3 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{b}_5^*\mathbf{P}_3 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{b}_6^*\mathbf{P}_3 = \mathbf{0}. \end{matrix} \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}_3.$$

Tehát a minimálpolinom: $-1 + 3\lambda - 3\lambda^2 + \lambda^3 = (\lambda - 1)^3$.

3. példa. Meghatározandó az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrixú tenzor minimálpolinomja!

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -10 & -20 \\ 1 & 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E}\mathbf{e}_1 \mathbf{b}_1^* \mathbf{E}}{\mathbf{b}_1^* \mathbf{E}_1 \mathbf{e}_1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 - \frac{\mathbf{P}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{b}_2^* \mathbf{P}_1}{\mathbf{b}_2^* \mathbf{P}_1 \mathbf{e}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{b}_3^* \mathbf{P}_2 \mathbf{e}_3 = 0$, ezért $\mathbf{e}_3$ helyett $\mathbf{e}_4$-et választjuk:

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 - \frac{\mathbf{P}_2 \mathbf{e}_4 \mathbf{b}_3^* \mathbf{P}_2}{\mathbf{b}_3^* \mathbf{P}_2 \mathbf{e}_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & -44 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_4 = \mathbf{P}_3 - \frac{\mathbf{P}_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{b}_4^* \mathbf{P}_3}{\mathbf{b}_4^* \mathbf{P}_3 \mathbf{e}_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_5^* \mathbf{P}_4 = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}_4.$$

A minimálpolinom tehát $4 - 8\lambda + 8\lambda^2 - 4\lambda^3 + \lambda^4 = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$.

A második irányított algoritmus

2. TÉTEL. *Ha a rangcsökkentő algoritmust egységtenzorra oly módon alkalmazzuk, hogy az $\mathfrak{y}_i$ és $\mathfrak{v}_i$ segédvektorokra $\mathfrak{y}_i \subset S(\mathfrak{B})$, $\mathfrak{v}_i \subset S'(\mathfrak{B})$ legyen, és a $\mathfrak{B}$ tenzor redukált, akkor az $\mathfrak{M}$ maradék-projektorra a következők állnak fenn:*

$$S(\mathfrak{M}) = N(\mathfrak{B}) \text{ és } \quad S'(\mathfrak{M}) = N'(\mathfrak{B}).$$

Bizonyítás. Az 1. tételhez képest annyi az eltérés, hogy a segédvektorokat *mindkét oldalon* a leírt módon vesszük fel, és így a maradéktenzorra kapott összefüggés is *mindkét oldalra* fennáll, feltéve, hogy a $\mathfrak{B}$ tenzor redukált. Ha ugyanis a $\mathfrak{B}$ tenzor nem lenne redukált, akkor az

$$S(\mathfrak{B}) \cap N(\mathfrak{B}) = K(\mathfrak{B}), \quad S'(\mathfrak{B}) \cap N'(\mathfrak{B}) = K'(\mathfrak{B})$$

$$S(\mathfrak{B}) \setminus K(\mathfrak{B}) = S_1(\mathfrak{B}) \quad \text{és} \quad S'(\mathfrak{B}) \setminus K'(\mathfrak{B}) = S_1'(\mathfrak{B})$$

jelölésekkel az algoritmust először az $\mathfrak{y}_i \subset S_1(\mathfrak{B})$, $\mathfrak{v}_i \subset S_1'(\mathfrak{B})$ segédvektorokkal hajtva végre az $S_1(\mathfrak{B})$ dimenziószámával egyenlő $k-1$-számú diad levonása után a $\mathfrak{P}_{k-1}$ projektort kapjuk, és az $\mathfrak{y}_k \subset K(\mathfrak{B})$, $\mathfrak{v}_k \subset K'(\mathfrak{B})$ segédvektorokkal már nem tudnánk folytatni az algoritmust, mert $\mathfrak{y}_k \perp \mathfrak{v}_k$;

$$\mathfrak{y}_k \subset K(\mathfrak{B}) \subset N(\mathfrak{B}) \perp S_1'(\mathfrak{B}) = N'(\mathfrak{P}_{k-1}),$$

és így

$$\mathfrak{y}_k \subset S(\mathfrak{P}_{k-1}), \quad \mathfrak{P}_{k-1}\mathfrak{y}_k = \mathfrak{y}_k,$$

tehát $\mathfrak{v}_k \mathfrak{P}_{k-1} \mathfrak{y}_k = \mathfrak{v}_k \mathfrak{y}_k = 0$, a nevező 0-vá válna. *Qu. e. d.*

Megjegyzés. A bizonyításból következik, hogy a 2. tétel szerinti algoritmus alkalmas annak eldöntésére, hogy a $\mathfrak{B}$ tenzor redukált-e: ha az algoritmus úgy szakad meg, hogy *csak a nevezőbe* kerülne 0, akkor a $\mathfrak{B}$ tenzor *nem redukált.*

Alkalmazás

A tér felbontása az $\mathfrak{A}$ tenzor sajátértékeihez tartozó bal és jobb oldali invariáns alterekre.

Az $\mathfrak{A}$ tenzor λ_i sajátértékéhez tartozó invariáns alterek:

$$N[(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{J})^{s_i}] \quad \text{és} \quad N'[(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{J})^{s_i}],$$

ahol s_i az $\mathfrak{A}$ tenzor minimálpolinomjában a λ_i sajátértékhez tartozó kitevő. Az $(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{J})^{s_i}$ tenzor *redukált,* mert a λ_i-hez tartozó minden fővektort megsemmisít, a $\lambda_j \neq \lambda_i$ sajátértékhez tartozókat pedig az

$$(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{J})^{s_i} = [(\mathfrak{A} - \lambda_j \mathfrak{J}) + (\lambda_j - \lambda_i) \mathfrak{J}]^{s_i}$$

összefüggésnek a binominális tétellel kifejtett alakja kapcsán ugyanazon sajátértékhez tartozókba viszi át; így

$$N[(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{J})^{s_i}] \cap S[(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{J})^{s_i}] = 0.$$

Tehát a 2. tételt az $(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{J})^{s_i}$ tenzorra alkalmazva a kapott $\mathfrak{M}_i$ projektor szorzatalterei éppen a keresett invariáns alterek. A számítás lerövidíthető, ha az algoritmust $\mathfrak{M}_2$ meghatározásától kezdve nem az egységtenzorral, hanem az $\mathfrak{J} - \sum_{p=1}^{i-1} \mathfrak{M}_p$

tenzorral kezdjük. Erre a lehetőséget a $\sum \mathfrak{M}_i = \mathfrak{I}$ összefüggés fennállása és a III. tétel adja meg.

4. példa. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 21 & 37 & -54 & -6 \\ 2 & 15 & 26 & -40 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 12 & -16 & -2 \\ 1 & 4 & 7 & -11 & -1 \end{bmatrix}$$

matrixú tenzor sajátértékeihez tartozó invariáns altereket! A tenzor minimálpolinomja — a számítást mellőzve —:

$$(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda+2).$$

$$\lambda_1 = 1, \quad s_1 = 2;$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}-\mathbf{E})^2 = \begin{bmatrix} 0 & -87 & -144 & 201 & 30 \\ 0 & -58 & -96 & 134 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -29 & -48 & 67 & 10 \\ 0 & -8 & -12 & 16 & 4 \end{bmatrix};$$

A $\mathbf{B}\mathbf{e}_i = \mathbf{c}_i$ és $\mathbf{e}_i^* \mathbf{B} = \mathbf{b}_i$ jelöléssel

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E}\mathbf{c}_5 \mathbf{b}_5^* \mathbf{E}}{\mathbf{b}_5^* \mathbf{E}\mathbf{c}_5} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 30 & 45 & -60 & -15 \\ 0 & 22 & 30 & -40 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & -18 & -5 \\ 0 & 4 & 6 & -8 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 - \frac{\mathbf{P}_1 \mathbf{c}_2 \mathbf{b}_4^* \mathbf{P}_1}{\mathbf{b}_4^* \mathbf{P}_1 \mathbf{c}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_2 \mathbf{c}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_2 \mathbf{c}_4 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{P}_2 \mathbf{c}_3 = \mathbf{0}, \quad \text{Tehát } \mathbf{M}_1 = \mathbf{P}_2.$$

$\lambda_2 = -1$, $s_2 = 1$; most tehát

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 21 & 37 & -54 & -6 \\ 2 & 16 & 26 & -40 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 12 & -15 & -2 \\ 1 & 4 & 7 & -11 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{E} - \mathbf{M}_1 = \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_4 = \mathbf{P}_3 - \frac{\mathbf{P}_3 \mathbf{c}_2 \mathbf{b}_4^* \mathbf{P}_3}{\mathbf{b}_4^* \mathbf{P}_3 \mathbf{c}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 18 & -24 & -6 \\ 0 & 8 & 12 & -16 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_4 \mathbf{c}_1 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}_4 \mathbf{c}_3 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}_4 \mathbf{c}_4 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}_4 \mathbf{c}_5 &= \mathbf{0}. \end{aligned} \qquad \text{Így} \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -2.$$

$$\mathbf{M}_3 = \mathbf{E} - \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -15 & -24 & 33 & 6 \\ 0 & -10 & -16 & 22 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 & -8 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tehát a λ_2 és λ_3 sajátértékhez egy-egy sajátvektorpár tartozik, a λ_1 sajátértékhez tartozó, $\mathbf{M}_1$-gyel jellemzett altér pedig többdimenziós. (Ennek az altérnek további felbontásával a 6. példában foglalkozunk.)

A harmadik irányított algoritmus

3. TÉTEL. *Legyen* $\mathfrak{x}_i$ *ill.* $\mathfrak{y}_i$ *az* $\mathfrak{A}$ *tenzor* λ *sajátértékéhez tartozó jobb oldali ill. bal oldali k-hosszúságú fővektorláncának* [8] *i-edrendű fővektora, és* $\mathfrak{P}$ *oly projektor, amelyre* $\mathfrak{x}_i \subset S(\mathfrak{P})$ és $\mathfrak{y}_i \subset S'(\mathfrak{P})$; $(i = 1, 2, \ldots, k)$. *Ha a* $\mathfrak{P}$ *projektorra olyan rangcsökkentő algoritmust alkalmazunk, amelynek* y_i *és* v_i *segédvektoraira* $\mathfrak{y}_i = \mathfrak{x}_{k+1-i}$

és $\mathfrak{v}_i = \mathfrak{h}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, *akkor a levont diadok jobb oldali vektorai megegyeznek a felvett* $\mathfrak{f}_{k+1-i}$ *fővektorokkal, bal oldali vektorai pedig a* $\mathfrak{h}_i$ *fővektorok által generált altérbe eső, az* $\mathfrak{f}_{k+1-i}$ *jobb oldali fővektorokkal biortogonális rendszert alkotó* $\mathfrak{h}_i'$ *bal oldali fővektorok.*

Bizonyítás. Minthogy $\mathfrak{h}_i \mathfrak{P} = \mathfrak{h}_i$, a $\mathfrak{h}_1', \mathfrak{h}_2', \mathfrak{h}_3', \ldots$ egymás utáni képzése alapján világos, hogy ezek a $\mathfrak{h}_i$ vektorok lineáris kombinációi. Továbbá, ha az algoritmust tetszőleges segédvektorokkal továbbfolytatnánk, akkor a $\mathfrak{P}$ projektor II. tétel szerinti felbontásához jutnánk; így a felbontás bármely része is (nem teljes) reciprok rendszer, az egyes lépéseknél kapott tenzorok pedig projektorok. Másrészt a fővektorlánc képzése szerint

$$\mathfrak{f}_{k-m} = (\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{J})^m \mathfrak{f}_k \quad \text{és} \quad \mathfrak{h}_p = \mathfrak{h}_k (\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{J})^{k-p}$$

$$(p = 1, 2, \ldots, m),$$

tehát

$$\mathfrak{h}_p \mathfrak{f}_{k-m} = \mathfrak{h}_k (\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{J})^{k+m-p} \mathfrak{f}_k = 0.$$

Így $\mathfrak{f}_{k-m} \perp \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_m$. Az m lépés után kapott P_m projektorra az I. tétel következményében leírtak alapján $N'(\mathfrak{P}_m) = N'(\mathfrak{P}) \cup H_m$, ahol H_m a $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_m$ vektorok által generált altér. Minthogy

$$\mathfrak{f}_{k-m} \subset S(\mathfrak{P}) \perp N'(\mathfrak{P}) \quad \text{és} \quad \mathfrak{f}_{k-m} \perp H_m,$$

azért

$$\mathfrak{f}_{k-m} \perp N'(\mathfrak{P}_m), \quad \text{tehát} \quad \mathfrak{f}_{k-m} \subset S(\mathfrak{P}_m),$$

$\mathfrak{P}_m \mathfrak{f}_{k-m} = \mathfrak{f}_{k-m}$, a jobb oldali fővektorok változatlanul kerülnek be az algoritmus diadjaiba. *Qu. e. d.*

Alkalmazás

Az $\mathfrak{A}$ *tenzor Jordan-transzformációjának kiszámítása.* Legyen $\mathfrak{M}$ olyan projektor, amelyre

$$S(\mathfrak{M}) = N[(\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{J})^s]$$

$$S'(\mathfrak{M}) = N'[(\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{J})^s],$$

ahol s a λ sajátértékhez tartozó minimálpolinomkitevő. (Vö. a 2. tétel alkalmazásával.) Az $\mathfrak{M}$ szorzataltereiből olyan vektorpárt választunk ki, amelyeket $(\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{J})^{s-1}$ nem semmisít meg. Ezekből az s-edrendű fővektorokból $\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{J}$-vel való beszorzásokkal kiszámítjuk az s hosszúságú jobb és bal oldali fővektorláncot és $\mathfrak{M}$ kiindulási tenzorral alkalmazzuk a 3. tételt. Ezután a maradék projektorral és annak szorzataltereiben levő leghosszabb jobb és bal oldali fővektorlánccal ismét elvégezzük a számítást stb. Végül a maradék projektor $\mathfrak{O}$ lesz, több fővektorlánc nincs. A kapott biortogonális fővektorrendszer (egy adott bázisban) az egyik lehetséges keresett transzformációs matrixot adja.

5. példa. Számítsuk ki a 2. példában megadott tenzor *Jordan*-transzformációját! A 2. példa szerint a minimálpolinom: $(\lambda-1)^3$. Egyetlen sajátérték van, tehát $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{I}$.

$$\mathbf{A}-\mathbf{E}=\begin{bmatrix} 1 & -28 & -43 & 59 & 12 \\ 2 & -18 & -26 & 34 & 8 \\ -1 & -1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & -16 & 22 & 4 \\ 1 & 6 & 11 & -16 & -2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{y}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix};\quad \mathbf{y}_2=(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{y}_3=\begin{bmatrix}-28\\-18\\-1\\-10\\6\end{bmatrix};\quad \mathbf{y}_1=(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{y}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\\1\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}_3^*=[0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0];$$

$$\mathbf{v}_2^*=\mathbf{v}_3(\mathbf{A}-\mathbf{E})=[-1\quad -1\quad -3\quad 5\quad 0];$$

$$\mathbf{v}_1^*=\mathbf{v}_2^*(\mathbf{A}-\mathbf{E})=[\ 0\quad -1\quad -2\quad 2\quad 0];$$

$$\mathbf{P}_1=\mathbf{E}-\frac{\mathbf{E}\mathbf{y}_3\mathbf{v}_1^*\mathbf{E}}{\mathbf{v}_1^*\mathbf{E}\mathbf{y}_3}=\mathbf{E}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}[0\quad -1\quad -2\quad 2\quad 0]=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&-2&2&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_1-\frac{\mathbf{P}_1\mathbf{y}_2\mathbf{v}_2^*\mathbf{P}_1}{\mathbf{v}_2^*\mathbf{P}_1\mathbf{y}_2}=\mathbf{P}_1-\frac{\mathbf{y}_2\mathbf{v}_2^*\mathbf{P}_1}{\mathbf{v}_2^*\mathbf{y}_2}=\mathbf{P}_1+\begin{bmatrix}-28\\-18\\-1\\-10\\6\end{bmatrix}[-1\quad 0\quad -1\quad 3\quad 0]=$$

$$=\begin{bmatrix}29&0&28&-84&0\\18&0&16&-52&0\\1&0&2&-3&0\\10&0&10&-29&0\\-6&0&-6&18&1\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_2-\frac{\mathbf{y}_1\mathbf{v}_3^*\mathbf{P}_2}{\mathbf{v}_3^*\mathbf{y}_1}=\mathbf{P}_2+\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}[1\quad 0\quad 2\quad -3\quad 0]=\begin{bmatrix}30&0&30&-87&0\\20&0&20&-58&0\\0&0&0&0&0\\10&0&10&-29&0\\-5&0&-4&15&1\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{P}_3\mathbf{e}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_1 = (\mathbf{A}-\mathbf{E})\,\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{w}_2^* = [10 \quad 0 \quad 10 \ -29 \quad 0]$$

$$\mathbf{w}_1^* = \mathbf{w}_2^*(\mathbf{A}-\mathbf{E}) = [0 \quad 0 \quad 4 \quad 2 \quad 4].$$

A második fővektorlánc kettőnél nem lehet hosszabb, mert az összes dimenziószám öt.

$$\mathbf{P}_4 = \mathbf{P}_3 - \frac{\mathbf{z}_2\mathbf{w}_1^*\mathbf{P}_3}{\mathbf{w}_1^*\mathbf{z}_2} = \mathbf{P}_3 - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}[0 \quad 0 \quad 4 \quad 2 \quad 4] =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 60 & 0 & 60 & -174 & 0 \\ 40 & 0 & 40 & -116 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 20 & -58 & 0 \\ -10 & 0 & -10 & 29 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_5 = \mathbf{P}_4 - \frac{\mathbf{z}_1\mathbf{w}_2^*\mathbf{P}_4}{\mathbf{w}_2^*\mathbf{z}_1} = \mathbf{P}_4 - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}[10 \quad 0 \quad 10 \ -29 \quad 0] = \mathfrak{O}.$$

Tehát egy hármas és egy kettes hosszúságú fővektorlánc van. Így

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -28 & -43 & 59 & 12 \\ 2 & -17 & -26 & 34 & 8 \\ -1 & -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & -16 & 23 & 4 \\ 1 & 6 & 11 & -16 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -28 & 0 & 12 & 0 \\ 2 & -18 & 1 & 8 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & 0 & -8 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -8 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & -29 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

6. példa. Fejezzük be a 4. példában megadott tenzor Jordan-transzformációját! A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó projektormatrix:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}-\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 21 & 37 & -54 & -6 \\ 2 & 14 & 26 & -40 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 12 & -17 & -2 \\ 1 & 4 & 7 & -11 & -2 \end{bmatrix};$$

$$s_1 = 2; \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{M}_1 \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y}_1 = (\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}_2^* = \mathbf{e}_5^* \mathbf{M}_1 = [0 \quad 2 \quad 3 \quad -4 \quad 0],$$

$$\mathbf{v}_1^* = \mathbf{v}_2^*(\mathbf{A}-\mathbf{E}) = [1 \quad 0 \quad 1 \quad -3 \quad 0].$$

$$\mathbf{P}_4 = \mathbf{M}_1 - \frac{\mathbf{y}_2 \mathbf{v}_1^* \mathbf{M}_1}{\mathbf{v}_1^* \mathbf{y}_2} = \mathbf{M}_1 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 1 \quad -3 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_5 = \mathbf{P}_4 - \frac{\mathbf{y}_1 \mathbf{v}_2^* \mathbf{P}_4}{\mathbf{v}_2^* \mathbf{y}_1}.$$

$$\mathbf{P}_5 = \mathbf{P}_4 - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \quad 2 \quad 3 \quad -4 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 2 \quad -2 \quad 0]$$

Tehát $\mathbf{M}_1$ egy kettes és egy egyes hosszúságú fővektorláncot tartalmaz. Így — felhasználva a 4. példa eredményeit is —

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 21 & 37 & -54 & -6 \\ 2 & 15 & 26 & -40 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 12 & -16 & -2 \\ 1 & 4 & 7 & -11 & -1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -5 & -8 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

IRODALOM

[1] EGERVÁRY J.: Matrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldására, *MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* II. kötet 1953.

[2] J. EGERVÁRY: Über eine konstruktive Methode zur Reduktion einer Matrix auf die Jordan'sche Normalform, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.* **10** (1959) FASC. 1—2.

[3] D. K. FADDEEV—V. N. FADDEEVA: *Vücsiszlitelnüje metodü linejnoj algebrü,* Moszkva—Leningrád, 1963.

[4] F. R. GANTMACHER: *Teorija matricü,* Moszkva, 1954.

[5] I. M. GELFAND: *Lekcii po linejnoj algebre,* Moszkva, 1951.

[6] P. R. HALMOS: *Finite-Dimensional Vector Spaces, Princeton.*

[7] J. A. SCHONTEN: *Ricci-Calculus,* Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954.

[8] R. ZURMÜHL: *Matrizen.* (Eine Darstellung für Ingenieure.) Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958.

(Beérkezett: 1967. III. 27)

THE DEVELOPEMENT OF EGERVÁRY'S RANK-DIMINISHING OPERATIONS

BY GY. TEVAN

Summary

The present paper deals with a developement of Egerváry's rank-diminishing method by the suitable taking of the helpvectors. Thus simple methods are obtained to solve linear equations-systhems and to determine the minimal-polynom and the Jordantransformation of a matrix.

RELAXÁCIÓS PONTELHELYEZÉSI ELJÁRÁSOK VIZSGÁLATA DISZKRÉT GEOMETRIAI SZEMPONTBÓL

Írta: RUDA MIHÁLY

Bevezetés

A diszkrét geometriában gyakran fordul elő olyan feladat, hogy adott (n) számú pontot kell egy alakzaton úgy elhelyezni, hogy a pontok egymástól mért távolságainak a minimuma a lehető legnagyobb legyen. (Egy ilyen pontelrendezést extremális rendszernek nevezünk.)

A fenti problémára még olyan aránylag egyszerű alakzat esetén — mint egy gömbfelület — sem ismeretes tetszőleges n-re általános megoldás. Néhány extremális elrendezést ismerünk kis pontszámra, illetve aszimptotikusan végtelen nagy n esetére vannak becslések.[1] Így magától merül fel a kérdés, hogy vajon van-e egységes eljárás extremális pontrendszerek meghatározására. Olyan algoritmusok vizsgálata volt a célunk, amelyektől remélhettük, hogy maximumot vagy legalábbis lokális maximumot szolgáltatnak a pontok közti távolságok minimumára. Ebben a cikkben néhány relaxációs eljárást[2] tettünk vizsgálat tárgyává ilyen szempontból. Az itt vizsgált eljárások azonban nem minden esetben vezetnek abszolút vagy lokális szélsőértékhez.

Megjegyezhető, hogy a fenti probléma fő alkotórészei — az elhelyezendő elemek (pontok), a felület illetve az elemek elhelyezésére szolgáló alakzat (gömb), a távolságfogalom (a gömb két pontja közti, egy legrövidebb főkörív ívhossza) és az extremalitási kritérium (a pontpárok közti minimális távolság maximális volta) — mind természetes módon általánosíthatók. Így az érdekes rokon problémáknak gazdag sokaságát kaphatjuk; vizsgálhatjuk ponthalmazoknak más ponthalmazokban más metrika illetve más extremalitási kritériumok szerinti elhelyezéseit.

Ezekkel a problémákkal teljes általánosságban itt nem foglalkozunk, csupán néhány speciális eset relaxációs módszerekkel való megoldhatóságát vizsgáljuk meg. Megmaradunk pontok elhelyezésénél és annál az extremalitási kritériumnál, hogy a pontok egymástól mért távolságainak a minimuma a maximális értéket vegye fel; a pontok elhelyezésére azonban különböző tartományokat szerepeltetünk különféle metrikákkal.

A szerző köszönetét fejezi ki FEJES TÓTH LÁSZLÓ professzornak és HEPPES ALADÁRnak értékes tanácsaikért és támogatásukért.

Általános megjegyzések, egzisztencia, unicitás

Bevezetésképpen bemutatunk két példát a különböző metrikák szerepével kapcsolatban. Ezekből a példákból látható lesz az, hogy a metrika megválasztása lényegesen befolyásolhatja az eredményt.

[1] Ld. [2], [3] és [4].
[2] Ezekről ld. [1], [5].

1. Helyezzünk el n számú pontot egy euklideszi térben levő egyszerű íven extremálisan, ha *a)* két pont távolsága a görbének e pontok között levő darabjának az ívhossza, *b)* két pont távolsága ezeknek az euklideszi térbeli távolsága (1. ábra).

2. Helyezzünk el n számú pontot egy gömbfelület konkáv, zárt tartományában levő egyszerű íven extremálisan, ha két pont távolsága

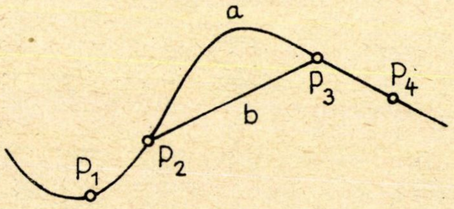
a) az euklideszi térbeli távolság,

b) a gömbi távolság (két pont közti egy legrövidebb főkörív hossza),

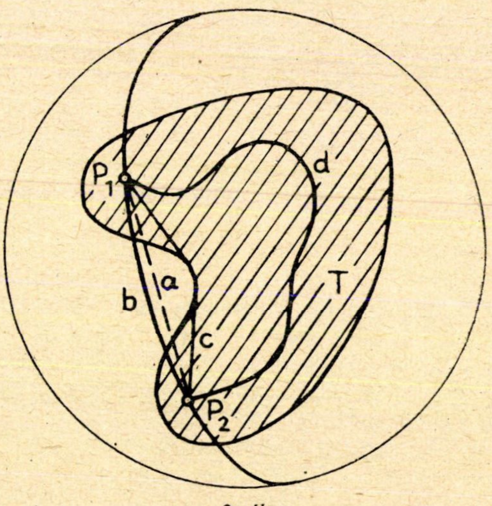
c) két pontot összekötő legrövidebb — az adott tartományban haladó — pálya ívhossza,

d) a két pontnak a tartományba írt görbén mért („belső") távolsága (2. ábra).

Más metrikák esetén más-más megoldások is felléphetnek (például, ha egy ellipszisen helyezünk el három pontot extremálisan az 1. példában bemutatott kétféle metrika szerint). Egyetlen metrika esetén is előfordulhat azonban több megoldás, de az is, hogy nem létezik extremális pontelrendezés. Az előzőre példa: egy körlapon helyezzünk el hat pontot úgy, hogy *a)* egy pont a kör középpontjában, a többi egy, a körbe írt szabályos ötszög csúcsain *b)* mind a hat egy, a körbe írt szabályos hatszög csúcsain heyezkedjék el. Mindkét esetben egy extremális elrendezésről van szó (a minimális távolság éppen a kör sugara), sőt az *a)* esetben tetszőleges sok különböző elrendezés is adható, hiszen nem szükséges, hogy a kerületen levő pontok pontosan egy szabályos ötszög csúcsain legyenek. Arra az esetre, amikor nem létezik megoldás, példa egy korlátos nyílt intervallumon két pont extremális elhelyezése az egyenes szokásos metrikája szerint (megjegyezzük, hogy példánkban létezik ugyan a minimális távolság felső határa, de ezt az értéket az adott tartományon belül soha semmilyen pontelrendezés nem veheti fel). Így tehát általánosságban sem egzisztencia, sem unicitási tétel nem mondható ki. Elég tág körben azonban igaz egy egzisztencia tétel:



1. ábra



2. ábra

Egy teljes, metrikus tér korlátos, zárt részhalmazán mindig létezik extremális pontrendszer.

Tekintsük ugyanis az adott részhalmazon az összes — n pontból álló — pontrendszert. Ezek mindegyikéhez tartozik egy minimális távolság. Az így adódó minimális távolságok által alkotott számhalmaz korlátos (az alakzat korlátossága miatt), létezik tehát felső határa, és így tartalmaz egy, a felső határhoz konvergáló sorozatot is. Tekintsük a pontrendszereknek ehhez a konvergens számsorozathoz tartozó sorozatát. Válasszunk ki a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokból álló rendszerek mindegyikéből egy P_i pontot. A részhalmaz korlátossága miatt a P_i pontok sorozatából kiválasztható egy konvergens részsorozat. Ezután csak az ehhez a konvergens részsorozathoz tartozó pontrendszereket nézzük! Végigmenve így mind az n ponton, végül egy olyan pontrendszersorozatot kapunk, amelynek minden pontja konvergens sorozatot ad. Ezek a teljesség miatt egy, az adott metrikus térhez tartozó pontrendszert határoznak meg határértékként. Ebben a rendszerben a pontok közti, minimális távolság szintén határérték (a metrikus tér ún. háromszögaxiómája miatt), de mivel a fentiek szerint a minimális távolság határértéke most éppen a felső határ, ezért éppen egy extremális rendszert kaptunk, amely az alakzat zártsága miatt hozzátartozik az alakzathoz.

Könnyű belátni, hogy a fenti feltételek nem szükségesek, de nyilván adható példa olyan esetre is, amikor ezek a feltételek nem teljesülnek és extremális pontrendszer sem létezik. Euklideszi térben levő nyílt halmazokon pl. nincs extremális elrendezés, hiszen bármely pontrendszer egy megfelelő pontból kivetítve, valamilyen értékkel nagyítható a nyílt halmazon belül. Általában metrikus terekben ez már nem mondható ki ilyen általánosan. Tekintsük ugyanis például egy gömbfelület nyílt tartományát, amely tartalmazza a gömbfelület egyik felét! Ez egy metrikus térben levő korlátos nyílt halmaz (távolságként a gömbi távolságot vesszük), mégsem mondható, hogy nem létezhet rajta extremális rendszer, hiszen három pontot el tudunk rajta helyezni extremálisan (egy főkörbe írt szabályos háromszög csúcsain). Ha viszont az adott R metrikus tér kölcsönösen egyértelműen leképezhető egy euklideszi térre, és az R tér minden R_1, R_2, R_3, R_4 pontjára igaz, hogy $\varrho(R_1, R_2) > \varrho(R_3, R_4)$ ha $\varrho(P_1, P_2)$ is nagyobb, mint $\varrho(P_3, P_4)$, ahol P_1, P_2, P_3, P_4 az R_1, R_2, R_3, R_4 euklideszi térbeli képei, akkor az euklideszi térre vonatkozó vetítéses eljárás megfelelője itt is véghezvihető, tehát az R metrikus tér egy korlátos, nyílt részhalmazán szintén nem létezhet extremális pontrendszer.

Ezek után rátérünk cikkünk tulajdonképpeni tárgyára.

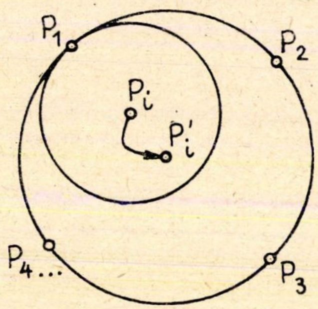
Relaxációs eljárások

Gyakorlati szempontból a fenti egzisztencia és unicitási problémákon kívül az is érdeklődésre tarthat számot, hogy ha léteznek extremális elrendezések, akkor azok milyenek, illetve hogyan állíthatók elő. A bevezetésben említett relaxációs eljárásokkal próbáltuk megoldani ezt a problémát. Egy ilyen eljárás úgy képzelhető el, hogy — a lineáris egyenletrendszerek egy közelítő megoldásához hasonlóan — egy tetszőleges elrendezésből kiindulva, a pontokat valamilyen meghatározott rendszer szerint úgy mozgatjuk, hogy lépésenként mindig közelebb kerülünk (de legalábbis nem távolodunk) a kívánt helyzethez. Így, mivel a kívánt — extremális — helyzet éppen olyan, hogy a pontok egymástól a lehető legtávolabb vannak, az eljárásokat is úgy választjuk meg, hogy az egyes lépések után a pontok közti távolságok lehetőleg nőjenek. Ezen az alapon a következő relaxációs módszereket vizsgáltuk meg:

I. Egyenként mozgatjuk a pontokat $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ egy előre meghatározott ciklikus sorrend szerint úgy, hogy az éppen elmozdított P_i pont a lehető legtávolabb kerüljön a hozzá legközelebbi pontoktól (vagyis, hogy a P_iP_j, $i \neq j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ távolságok minimuma a legnagyobbra nőjön). Ha a P_iP_j távolságok minimumát a P_i bármilyen áthelyezésével sem tudjuk növelni, akkor a P_i pont az eredeti helyén marad. Ha elérkezünk az n-edik ponthoz, akkor folytatjuk az eljárást a sorrend szerinti első ponttal.

II. Az előzővel azonos módon mozgatjuk az egyes pontokat, de nem egy rögzített sorrend szerint, hanem mindig egy olyan P_i pontot mozgatunk, amelyre a min $|P_iP_j|$ $(j=1, 2, ..., i-1, i+1, ..., n)$ a legkisebb.

III. Az I. eljáráshoz hasonlóan, ciklikus sorrend szerint mozgatjuk a pontokat, de úgy, hogy a soron következő P_i pont elmozgatásával a P_iP_j távolságok minimuma szigorúan monoton nőjön, miközben a P_i pont egy folytonos görbe mentén mozog az adott alakzaton (ld. pl. a 3. ábrán). Például, ha az alakzat egy egyszerű görbe és a pontok távolságának a köztük levő ívhosszat tekintjük, akkor ez az eljárás azt jelenti, hogy a pontok sorrendje nem változik, és az elmozdított P_i pont mindig a szomszédos pontok által meghatározott (P_kP_l) ív közepére kerül; illetve nyílt görbéknél esetleg az egyik végpontba.



3. ábra

Nézzük most meg, hogy mikor alkalmazhatók eredményesen a fenti eljárások.

Először is az a kérdés merül fel, hogy a fenti eljárások egyáltalán konvergensek-e. (Hiszen ha nem konvergálnak, akkor nem is remélhető, hogy egy meghatározott pontrendszerhez vezessenek.)

Gyakorlati szempontból az lenne a legjobb, ha véges sok lépésben véget érnének eljárásaink. Ha a pontok elhelyezésére szolgáló alakzat véges sok pontból áll, akkor nyilván teljesül ez. Végtelen sok pontból álló alakzat esetén viszont általában már nem. Például, ha egy körön akarunk — egy tetszőleges helyzetből kiindulva — három pontot extremálisan elhelyezni, akkor csak végtelen sok lépésben juthatunk el általában ehhez. (Ugyanez a helyzet többnyire nyílt vagy zárt görbén háromnál több pont esetén.) Ekkor, ha az eljárás közben az alakzatnak (kör) az egyes pontok által elfoglalt helyeit (pontjait) kiválasztjuk (megtartva az eredeti metrikát), egy megszámlálható sok pontból álló alakzatot is kapunk, ahol szintén végtelen sok lépésből állnak eljárásaink.

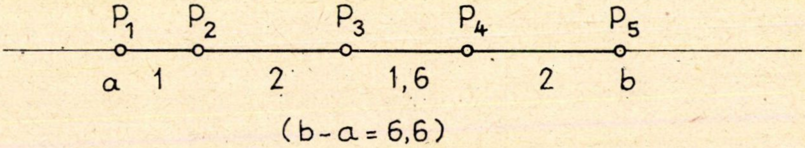
Természetesen olyan folytonos alakzat is adható, ahol véges sok lépésből áll az adott eljárások mindegyike. Így pl. ha egy szakaszon vagy egy háromszögön helyezünk el háromnál nem több pontot. Viszont hasonlóan egyszerű sokszögeknél (egy négyszögön négy pont stb.) már végtelen sok lépés is lehetséges.

Ezek után kérdéses tehát az, hogy eljárásaink végtelen sok lépés esetén egy konvergáló pontrendszersorozatot adnak-e vagy nem. Elképzelhető ugyanis (főleg ha általában a metrikus tereket tekintjük), hogy az adott alakzaton pontrendszerünk egy ilyen eljárás során állandóan mozog; mégpedig vagy úgy, hogy az egyes lépések nagysága 0-hoz tart, de az elmozdulások összege divergens sor, vagy úgy, hogy az egyes lépések nagysága sem tart 0-hoz.

A továbbiakban tárgyalt esetek olyanok, hogy a konvergencia teljesülése belátható, így csupán szélsőérték szempontjából vizsgáljuk eljárásainkat.

Érdekes, hogy a II. eljárás már olyan esetben sem vezet a kívánt eredményre, amikor például egy egyenes szakaszon (egy [a, b] zárt intervallumon) akarunk öt pontot extremális módon elhelyezni, a 4. ábra szerinti helyzetből kiindulva. (A pontok távolsága az egyenes szokásos metrikája szerint veendő.)

Látható, hogy itt a II. eljárást alkalmazva, a pontrendszer egy olyan elrendezéshez konvergál, ahol a pontok közti távolságok balról jobbra rendre 1,5333...; 1,5333...; 1,5333...; 2, az extremális elrendezésnél viszont minden távolság egyenlő (1,65) lenne.



4. ábra

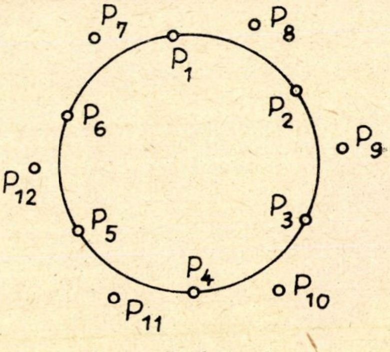
Ilyen esetekben az I. és a III. eljárások — a későbbiekben láthatóan — eredményesek, viszont ahol az általunk adott példákban ezek (I. és III.) nem vezetnek eredményre, ott a II. eljárás sem ad exrtemális rendszert. Ezért a továbbiakban ezzel az eljárással nem foglalkozunk.

Vegyük sorra most a másik két (I., III.) eljárást. Álljon először a pontok elhelyézésére szolgáló alakzat véges sok m pontból; ezen helyezzük el a $P_1, P_2, ..., P_n$ pontokat.

Ha $m \leqq n$, akkor a probléma triviális; $m<n$ esetén az alakzat legalább egy pontjába kerül legalább két különböző (P_i, P_j) pont, így a minimális távolság mindig nulla; $m=n$ esetében minden pontba pontosan egy pont jut.

Ha $m>n$, akko $\binom{m}{n}$ lehetséges elrendezés közül kell egy extremálisat kiválasztani.

Ebben az esetben az I. és a III. eljárás nem mindig vezet extremális rendszerhez. Ezt mutatja az 5. ábrán látható példa is. Az 5. ábrán levő alakzat síkbeli. A távolságot a sík szokásos metrikája szerint értelmezzük. Az alakzat 12 pontból áll. $(P_1, P_2, ..., P_{12})$. Ezen kell elhelyezni hat pontot. Legyenek $P_1, P_2, ..., P_6$ egy szabályos hatszög csúcsai, $P_7, P_8, ..., P_{12}$ pedig e köré a hatszög köré írt körön kívül úgy, hogy $P_1P_2 = P_2P_3 = ... = P_6P_1 > P_2P_9, P_9P_3, ...$ stb. és $P_7P_8, P_8P_9, ..., P_{12}P_7 > P_1P_2 ...$.



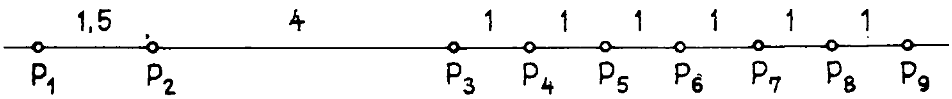
5. ábra

Ha a hat pontot $P_1, P_2, ..., P_6$-ba helyezzük, akkor a fenti eljrások szerint egyetlen pont sem mozdítható el, de az elrendezés nem extremális, hiszen a $P_7, P_8, ... P_{12}$ elrendezés „jobb" nála.

Adható ilyen példa egy egyenesen levő pontokból álló alakzat esetére is (6. ábra). Az alakzat a $P_1, P_2, ..., P_9$ pont, ezen helyezünk el öt pontot. Kiindulási helyzet a P_1, P_2, P_3, P_6, P_9; itt a minimális távolság 1,5 és ez egyik pont áthelyezésével sem nőhet, de a P_2, P_3, P_5, P_7, P_9 elrendezésnél a minimális távolság 2.

Véges sok pontból álló alakzatok után érdekes lenne megszámlálható sok pontból álló halmazokon is vizsgálni eljárásaink eredményességét. Ezzel itt nem foglalkozunk, hanem rögtön rátérünk „folytonos" alakzatok vizsgálatára.

Kontinuum számosságú ponthalmazok közül először tekintsük az egyszerű térgörbéket (ezek euklideszi térbeli korlátos, zárt halmazok) — amelyek kör vagy zárt intervallum topologikus képei — az előbbieket zárt, az utóbbiakat nyílt görbének nevezzük.



6. ábra

Eljárásaink szempontjából lényeges, hogy az elhelyezendő pontok távolságaként a két pont közti ív hosszát (belső metrika) vagy a két pontot összekötő húr hosszát (külső metrika) tekintjük-e.

Ha a távolságot belső metrika szerint mérjük és a pontokat zárt görbén helyezzük el, akkor az I. és III. eljárás egy extremális rendszerhez vezet.[3]

Ez az állítás a következő lépésekben látható be:

1. Nyilvánvaló (az adott definíciók szerint), hogy eljrásainkat (zárt görbe és belső metrika esetén) alkalmazva a szomszédos pontok közti távolságok maximuma nem nőhet.

2. Az I. eljárást alkalmazva elég sok lépés után a pontok sorrendje már nem változhat. Jelöljük ugyanis minden szóbakerülő lépésnél a maximális intervallum hosszát (két szomszédos pont közti távolságok maximumát) d-vel. Ekkor igaz, hogy:

a) Az I. eljárás egy lépése után az éppen elmozdított P_i pont $d/2$ sugarú nyílt környezetében nem lehet a rendszernek egyetlen más pontja sem. (Mivel P_i mindig olyan helyre lép, ahol maximális távolságban vannak a legközelebbi pontok.)

b) Ahhoz, hogy egy pont kilépjen a szomszédos pontjai által meghatározott ívből, ahhoz a szomszédos pontok legalább egyikének $d/2$-nél közelebb kell lennie hozzá. Viszont amikor már minden pont legalább egyszer sorra került — az első n lépés után ez bekövetkezik (n a pontok száma) — elmondható, hogy nincs olyan pont, melynek $d/2$ sugarú nyílt környezetében más pont is van, mert ha volnának ilyen pontok, akkor ezek közül legalábbis a sorrend szerint utolsó pont nem az *a)*-ban leírt módon viselkedne — a legutolsó rá vonatkozó lépésnél (figyelembe véve d monoton fogyását).

c) Az I. eljárásnál tehát már az első n lépés után sem változik a pontok sorrendje — ugyanúgy, mint a III. eljárásnál.

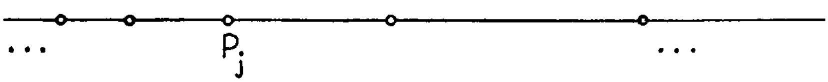
Megjegyzés: Nyílt görbe esetén a III. eljárásnál a szélső pontok rögtön a görbe végpontjaiba lépnek, így ez az eset azonos lesz a zárt görbe esetével. Az I. eljárásnál nem tudjuk, hogy a szélső pontok hogyan viselkednek, tehát erre az esetre — hacsak nem rögzítünk egy-egy pontot a végpontokban — nem vonatkozik a bizonyítás.

Ezt a megjegyzést figyelembe véve az első n lépés után mindkét eljárásról a következő mondható:

[3] Természetesen a probléma itt — még nyílt görbe esetén is — egyszerűen az, hogy — mindenféle eljárástól eltekintve — az adott görbén, „egyenletes eloszlásban" helyezzük el a pontokat. Ez közvetlenül is elvégezhető.

3. Minden egyes lépés után a szomszédos $\overset{\frown}{P_iP_j}$, $\overset{\frown}{P_jP_k}$ ívek különbségeinek abszolút értékének az összege $(\Sigma|\overset{\frown}{P_iP_j}-\overset{\frown}{P_jP_k}|)$ csak csökkenhet. (Lehet, hogy egy lépés után ez az összeg nem változik.) Így az eljárás során $\Sigma|\overset{\frown}{P_iP_j}-\overset{\frown}{P_jP_k}| = \Delta$ egy monoton fogyó, alulról korlátos számsorozatot ad (alsó korlát 0), alsó határának tehát léteznie kell, legyen ez $H \geqq 0$.

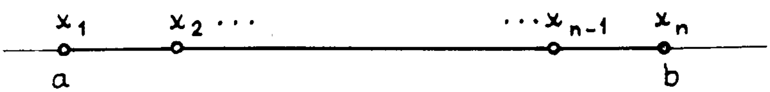
Állítás: $H=0$. Ha ugyanis $H>0$ volna, létezne tetszőleges sok lépés után is legalább egy P_j pont, hogy a mellette levő ívek különbsége $\delta_j = |\overset{\frown}{P_iP_j}-\overset{\frown}{P_jP_k}| \geqq \geqq \frac{H}{n} > 0$. Ilyenkor a P_i, P_j, P_k közül legalább az egyik elmozdul $\delta \geqq \frac{H}{4n} > 0$ értékkel. Ez az elmozdulás csak akkor nem csökkenti a Δ-t, ha az elmozduló pont melletti nagyobb ív mellett egy még nagyobb, a kisebbik mellett még kisebb ív van (7. ábra).



7. ábra

Ez azonban, az ívek egyenlőtlensége miatt, a szomszédos pontok újabb elmzodulását eredményezi. Ez a folyamat mindkét irányban lépésről lépésre terjed, mindaddig, míg egy olyan ponthoz érünk, amelynek elmozdulásával a Δ csökken. Ilyen pont nyílt görbéknél legalábbis a két utolsó előtti pont, és zárt görbéknél is van legalább egy ilyen P_i pont (hiszen a görbén levő véges sok intervallumon keresztül egy irányba haladva nem lehet, hogy az intervallumok folyton nőjenek.) A Δ ilyen — tetszőleges sok lépés utáni — H-val arányos csökkenése ellentmond a $H>0$ állításnak, tehát $H=0$, vagyis minden ív egyenlő lesz (legalábbis határértékben) az eljárás lefolytatása után. Ez a helyzet viszont éppen az extremális elrendezés.

Megjegyzés: A III. eljárásra vonatkozó bizonyítást vissza lehet vezetni a lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló ún. *Gauss—Seidel*-féle módszerre (lásd [1] 437. old.). Ugyanis ennek lépései teljesen megfelelnek a III. eljárásnak, ha azt vesszük, hogy az extremális megoldást (belső metrika szerint) a következő egyenletrendszer írja le:



8. ábra

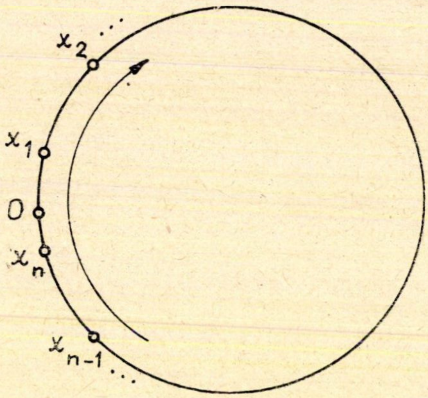
Nyílt görbére: (8. ábra) az ív (b—a) hosszúságú, ezen helyezünk el n számú pontot.

$$
\begin{aligned}
x_1 - a &= 0\\
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0\\
x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0\\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
x_{n-2} - 2x_{n-1} + x_n &= 0\\
x_n - b &= 0
\end{aligned}
$$

Zárt görbére: (9. ábra) a görbe hossza a, n pontot helyezünk el rajta. (Két pont (x_1, x_n) között rögzítünk egy kiindulási (0) pontot. Ha x_n — a kitűzött irányban — esetleg túllépi a 0-t egy d értékkel, akkor x_n értékét $a+d$-nek vesszük...).

$$\begin{array}{llr} x_n - 2x_1 + x_2 & & -a = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & & = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 & & = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & + x_{n-2} - 2x_{n-1} & = 0 \\ -2x_n + x_1 & + x_{n-1} & + a = 0 \end{array}$$

Ezekre az egyenletrendszerekre alkalmazva a *Gauss—Seidel*-eljárást, a helyes megoldáshoz konvergáló értékeket kapunk $x_1, x_2, \ldots, x_n$-re, vagyis a fenti (I., III.) eljárások is az extremális helyzethez konvergálnak.



9. ábra

A lineáris egyenletrendszerek közelítő megoldására vonatkozó ún. *Southwell*-féle relaxációs eljárásból (lásd [1] 430. oldal) kiindulva, görbékre (belső metrika esetén) a következő, egy extremális rendszerhez konvergáló eljárás adódik:

IV. A III. eljárásban adott módon mozgatjuk a pontokat, de nem egy rögzített sorrend szerint, hanem mindig azt a pontot mozgatjuk, amely (a III. eljárás szerint) a legmesszebb kerülhet eredeti helyétől.

Az eddigiekből látható, hogy a fenti (I., III., IV.) eljárások milyen szoros kapcsolatban vannak a lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló — említett — relaxációs módszerekkel. Mivel a *Gauss—Seidel-* és *Southwell*-féle eljárásokat csak lineáris egyenletrendszerek megoldására használják, kérdés, hogy vajon a (térgörbéknél belső metrika szerinti) velük analóg eljárásaink milyen eredményre vezetnek nem lineáris, két, három vagy több dimenziós alakzatok esetén.

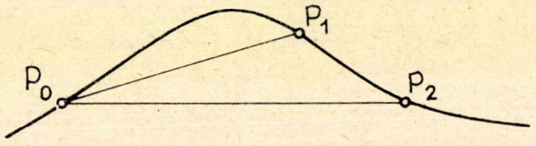
Tulajdonképpen, ha egy térgörbén a pontok távolságát külső metrika szerint tekintjük, már akkor is egy nem lineáris problémával állunk szemben. Az elhelyezendő pontok távolsága legyen a pontokat összekötő húr hossza; az adott alakzatok továbbra is nyílt és zárt térgörbék. Ebben az esetben általánosságban nehezebb megmondani, hogy milyen lesz egy extremális pontrendszer.

Az általános eset helyett most csak tekintsük az olyan görbéket, amelyekre bármely P_0 pontjukból — egy irányba — kiinduló $\widehat{P_0P_1}$ illetve $\widehat{P_0P_2}$ ívre a $\widehat{P_0P_1}$ ív kisebb, mint a $\widehat{P_0P_2}$ ív, ha a P_0P_1 húr is kisebb, mint a P_0P_2 húr, és fordítva (10. ábra). (Ez a kikötés általánosabb, mint ha például azt tettük volna fel, hogy rövidebb ívhez rövidebb húr tartozik, és fordítva.)

A következőkben az ilyen görbéket szigorúan monoton görbéknek nevezzük.

Megjegyzések: 1. Az ilyen görbéknél egy tetszőleges P_0 pontból kiinduló P_0P húr hossza a megfelelő ív hosszának — mint paraméternek — szigorúan monoton függvénye, és fordítva.

2. A fenti monotonitási tulajdonsággal rendelkeznek pl. a folytonos, monoton függvények görbéi (a síkban).



10. ábra

Egyszerű zárt görbék esetén egy húrhoz két ív is tartozik. Ezért, hogy a szigorú monotonitás definícióját zárt görbékre is értelmezhessük, kössük ki, hogy zárt görbéknél egy húrhoz mindig a legrövidebb hozzá tartozó ívet rendeljük. Ekkor azonban belátható, hogy a síkban a kör az egyetlen szigorúan monoton görbe, és a térben is csak egy gömbbe írt és a gömb középpontjára szimmetrikus görbékről lehet szó.

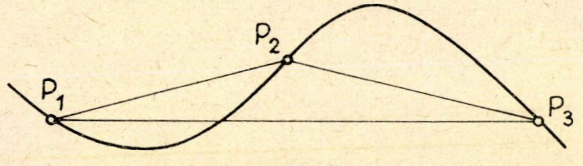
Megjegyzés: A szigorúan monoton, zárt görbéknek ezt a szűk osztályát kiterjeszthetnénk a definíció egy olyan általánosításával, hogy csak azt követelnénk meg, hogy bármely P_0 pontból kiindulva a görbe P pontjain végigfutva, a P_0P húrok szigorú növekedésével mindkét irányba haladva eljuthassunk a görbe egy másik Q pontjába (az így meghatározott két $\widehat{P_0Q}$ ív nem feltétlenül egyenlő). Így pl. az ellipszist már a szigorúan monoton görbék közé sorolhatnánk. Megtehetnénk azt is, hogy a görbe húrjainak — az ívhossz függvényében vett — szigorúan monoton növekedését csak a P_0 (kiindulási) pontok egy R sugarú környezetébe eső darabjára követelnénk meg — így R-től függően lehetne egy görbe szigorúan monoton vagy sem. (Pl. a kör tetszőleges R-re szigorúan monoton.) Ilyen módon természetesen a szigorúan monoton, nyílt görbék osztálya is kiszélesedne.

Ezeket a lehetőségeket félretéve itt megmaradunk az eredeti definíció mellett. A szigorúan monoton görbékről kimondhatunk néhány igen egyszerű állítást:

1. *Ha egy $\widehat{P_1P_3}$ ívre egy P_2 osztópontot helyezünk, akkor a P_1P_2 és P_2P_3 húr kisebb, mint a P_1P_3 húr* (11. ábra).

2. *Ha egy rögzített P_1 és egy mozgó P_2 pont közti $\widehat{P_1P_2}$ ív nő, akkor növekszik a P_1P_2 húr is, és fordítva.*

3. Egy irányban haladva a görbén, bármely ponthoz a szomszédos pont van a legközelebb — kivéve, ha egy zárt görbén egy teljes ívhossz felénél nagyobb „üres" ív van (amelyen a pontrendszernek nincs pontja).



11. ábra

Ezek alapján könnyen látható, hogy egy extremális elrendezés egy szigorúan monoton görbén csak egy egyenletes elrendezés lehet (ahol minden húr egyenlő).[4]

[4] Egy egyenletes elrendezéshez — a belső metrika esetéhez hasonlóan — közvetlen módon is eljuthatunk: n darab egyenlő húrt mérünk egymás után a görbére, és ezeket addig csökkentjük, vagy növeljük, míg pontosan ki nem töltik az egész görbét. Megjegyzendő, hogy vannak nyilván olyan görbék is, amelyeken nem ilyen (egyenletes) egy extremális elrendezés. Pl. ha egy ellipszisen helyezünk el extremálisan három pontot, külső metrika szerint.

Nyílt görbék esetén (és a körnél) így egyértelműen adott az extremális elrendezés (hiszen nyílt görbén egyetlen egyenletes elrendezés lehet — ha kihasználjuk az egész görbét). Térbeli zárt görbék esetén azonban rögzíteni kell egy kiindulási pontot. Így a pontok közti távolság — egy egyenletes elrendezésnél — még a kiindulási pont függvénye is lesz. *Tehát egy tetszőleges, egyenletes elrendezés zárt görbék esetén nem szolgáltat általában extrémumot*[5].

A szigorúan monoton görbékre vonatkozóan, relaxációs eljárásainkról a következők mondhatók.

A III. eljárás szigorúan monoton görbékre (külső metrika esetén is) ugyanúgy az elhelyezendő pontok egyenletes elrendezéséhez vezet, mint az egyenes szakasz (görbék belső metrikával) esetén, hiszen (a 2. tulajdonság miatt) a szomszédos húrok különbségének az összege itt is ugyanúgy csökken és nullához tart. Igaz ugyan, hogy zárt görbék esetén, ha van a teljes ívhossz felénél hosszabb „üres" ív, állításunk nem igaz, de viszont könnyen látható, hogy az első n lépés után (n a pontok száma, és $n \geqq 2$) biztosan nem lesz ilyen hosszú ív.

Az I. eljárás nehezebben vizsgálható, hiszen a végpontokkal kapcsolatos — a belső metrika esetén is fellépő — problémák itt is jelen vannak, és a különböző görbületű ívek előfordulása is erősen befolyásolja a pontok sorrendjének változását. Így ezzel az eljárással most nem foglalkozunk.

A IV. eljárásról viszont könnyű belátni, hogy monoton görbékre — külső és belső metrika esetén egyaránt — egy egyenletes elrendezéshez vezet (amelyről tudjuk, hogy nyílt görbéknél, körnél és zárt görbéknél belső metrika esetén extremális elrendezés, zárt görbéknél külső metrika esetén pedig általában nem az). Ezt a következőképpen láthatjuk be:

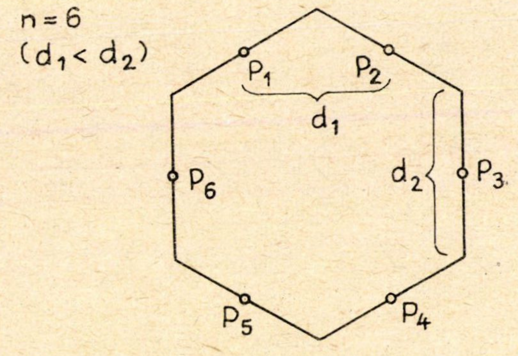
Tegyük fel, hogy az egyenletes elrendezés tetszőleges sok lépés után sem áll be (még határértékként sem). Ilyenkor nyilván kell lennie olyan pontnak, amely tetszőleges sokszor mozdul el. (Ez nyílt görbék esetén szélső pont nem lehet, mert a legelső lépés alkalmával a megfelelő végpontba lép és azután mindenképpen ott marad — a IV. eljárás értelmében.) Ettől a ponttól mindkét irányban megkeressük az első, csak véges sokszor elmozduló pontot. Ennek a pontpárnak az eljárás lefolytatása után egy egyenletes elrendezést kell közrefognia, hiszen a köztük levő, csupa végtelen sokszor elmozduló pont csak ilyet alakíthat ki a III. eljáráshoz hasonló módon. Ezekben a részekben külön-külön egyenletes elrendezés lesz (az előzőek szerint), de az is igaz, hogy az egyes ilyen részekben szereplő pontok távolságának minden részben ugyanakkorának kell lennie, mert ellenkező esetben lennének olyan, két szomszédos részt elválasztó, csak véges sokszor elmozduló pontok, amelyek két határozottan különböző nagyságú intervallumot választanának el tetszőleges sok lépés után is, így mivel a többi pont csak tetszőleges kis értékben különböző hosszúságú húrt választ el (elég sok lépés után) — ezek közül az egyiknek tetszőleges sok lépés után is el kellene mozdulnia, ami ellentmondás. Előfordulhat még az is, hogy minden pont mozog, ekkor viszont (a III. eljáráshoz hasonlóan), szintén egy egyenletes elrendezéshez jutunk.

A görbékre vonatkozó, eddig tett megszorításunk (monotonitás feltételezése) csak egy elégséges feltételt ad eljárásaink eredményességére vonatkozóan. Vannak

[5] Mivel extremális elrendezés létezik és ha van akkor csak egyenletes elrendezés lehet, ezért nyilván az egyenletes elrendezések halmazában van legalább egy extremális rendszer.

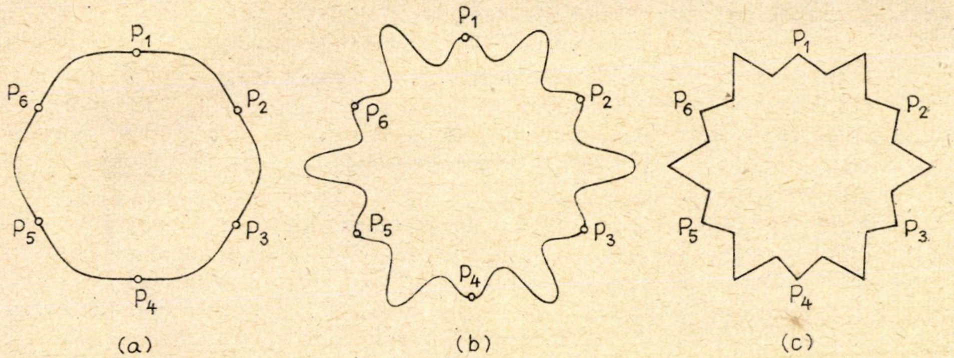
azonban olyan görbék, amelyeknél eljárásaink általában nem vezetnek extremális elrendezéshez. Ilyen görbékkel fogunk most foglalkozni.

Helyezzünk el n pontot ($n \geqq 3$) egy szabályos n szög oldalszakaszainak a közepén (12. ábra). Ezek közül egyet sem tudunk a görbe (a sokszög határa) más pontjába áthelyezni úgy, hogy a többi ponttól távolabb kerüljön. Eljárásaink egyike sem változtat tehát ezen az elrendezésen, pedig ha a sokszög csúcsaiban van mind az n pont, akkor a minimális távolság nagyobb. Ily módon tetszőleges n számú pontra adtunk olyan példát, amikor eljárásaink egyike sem vezet extremális rendszerhez. Természetesen könnyen adhatunk ilyen példákat más hasonló esetekre is. Pl. a) sima, konvex görbe, b) általában konkáv görbe vagy c) konkáv sokszög (ld. 13. ábra). Ha ezeket a görbéket alkalmas helyen megszakítjuk, akkor egyben nyílt görbék esetére is vannak példáink.



12. ábra

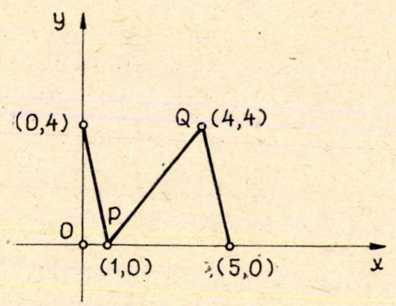
Adhatók még példaként olyan síkgörbék is, melyek egyenlete $y=f(x)$ alakba írhatók (az eddigi példák nem ilyenek) — ilyen eset látható a 14. ábrán is: két pontot (P és Q) helyezünk a görbe (1,0) illetve (4,4) pontjába. Eljárásaink nyilván ezt az elrendezést is változatlanul hagyják (a görbe alakja miatt), de a (0,4) illetve (5,0) pontok egy jobb elrendezést adnak.



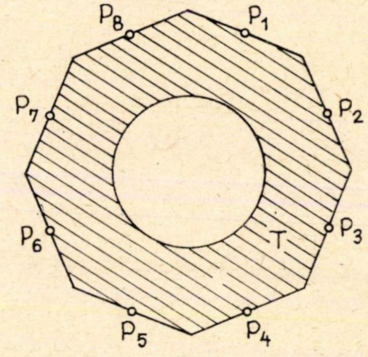
13. ábra

Ezek után síkbeli tartományokat is tekinthetünk, pl. a 12., 13. ábrán levő görbék által határolt síkidomokra ($n=6$ esetén) ugyanaz mondható, mint a határoló görbékre. Az n (pontszám) nagyobb értéke esetén — ha az I. eljárást alkalmazzuk — az egyes tartományok belső pontjaiba már elléphetnének a határról az egyes pontok. Ezen úgy segíthetünk, hogy a tartomány belsejéből egy megfelelő nagyságú kört „kivágunk" — a 15. ábrán látható módon. (Ez könnyen véghezvihető teljes szigorúsággal is.)

A síkon, a fenti eseteken kívül, még olyan „egyszerű" alakzatnál is, mint a körlap, lehetséges, hogy nem jutunk extremális rendszerhez. Pl. $n=4$, 5, 8 pont esetén a 16*a* ábrán látható rendszerek stabilak eljárásainkkal szemben, de a 16*b* ábrán „jobbak" (extremális elrendezések) vannak.



14. ábra



15. ábra

Síkbeli esetekről még elmondható, hogy a szabályos négy- és hatszög-rácsok stabilak eljárásainkkal szemben, sőt ezeknek valamely megfelelő részét tekintve, ezen részek által kifeszített tartományon, mint tartalmazó alakzaton, ezek a részek is egy stabil pontrendszert adnak (17. ábra). Viszont általában a négy vagy hatszögrácsok nem szolgáltatnak extremális elrendezést. Ezen túl a III. és IV. eljárásokról még az is elmondható, hogy bármely stabil, kongruens körrendszer által kifeszített rendszert változatlanul hagynak.

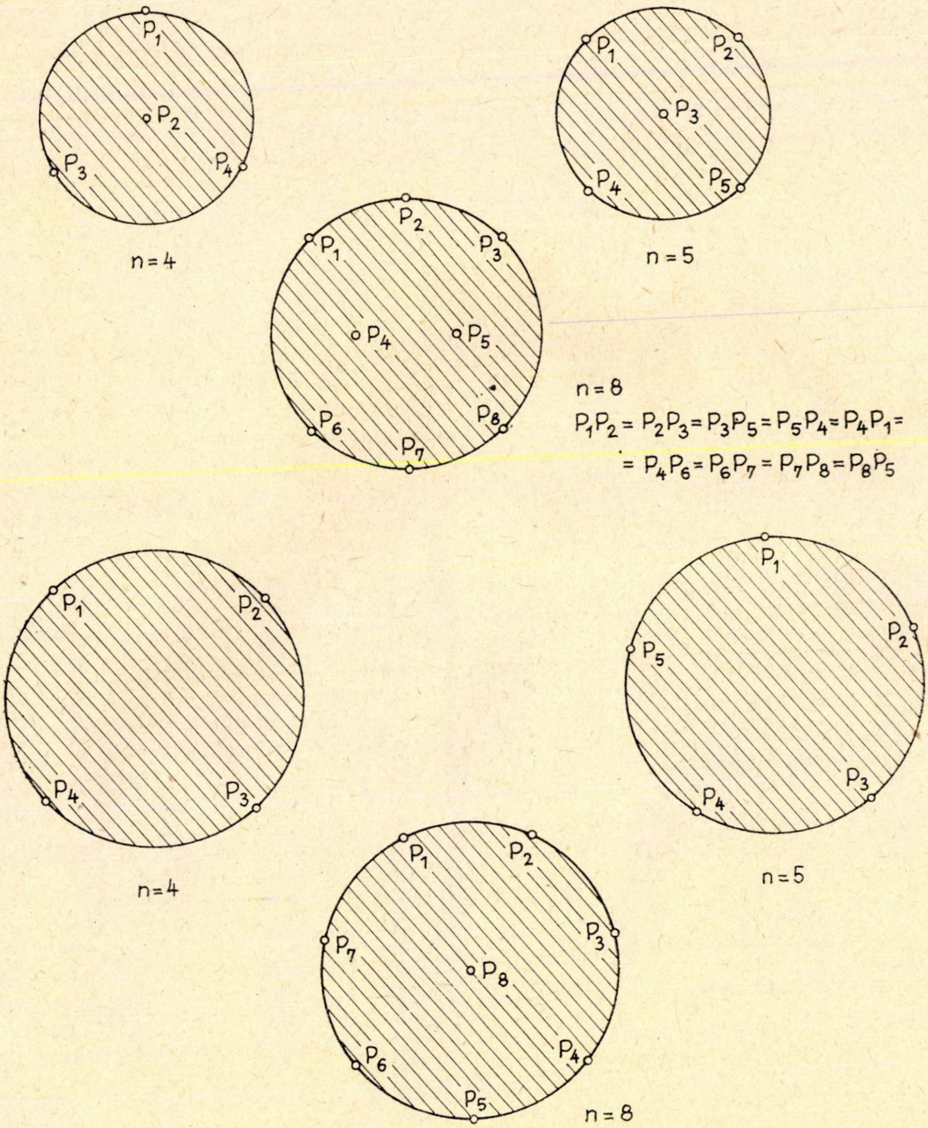
Az előzőekhez hasonlóan, térbeli ellenpéldákat is adhatunk. Pl. a 12. ábra esetének megfelelően: egy 2 egység alapélű és $\sqrt{2}$ egység magasságú négyzetalapú hasáb (18. ábra) alap és fedőlapján az oldalélek középpontjába helyezünk pontokat (összesen nyolc pontot). Ezek a pontok eljárásaink hatására nem mozdulnak el (sem a hasáb felületén sem a belsejébe). Mégis, ha a 18. ábra szerint helyezzük el a pontokat, nagyobb lehet a minimális távolság (mint az előbbi $\sqrt{2}$).

Ugyanígy gömbön (vagy gömbben) levő pontrendszerekre is adhatunk példákat: Gömbbe írt (egy főkörön levő) négyzet, szabályos háromszögalapú hasáb, és kocka csúcsai által adott pontrendszerek egyike sem változik az adott (I., III., IV.) eljárások hatására, de a megfelelő extremális rendszerek mások: a gömbbe írt szabályos tetraéder, a göbbe írt oktaéder és az archimedeszi antiprizma.

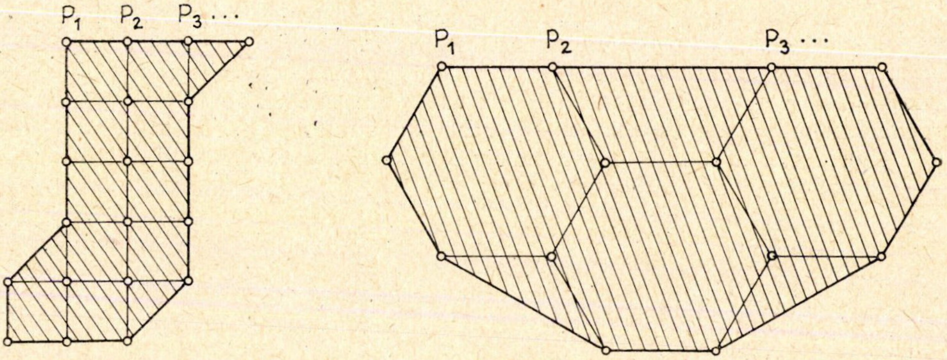
Térben a szabályos illetve stabil gömbrendszerekről ugyanazt elmondhatjuk, amit a síkban a körrendszerekről mondtunk — eljárásainkkal kapcsolatban.

A fentiekben szereplő példákból látszik, hogy eljárásaink több dimenziós esetben korlátokba ütközhetnek. A felsorolt példákban a lehetséges esetek elég sok típusa szerepelt (különböző görbék, síkidomok, térbeli alakzatok; az elhelyezendő pontok különböző száma mellett) mégis az adott példák bizonyos szempontból speciálisaknak tekinthetők; pl. kör vagy gömb esetében legfeljebb 8 pontról volt szó (így nem tudunk még nagyobb pontszám esetére semmi biztosat mondani), vagy a sokszögek esetén (12. ábra) az oldalszám mindig megegyezett az elhelyezendő pontok számával, é. í. t.

Ezek után felmerül a kérdés, vajon hogyan lehetne elérni, hogy eljárásaink több dimenziós esetekben is eredményesek legyenek. Ennek egyik módja az lehetne, hogy egyszerre egynél több (2, 3, 4) pontot mozgatunk. Eljárásaink több pont mozgatásával sem vezetnek mindig a kívánt eredményre, mint azt a 19. ábrán levő két elrendezés is mutatja. Az *a)* esetben a pontok által adott négyzetrács töltse ki pontosan a téglalap alakú T tartományt. Ekkor 2, 3 vagy 4 pont egyszerre történő moz-

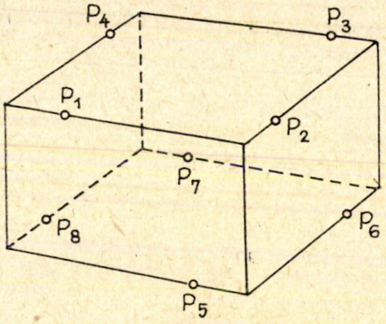


16. ábra



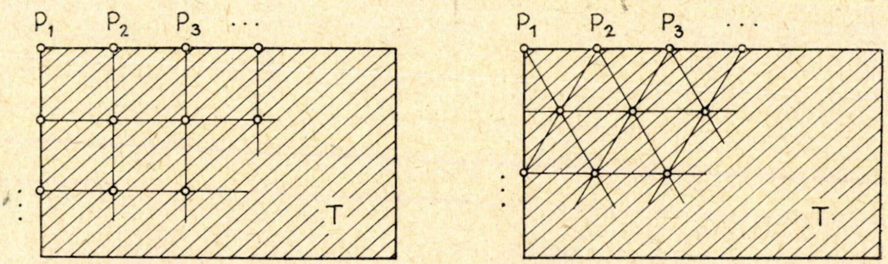
17. ábra

gatásával sem lehet úgy változtatni a rendszeren, hogy a pontok közti távolságok minimuma nőjön. (Ez belátható az összes lehetséges típusú eset végigpróbálásával.) Viszont, ha elég sok pont szerepel, akkor a *b)* esetben látható szabályos háromszögrács (ugyanannyi pont és ugyanakkora minimális távolság esetén), egy az előző *T*-hez hasonló, de kisebb téglalapon is elfér (éppen a nagyobb sűrűség miatt), így az eredeti *T*-n belül felnagyítható, tehát egy nagyobb értéket ad a pontok közti távolságokra, mint az *a)* eset (ezt egy konkrét példán keresztül is végig lehet számolni). Látható tehát, hogy hiába mozgatunk egyszerre több (2, 3, 4) pontot, mégsem jutunk mindig extremális elrendezéshez. Sokkal több pont egyszerre történő mozgatásával valószínűleg jobb eredményt lehetne elérni, de akkor az eljárás válna túl bonyolulttá.



18. ábra

Az eddigiekben az egyes eljárások eredményeit csupán abszolút szélsőérték szempontjából vizsgáltuk. Kérdés, hogy eljárásaink, melyek általában nem vezetnek abszolút szélsőértékhez, vajon lokális szélsőértéket szolgáltat-



a) b)

19. ábra

nak-e (vagyis, hogy ha az eredményként kapott pontrendszer minden pontját csak egy elég kis értékkel mozdítjuk el, akkor a minimális távolság nem növekszik).

Ilyen esetek láthatók a 13b, c ábrán, a körre adott példákban és a 14. ábrán is — valóban ezekben az esetekben az adott $P_1, \ldots, P_n$ pontrendszer pontjait egy elég kis értékkel elmozdítva nem kaphatunk „jobb" elrendezéseket. (Hasonlóan a szabályos négy- és hatszögrácsok által kifeszített rendszerek is egy lokális szélsőértéket adnak.) Természetesen ezek a példák egyáltalán nem jelenthetik azt, hogy tetszőleges rendszerből kiindulva eljárásaink mindig egy lokális szélsőértéket adó rendszerhez vezetnek. Hogy valóban nem mindig juthatunk lokális szélsőértékhez eljárásaink segítségével, azt a következő példákból is láthatjuk:

Tekintsük a 12. ábrán adott szabályos n-szöget. Az oldalak középpontjait elfoglaló rendszer pontjainak mindegyikét a sokszög kerületén egy adott körüljárási irányban valamilyen egyenlő értékkel elmozdítva a pontok távolsága növekszik, egészen addig, míg a legközelebbi csúcspontba nem jutnak. Hasonlóan, a gömbön adott 4, 6, vagy 8 pontból álló, nem extremális rendszerek (négyzet, hasáb, kocka), melyeken eljárásaink nem változtatnak, az összes pont egyszerre történő folytonos mozgatásával (pl. a kockánál két szemköztes lap ellenkező irányba való csavarásával és közelítésével) az extremális helyzetbe vihetők, (tetraéder, oktaéder, archimedeszi antiprizma), miközben a minimális távolság folytonosan növekszik (tehát nem adnak lokális szélsőértéket).

Itt jegyezzük meg, hogy a szélsőérték vizsgálata a szokásos módon — a pontok közti távolság minimumát (mint a pontrendszer függvényét) leíró F függvény differenciáljának segítségével — általában nem történhet, mivel F-nek az egyes pontok koordinátái szerinti parciális deriváltjainak egy maximum helyen legalább az egyike nem létezik.

*

Befejezésül összefoglalunk néhány még nyitott kérdést. Nincs még egyszerű eljárásunk, amely nem csak bizonyos térgörbék esetében alkalmazható, hanem általánosabb esetben is.

Nem határoztuk még meg alakzatoknak egy lehető legszélesebb osztályát, amelyre az általunk tárgyalt (I—IV.) eljárások extremális rendszerhez vezetnek. Tulajdonképpen eljárásaink eredményességére vonatkozóan egy minél gyengébb szükséges feltételt kellene kimondani, mint ahogyan az előzőekben a térgörbékre egy elégséges feltételt sikerült is adni.

Egy fontos probléma a gömb esete. Erre csak speciális esetekre szóló ($n = 4$, 6 és 8) ellenpéldákat adtunk, így még előfordulhat, hogy nagyobb pontszámra eljárásaink sikeresek. Előfordulhat az is, hogy nem ilyen speciális elrendezésekből kiindulva, ha nem is mindig, de az esetek nagy többségében mégis eljuthatunk egy extremális rendszerhez.

Itt említjük meg, hogy vannak a relaxációs eljárásokkal rokon egyéb pontelhelyezési módszerek is, amiket különösen a gömbi probléma miatt érdemes megvizsgálni. Ezek a vizsgálatok azonban külön tanulmányt igényelnek.

A relaxációs eljárások egyes lépéseire nincs még megfelelő olyan numerikus módszerünk, amellyel valójában meghatározhatnánk egy extremális elrendezést — ismerve például az egyes pontok koordinátáit. Ilyen numerikus módszerek voltak — térgörbéknél belső metrika esetén — az ún. *Gauss—Seidel* illetve *Southwell*-féle relaxációs eljárások.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] BECKENBACH, H. F.: *Modern matematika mérnököknek,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1960.

[2] FEJES TÓTH L.: *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum,* Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953.

[3] FEJES TÓTH L.: Újabb eredmények a diszkrét geometriában. *MTA III. Oszt. Közl., 13* (1963).

[4] HEPPES A.—MOLNÁR J.: Újabb eredmények a diszkrét geometriában. I.—II.—III. *Mat. Lapok 11* (1960) Nr. 4., *13* (1962), Nr. 1—2., *16* (1965) Nr. 1—2.

[5] SHAW, F. S.: *An Introduction to Relaxation Metods,* Dover Publications, New York 1953.

(Beérkezett: 1967. X. 20.)

RELAXATION TYPE METHODS FOR EXTREMAL POINT DISTRIBUTIONS IN DISCRET GEOMETRY

by

MIHÁLY RUDA

Summary

In this paper the author studies the range of effectiveness of certain relaxation-type methods for finding „extremal" configurations of a given number of points in a given domain. A configuration is said to be extremal if the minimal distance of pairs of its points attains its greatest possible value. Beyond positive results in many cases the methods studied here are proved to lack general effectiveness.

INTERPRETÁLT ALGORITMUS-SÉMÁK EKVIVALENCIAPROBLÉMÁJÁRÓL

Írta: GYURIS LÁSZLÓ

Jelen dolgozatban a számológépi programok ekvivalenciaproblémájával foglalkozunk. A programokat az interpretált ALS-ok (algoritmusok logikai sémái) [3] nyelvén adottnak tekintjük. Kimutatjuk, hogy az interpretált ALS-ok ekvivalencia problémája redukálható a véges iniciális *Mealy*-automaták ekvivalenciaproblémájára.

Az 1. §-ban a szükséges fogalmakat ismertetjük, a 2. § tartalmazza az ekvivalenciaprobléma ilyen értelemben vett megoldását.

1. §.

I. Definíció: Algoritmusok logikai sémáin [1] olyan véges sorozatokat értünk, amelyek operátorokból $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, logikai feltételekből $(\alpha_1 \underset{i_1}{\llcorner}, \alpha_2 \underset{i_2}{\llcorner}, \ldots, \alpha_k \underset{i_k}{\llcorner})$ és jobb félzárójelekből $(\underset{i_1}{\lrcorner}, \underset{i_2}{\lrcorner}, \ldots, \underset{i_k}{\lrcorner})$ állnak oly módon, hogy a logikai feltételek és a jobb félzárójelek között egy-egyértelmű megfeleltetés áll fenn.

Tekintsünk egy N alaphalmazt; a fenti operátorokat interpretáljuk úgy, mint az N halmaz önmagába történő leképezéseit, a logikai feltételeket pedig az N halmazon teljesen definiált logikai feltételeknek interpretáljuk. Ily módon beszélhetünk — az N-re vonatkozóan — *interpretált ALS-okról* (a jobb félzárójelek csak segédszimbólumok), jelöljük ezeket ALS_N-nel.

Ha például M egy számológép állapotai halmaza, akkor az ALS_M-ek programoknak felelnek meg.

Minden konkrét ALS_M valamely $\varphi: M \to M$ leképezés elvégzését jelöli ki, amely az ALS_M következő *végrehajtási eljárásával* definiált:

II. Definíció: Az $\mathfrak{A}_M$ ALS_M végrehajtása valamely $m(\in M)$ állapotra:

(1) Megvizsgáljuk $\mathfrak{A}_M$ első (bal szélső) szimbólumát:

(α) ha operátor (A_i), akkor az A_i vérehajtásával kapott $A_i(m)$ elemet tekintjük az m helyett, és kijelöljük az A_i után következő szimbólumot;

(β) ha logikai feltétel $(\alpha_j \underset{i_j}{\llcorner})$, és α_j értéke igaz a tekintett m-re, — akkor kijelöljük a következő szimbólumot, ha hamis, — akkor a megfelelő jobb félzárójel $(\underset{i_j}{\lrcorner})$ után következő szimbólumot jelöljük ki;

(γ) ha jobb félzárójel, akkor kijelöljük a következő szimbólumot.

(2) Tegyük fel, hogy k lépés elvégzése után kaptuk m' elemet, és kijelöltünk valamely szimbólumot, akkor e kijelölt szimbólumot és m'-t tekintve ugyanazt tesszük, mint (1)-ben.
(3) Ha eljutunk a legutolsó szimbólumhoz, és az operátor, vagy olyan logikai feltétel, melynek értéke igaz az aktuális m^* elemre, vagy jobb félzárójel, akkor az eljárást befejezettnek tekintjük. (Természetesen az operátort még alkalmaznunk kell.) Ellenkező esetben az eljárás végtelenül folytatódik. Ezen eljárás befejeződésekor kapott $\mathfrak{A}_M(m)(\in M)$-et nevezzük az $\mathfrak{A}_M$ m-re kapott értékének. Ellenkező esetben m-re az $\mathfrak{A}_M$ értéke nem definiált.

Adott $\varphi: M \to M$ leképezést ALS_M-leképezésnek nevezzük, ha található hozzá olyan $\mathfrak{A}_M$ ALS_M, amelynek végrehajtása a φ-t realizálja. — A fenti végrehajtási eljárás különbözik az [1]-ben szereplő definíciótól, amely eltekint attól a körülménytől, hogy a reális számológépi programok végrehajtásánál az elágazásokat meghatározó logikai feltételek értékeit az előzőleg végrehajtott operátorok határozzák meg. (Az [1] definíciója szerint minden lépésben „kívülről" adjuk a sémának az aktuális logikai értékeket.) Ez az eltérés szükségessé teszi, hogy [1]-től eltérően definiáljuk az ALS_M-ek ekvivalenciáját.

III. Definíció: Ugyanazon M bázishalmazra vonatkozóan $\mathfrak{A}_M$ és $\mathfrak{B}_M$ ALS_M *ekvivalens* ($\mathfrak{A}_M \equiv \mathfrak{B}_M$), ha végrehajtásuk ugyanazon $\varphi: M \to M$ ALS_M-leképezést realizálja.

IV. Definíció: Véges iniciális *Mealy-automatának* nevezzük az $\mathfrak{A} = \langle A, a_0, X, Y, \delta, \lambda \rangle$ objektumot; ahol A, X és Y véges halmazok (rendre: állapotok, bemenőjelek, és kimenőjelek halmaza) és $a_0 \in A$; a $\delta = \delta(a, x)$ átmenetfüggvény, amely minden $a(\in A)$ és $x(\in X)$ esetén megadja a következő állapotot, a $\lambda = \lambda(a, x)$ kimenetfüggvény megmutatja, hogy $a(\in A)$ állapotban az $x(\in X)$ bemenőjel hatására az $\mathfrak{A}$ milyen $y(\in Y)$ kimenőjelet ad ki.

V. Definíció: Közös bemenő és kimenő ábécével rendelkező iniciális Mealy-automaták *ekvivalensek*, ha ugyanazt a leképezést indukálják.

2. §.

A programok (azaz az interpretált ALS-ok) ekvivalenciaproblémájának megoldása azt jelenti, hogy keresnünk kell olyan eljárást, amelynek segítségével bármely ALS_M-párról el tudjuk dönteni, hogy ekvivalensek, vagy nem. A *Mealy*-automaták elméletében az ekvialenciaprobléma megoldott, így ha az ALS_M-ek ekvivalenciaproblémáját visszavezetjük a *Mealy*-automaták ekvivalenciaproblémájára, akkor a probléma megoldottnak tekinthető.

Állítás: *Az ALS_M-ek ekvivalenciaproblémája redukálható a Mealy-automaták ekvivalenciaproblémájára.*

Bizonyítás. Állításunkat két lépésben bizonyítjuk:
1. Megmutatjuk, hogy bármely adott $\mathfrak{A}_M$ ALS_M-hez hogyan rendelhető egy alkalmas $\mathfrak{A}$ véges, iniciális *Mealy*-automata, amely az $\mathfrak{A}_M$ végrehajtását realizálja.

2. Kimutatjuk, hogy bármely ALS_M-pár akkor és csak akkor ekvivalens, ha a nekik megfelelő *Mealy*-automaták ekvivalensek.

1. Legyen adva $\mathfrak{A}_M(A_1, A_2, \ldots, A_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ ALS_M. Az $\mathfrak{A}$ *Mealy*-automata állapothalmaza legyen az operátorok halmaza és a logikai feltételek halmaza. A bemenő- és kimenőábécé legyen M. A δ átmenetfüggvény megfelel annak, ahogyan a logikai feltételek és a jobb félzárójelek az $\mathfrak{A}_M$ elemei közötti átmeneteket meghatározzák.
A λ kimenetfüggvényt a következőképpen határozzuk meg: az operátoroknak megfeleltetett állapotokban az operátornak megfelelő transzformáció elvégzésekor kapott M-beli elemet adja ki az $\mathfrak{A}$; a logikai feltételeknek megfeleltetett állapotokban a kapott bemenőjel lesz a kimenőjel is. Az így kapott $\mathfrak{A} = \langle\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}, M, M, \delta, \lambda\rangle$ automata tehát a következőképpen működik: Tegyük fel, hogy valamely $m(\in M)$ elemre kell $\mathfrak{A}_M$-et végrehajtani. Az iniciális állapotban az m bemenőjelet kapja $\mathfrak{A}$. Továbbiakban az operátoroknak megfelelő állapotokban a megfelelő M-beli elem a bemenőjel, melyre $\mathfrak{A}$ az operátornak megfelelő transzformáció elvégzésekor kapott M-beli elemet adja ki, és ez lesz a következő bemenőjel is. A logikai feltételeknek megfelelő állapotokban a logikai feltétel értéke a kapott aktuális M-beli elemtől függ, így ez határozza meg az átmenetet.

2. Legyen adva $\mathfrak{A}_M(A_1, A_2, \ldots, A_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ és $\mathfrak{B}_M(B_1, B_2, \ldots, B_r, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$ ALS_M, melyek végrehajtása $\varphi_{\mathfrak{A}}$ és $\varphi_{\mathfrak{B}}$ ALS_M-leképezést realizálja. $\mathfrak{A}_M \equiv \mathfrak{B}_M$ akkor és csak akkor teljesül, ha az (1. alapján) megfelelő $\mathfrak{A} = \langle\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}, M, M, \delta_{\mathfrak{A}}, \lambda_{\mathfrak{A}}\rangle$ és $\mathfrak{B} = \langle\{B_1, B_2, \ldots, B_r, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\}, M, M, \delta_{\mathfrak{B}}, \lambda_{\mathfrak{B}}\rangle$ iniciális *Mealy*-automaták ekvivalensek.

   a) Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}_M \equiv \mathfrak{B}_M$, azaz a $\varphi_{\mathfrak{A}}$ és $\varphi_{\mathfrak{B}}$ ALS_M-leképezések azonosak, tehát az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ automaták ugyanazon leképezéseket realizálják. Az 1. alatti konstrukcióból világos, hogy $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ csak egy betűből álló bemenőszót (bemenőjelet) kaphat az iniciális állapotban. A többi bemenőjelet az uatomaták maguk állítják elő, míg el nem jutnak a megfelelő terminális állapotba. Tehát ezen automaták csak ilyen speciális lépéseket indukálhatnak, de ezekről feltettük, hogy megegyeznek, azaz $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ ekvivalens.

   b) Ha az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ automaták ekvivalensek, akkor az általuk indukált (automata-) leképezések azonosak, tehát az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ által realizált ALS_M-leképezések is megegyeznek, azaz $\mathfrak{A}_M \equiv \mathfrak{B}_M$.

Megjegyzések

1. Az automataelmélet segítségével oldható meg az interpretált ALS-ok analízisproblémája is [2].
2. Az automataelmélet [3] és [4] miatt ilymódon alkalmazható a gluskovi mikroprogram-algebrai rendszer bizonyos problémáira is.

IRODALOM

[1] JU. I. JANOV: O logicseszkih szhemah algoritmov, szb. *Problemü kibernetiki,* No. 1, 1958, 75—127.
[2] GYURIS L.: Interpretált algoritmus-sémák analízise az automataelmélet segítségével, *MTA Számítástechnikai Központja Közlemények,* 4, 1968.
[3] L. GYURIS: On the connection of Glushkovian microprogram-algebras and logical schemes of the algorithms; in "*Proceedings of the International Colloquiumon Recursive Functions and Their Applications,* Tihany, 1967."
[4] GYURIS L.: A gluskovi mikroprogram-rendszer módosításáról, *MTA Számitástechnikai Központja Közlemények,* 3, 1967. 61—67.

(Beérkezett: 1968. V. 15.)

ON THE EQUIVALENCE-PROBLEM OF INTERPRETED LOGICAL SCHEMES OF ALGORITHMS

by

L. GYURIS

Summary

This paper deals with the equivalence-problem of computer programs. We consider the programs given in the language of the interpreted LSAs (logical schemes of algorithms) [3]. We ascertain that the equivalence-problem of the interpreted LSAs can be reduced to the equivalenceproblem of the finite inital *Mealy*-automata.

A FÉLIG KORLÁTOS HERMITIKUS OPERÁTOROK ÖNADJUNGÁLT FOLYTATÁSAINAK ELMÉLETE ÉS ALKALMAZÁSAI. (I)*

Írta: M. G. KREJN

A $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-térben értelmezett T lineáris operátort NEUMANN JÁNOST [1] követve hermitikusnak nevezzük, ha az operátor $\mathfrak{D}(T)$ értelmezési tartománya sűrű $\mathfrak{H}$-ban és minden $g, f \in \mathfrak{D}(T)$ elempárra $(Tg, f) = (g, Tf)$. A T hermitikus operátort alulról félig korlátosnak mondjuk, ha

$$m(T) = \inf_{f \in \mathfrak{D}(T)} \frac{(Tf, f)}{(f, f)} > -\infty.$$

Alapvető munkájában (lásd [1], 103. old.) NEUMANN JÁNOS kimondta azt a sejtést, hogy minden félig korlátos hermitikus T operátornak van legalább egy félig korlátos önadjungált (hipermaximális) $\tilde{T}$ folytatása, amelyre

$$m(\tilde{T}) = m(T).$$

Ezt később M. H. STONE [7] és más módon K. FRIEDRICHS [2] bizonyította be, nyitva hagyták azonban azt a kérdést, vajon csak egy ilyen $\tilde{T}$ folytatás létezik-e[1].

Sikerült kimutatnunk, hogy a szóban forgó folytatás csak bizonyos, nem minden félig korlátos operátorra teljesülő feltételek mellett lesz egyértelmű. Ezt az eredményt a következő általánosabb feladat megoldása során kapjuk meg: Keresendők a T operátornak mindazok az önadjungált $\tilde{T}$ folytatásai, amelyekre $m(\tilde{T}) \geqq \gamma$, ahol γ tetszés szerinti, $m(T)$-nél nem nagyobb szám. A T félig korlátos operátorról áttérve az $S = T - \gamma I$ $(m(S) \geqq 0)$ pozitív operátor vizsgálatára az utóbbi feladatot visszavezetjük az S operátor összes pozitív önadjungált $\tilde{S}$ folytatásainak megkeresésére. Kiderül, hogy az ilyen folytatások között található két „szélső" folytatás, S_μ és S_M (a „durva" és a „finom" folytatás), amelynek számos figyelemre méltó extremális tulajdonsága van.

Így például ahhoz, hogy egy S' pozitív önadjungált operátor az S operátor folytatása legyen, szükséges és elégséges a következő feltétel: minden $f \in \mathfrak{H}$ elemre

$$((S_\mu + aI)^{-1} f, f) \leqq ((S' + aI)^{-1} f, f) \leqq ((S_M + aI)^{-1} f, f),$$

ahol a tetszés szerinti pozitív szám.

Azok az olvasók, akik ismerik K. FRIEDRICHS művét, vizsgálatainkból (lásd I. fej. 10. tétel) látni fogják, hogy az S pozitív operátor folytatásának általa ajánlott módszere mindig az S_μ durva folytatásra vezet.

* Математический сборник 20 (1947) 431—495. A fordítás itt közölt része a cikk I. fejezetének 1—5 §-át és irodalomjegyzékét tartalmazza.

[1] Ezt a kérdést csak egyszerű hermitikus operátorra vonatkozóan van értelme feltenni; a tagadó válasz csak ebben az esetben nem triviális (lásd [12]).

Minthogy a matematikai fizika feladataiban előforduló hermitikus operátorok majdnem mind félig korlátosak, eredményeink a matematikai fizika feladataival kapcsolatban számos alkalmazásra találnak. Speciálisan azok a képletek, amelyeket az S operátor valamilyen $\tilde{S}$ pozitív önadjungált folytatásáról a durva folytatásra való áttérésre nyertünk (lásd I. fej. 12. tétel), lehetővé teszik parciális differenciálegyenletekhez tartozó különféle peremérték-feladatok *Green*-függvényének megszerkesztésére alkalmas új hatásos módszerek kidolgozását (lásd III. fej.*).

Vizsgálati módszerünk kiinduló pontja az a körülmény, hogy az S pozitív hermitikus operátor önadjungált folytatásainak keresése visszavezethető egy olyan A korlátos lineáris operátor önadjungált és normatartó folytatásainak a keresésére, amelynek $\mathfrak{D}(A)$ értelmezési tartománya nem sűrű $\mathfrak{H}$-ban, és amely teljesíti a hermitikusság feltételét:

$$(Ag, f) = (g, Af) \qquad (g, f \in \mathfrak{D}(A)).^2$$

Valóban, ha S zárt pozitív hermitikus operátor és $S \neq S^*$, akkor, amint könnyen belátható, az

$$A(f + Sf) = f - Sf \qquad (f \in \mathfrak{D}(S))$$

egyenlőség egy A korlátos hermitikus operátort definiál, amelynek

$$\mathfrak{D}(A) = (I + S)\,\mathfrak{D}(S)$$

értelmezési tartománya zárt és a $\mathfrak{H}$ tér valódi altere, továbbá

$$\|A\| = \sup_{f \in \mathfrak{D}(A)} \frac{|Af|}{|f|} = 1.$$

Nem nehéz megmutatni, hogy ha az A operátort egy $\tilde{A}$ korlátos önadjungált operátorrá folytatjuk, amelynek a normája $\|\tilde{A}\| = 1$, és ezután képezzük az $\tilde{S} = (I - \tilde{A})(I + \tilde{A})^{-1}$ operátort, akkor megkapjuk az S operátor $\tilde{S}$ pozitív önadjungált folytatásainak általános alakját.

Így az I. fejezetet a $\mathfrak{H}$ térben nem sűrű $\mathfrak{D}(A)$ értelmezési tartománnyal rendelkező A korlátos hermitikus operátorok önadjungált folytatásairól szóló tételekkel kezdjük (1. és 2. §); ezek talán önmagukban is érdekesek némileg. A továbbiakban ezen tételek alapján tanulmányozzuk a félig korlátos hermitikus operátorok önadjungált folytatásait.

Különös figyelmet szentelünk a véges defektusindexű nem korlátos hermitikus operátoroknak (6., 7. és részben 8. §), szem előtt tartva az egydimenziós peremérték-feladatoknál játszott szerepüket.

A II. fejezetben az általános elmélet tételeit egydimenziós peremérték-feladatok vizsgálatára alkalmazzuk. Ezek a vizsgálatok bizonyos értelemben a szerző korábbi munkáinak ([3], [4]) általánosítását és lezárását képezik. Az I. fejezetben szereplő általános fogalmak és állítások lehetővé tették a megfontolások lerövidítését és a gondolatmenetek jobb kidomborítását. E fejezet eredményei könnyen általánosíthatók differenciálegyenlet-rendszerekre vonatkozó egydimenziós peremérték-feladatok különböző osztályaira.

* A tervezett III. fejezet közlésére valójában nem került sor. *(Ford. megj.)*

[2] Megengedünk magunknak bizonyos lazaságot és az ilyen A operátorokat szintén hermitikusnak nevezzük.

A III. fejezetben* az általános elmélet eredményeit felhasználjuk parciális differenciálegyenletekre vonatkozó többdimenziós peremérték-feladatok tanulmányozására. Az I. fejezetben tárgyalt általános fogalmak a peremérték-feladatokkal kapcsolatban új problémákhoz vezetnek. A *Green*-függvények itt kapott új jellemzéseinek és megszerkesztésük módszereinek jelentősége lehet az alkalmazások szempontjából is.

Az I. fejezet fő eredményei bizonyítás nélkül megtalálhatók a Доклады Академии наук СССР című folyóiratban megjelent [5] közleményünkben. Ugyanebben a folyóiratban jelent meg a szerző [6] közleménye is, amelyben az I. fejezet 6. §-hoz csatlakozó és azt részben kiegészítő eredmények kerültek ismertetésre.

Terminológia és jelölésmód tekintetében lényegében STONE [7] könyvét követjük.

I. FEJEZET

ÁLTALÁNOS ELMÉLET

1. §. A $H_{\mathfrak{N}}$ operátor

1. A továbbiakban $\mathfrak{H}$ mindig valamilyen Hilbert-teret jelent.

A $\mathfrak{H}$ térben ható különféle hermitikus operátorokat fogunk vizsgálni. Minthogy még nem alakult ki egységes terminológia, megmondjuk, hogy egy A lineáris operátort, amelynek az értelmezési tartománya $\mathfrak{D}(A)$ $\big(\mathfrak{D}(A)\subset\mathfrak{H},\ A\mathfrak{D}(A)\subset\mathfrak{H}\big)$, akkor fogunk hermitikusnak nevezni, ha

$$(Ag,f)=(g,Af) \qquad \big(g,f\in\mathfrak{D}(A)\big).$$

Ebben és a következő két paragrafusban folytonos hermitikus A operátorokat fogunk vizsgálni. Amint ismeretes, az A lineáris operátor akkor és csak akkor folytonos, ha korlátos, vagyis van véges normája:

$$\|A\|=\sup_{f\in\mathfrak{D}(A)}\frac{|Af|}{|f|}<\infty.$$

Ha az A hermitikus operátor az egész $\mathfrak{H}$ téren értelmezve van $\big(\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{H}\big)$, akkor korlátos és

$$\|A\|=\sup_{f\in\mathfrak{H}}\frac{|(Af,f)|}{(f,f)}.$$

Az ilyen operátorokat korlátos önadjungált operátoroknak fogjuk nevezni.

Ebben a paragrafusban minden alkalommal, amikor nem mondunk mást, feltesszük, hogy a szóban forgó operátorok korlátos önadjungált operátorok.

Állapodjunk meg abban, hogy ha

$$A\neq B \quad \text{és} \quad (Af,f)\leqq(Bf,f) \qquad (f\in\mathfrak{H}),$$

akkor az

$$A<B \quad \text{vagy a} \quad B>A$$

jelölésmódot használjuk.

* Lásd a 274. oldalon álló lábjegyzetet.

A továbbiakban H pozitív operátort jelent ($H > 0$). Ilyen operátorhoz található egy és csak egy pozitív operátor, amelynek a négyzete H-val egyenlő; ennek a jele $H^{\frac{1}{2}}$ lesz.

Ha

$$Hf = \int_0^l \lambda dE(\lambda) f \qquad (f \in \mathfrak{H}; \quad l = \|H\|)$$

a H operátor spektrálfelbontása, akkor

$$H^{\frac{1}{2}} f = \int_0^l \lambda^{\frac{1}{2}} dE(\lambda) f \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

A továbbiakban fontos szerepet fog játszani a következő

1. TÉTEL. *Legyen $\mathfrak{N}$ a $\mathfrak{H}$ tér zárt altere, H pedig valamilyen pozitív operátor. Ekkor*[3] *a*

$$1) \quad C \leqq H \qquad 2) \quad \mathfrak{R}(C) \subset \mathfrak{N}$$

feltételeket teljesítő összes C operátorok Q halmazában található maximális operátor (vagyis olyan operátor, amely a halmaz minden más C operátoránál nagyobb). Ez a $H_{\mathfrak{N}}$ operátor kifejezhető a

(1.1) $$H_{\mathfrak{N}} = H^{\frac{1}{2}} P_{\mathfrak{L}} H^{\frac{1}{2}}$$

képlettel, ahol $P_{\mathfrak{L}}$ a $H^{\frac{1}{2}} f \in \mathfrak{N}$ tulajdonsággal rendelkező $f \in \mathfrak{H}$ vektorokból álló $\mathfrak{L}$ altérre való merőleges vetítés operátora.

Bizonyítás[4]. Jelöljük $\mathfrak{D}$-vel az $\mathfrak{N}$ altér $\mathfrak{H}$-ra vonatkozó ortogonális komplementumát:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}.$$

Ekkor tetszés szerinti $C \in Q$ operátorra

$$(Cf, g) = 0, \quad Cg = 0 \quad (f \in \mathfrak{H},\ g \in \mathfrak{D}),$$

tehát

$$(Cf, f) = \big(C(f-g), f-g\big) \quad (f \in \mathfrak{H},\ g \in \mathfrak{D}).$$

A $C \leqq H$ összefüggés alapján

$$(Cf, f) \leqq \big(H(f-g), f-g\big) = |H^{\frac{1}{2}}(f-g)|^2 \quad (f \in \mathfrak{H},\ g \in \mathfrak{D}),$$

következésképpen

(1.2) $$(Cf, f) \leqq \inf_{g \in \mathfrak{D}} |H^{\frac{1}{2}} f - H^{\frac{1}{2}} g|^2.$$

[3] Az elfogadott szokásnak megfelelően $\mathfrak{R}(A)$-val az összes Af ($f \in \mathfrak{D}(A)$) értékek halmazát jelöljük; tehát $A\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{R}(A)$.

[4] A tétel alább ismertetett bizonyítása lényegesen egyszerűbb a szerzőtől származó eredeti bizonyításánál. A bizonyítás leegyszerűsítéséért a szerző I. M. Gelfandnak tartozik köszönettel.

Legyen $\mathfrak{L}$ azoknak a h vektoroknak az összessége, amelyek ortogonálisak $H^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}$-re, $P_{\mathfrak{L}}$ pedig az $\mathfrak{L}$-re való merőleges vetítés operátora. Az (1. 2) egyenlőtlenség értelmében

$$(Cf,f) \leqq |P_{\mathfrak{L}} H^{\frac{1}{2}} f|^2 = (H^{\frac{1}{2}} P_{\mathfrak{L}} H^{\frac{1}{2}} f,f) \quad (f\in\mathfrak{H}).$$

Nyilvánvaló, hogy $H^{\frac{1}{2}}P_{\mathfrak{L}}H^{\frac{1}{2}} \leqq H$.

Az $\mathfrak{L}$ altér definíciója szerint $h\in\mathfrak{L}$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $(h, H^{\frac{1}{2}}g)=0$ $(g\in\mathfrak{D})$, azaz $(H^{\frac{1}{2}}h, g)=0$ $(g\in\mathfrak{D})$, vagy másképpen $H^{\frac{1}{2}}h\in\mathfrak{N}$.

Ennélfogva $\mathfrak{R}(H^{\frac{1}{2}}P_{\mathfrak{L}}H^{\frac{1}{2}})\subset\mathfrak{N}$.

Ezzel beláttuk, hogy $H^{\frac{1}{2}}P_{\mathfrak{L}}H^{\frac{1}{2}}\in Q$, és így a tételt bebizonyítottuk.

2. Felsoroljuk a $H_{\mathfrak{N}}$ operátor néhány tulajdonságát.

Az (1. 1) képletből adódik, hogy $\mathfrak{R}(H_{\mathfrak{N}})\subset\mathfrak{R}(H^{\frac{1}{2}})$, tehát

$$\mathfrak{R}(H_{\mathfrak{N}})\subset\mathfrak{N}(H) = \mathfrak{N}\cap\mathfrak{R}(H^{\frac{1}{2}}).$$

Az is nyilvánvaló, hogy az $\mathfrak{L}$ halmaz nem változik meg, ha az $\mathfrak{N}$ alteret az $\overline{\mathfrak{N}(H)}$ altérrel helyettesítjük; ezek szerint

$\alpha)$ $H_{\mathfrak{N}} = H_{\overline{\mathfrak{N}(H)}}$.

Innen könnyen nyerjük a következőt:

β) $H_{\mathfrak{N}}=0$ akkor és csak akkor, ha[5]

$$\mathfrak{N}(H) = \mathfrak{N}\cap\mathfrak{R}(H^{\frac{1}{2}}) = (0).$$

Tekintettel az α) tulajdonságra csak azt kell belátnunk, hogy $H_{\mathfrak{N}}\neq 0$, ha $\mathfrak{N}(H)\neq(0)$. De ha

$$\varphi\in\mathfrak{N}(H), \qquad \varphi\neq 0,$$

akkor található olyan $\psi\in\mathfrak{L}$ elem, hogy

$$\varphi = H^{\frac{1}{2}}\psi.$$

Normáljuk a φ elemet úgy, hogy $|\psi|=1$ legyen; ekkor

$$|(f,\varphi)|^2 = |(f, H^{\frac{1}{2}}\psi)|^2 = |(H^{\frac{1}{2}}f,\psi)|^2 \leqq |H^{\frac{1}{2}}f|^2 = (Hf,f) \quad (f\in\mathfrak{H}).$$

Ily módon a

$$C_\varphi f=(f,\varphi)\varphi$$

képlettel értelmezett C_φ operátornak megvannak az 1. tételben szereplő 1), 2) tulajdonságai, következésképpen

$$0 < C_\varphi \leqq H_{\mathfrak{N}}.$$

γ) A

(1. 3) $$H_{\mathfrak{N}}f = Hf$$

egyenlőség azokra és csak azokra az $f\in\mathfrak{H}$ elemekre áll fenn, amelyekre $Hf\in\mathfrak{N}$.

[5] (0) az egyetlen $0(\in\mathfrak{H})$ elemből álló halmaz jele.

Valóban, az (1. 3) egyenlőség ekvivalens azzal, hogy

$$|P_{\mathfrak{L}} H^{\frac{1}{2}} f|^2 = (H_{\mathfrak{N}} f, f) = (Hf, f) = |H^{\frac{1}{2}} f|^2.$$

Ebből az egyenlőségből viszont következik, hogy

$$P_{\mathfrak{L}} H^{\frac{1}{2}} f = H^{\frac{1}{2}} f, \quad \text{vagyis} \quad H^{\frac{1}{2}} f \in \mathfrak{L}.$$

De $g = H^{\frac{1}{2}} f \in \mathfrak{L}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $H^{\frac{1}{2}} g \in \mathfrak{N}$, azaz $Hf \in \mathfrak{N}$.

δ) Ha létezik korlátos H^{-1} inverz operátor, akkor az $\mathfrak{N}$ altérben tekintett $H_{\mathfrak{N}}$ operátornak ebben az altérben van inverz operátora. Ha az utóbbit a $H_{\mathfrak{N}}^{(-1)}$ jellel jelöljük, akkor[6]

$$H_{\mathfrak{N}}^{(-1)} f = P_{\mathfrak{N}} H^{-1} P_{\mathfrak{N}} f \quad (f \in \mathfrak{N}).$$

Valóban, a *γ)* állítás szerint

$$(H_{\mathfrak{N}} f, f) = (Hf, f) \tag{1. 4}$$

minden $f \in H^{-1}\mathfrak{N}$ elemre. Elvégezve az (1. 4) egyenlőségben az

$$f = H^{-1} g \quad (g \in \mathfrak{N})$$

helyettesítést, kapjuk:

$$(H^{-1} H_{\mathfrak{N}} H^{-1} g, g) = (H^{-1} g, g) \quad (g \in \mathfrak{N}).$$

Ha itt a g elemet $g = P_{\mathfrak{N}} f$ $(f \in \mathfrak{H})$ alakban állítjuk elő és felhasználjuk, hogy

$$H_{\mathfrak{N}} f = H_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{N}} f = P_{\mathfrak{N}} H_{\mathfrak{N}} f \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

akkor az

$$(R H_{\mathfrak{N}} R g, g) = (Rg, g) \tag{1. 5}$$

képletet nyerjük, ahol R-rel azt az $\mathfrak{N}$ térben értelmezett operátort jelöltük, amelyet az

$$Rg = P_{\mathfrak{N}} H^{-1} P_{\mathfrak{N}} g = P_{\mathfrak{N}} H^{-1} g \quad (g \in \mathfrak{N})$$

egyenlőség határoz meg. Minthogy

$$(Rg, g) = (H^{-1} g, g) \geqq \frac{1}{l} (g, g) \quad (g \in \mathfrak{N}, \quad l = \|H\|),$$

létezik korlátos R^{-1} inverz operátor, és az (1. 5) egyenlőségben elvégezve a

$$g = R^{-1} f \quad (f \in \mathfrak{N})$$

helyettesítést, azt kapjuk, hogy

$$H_{\mathfrak{N}} f = R^{-1} f \quad (f \in \mathfrak{N}),$$

és éppen ez volt az állítás.

3. Az alábbiakban olyan képleteket ismertetünk, amelyek különböző konkrét feladatok során alkalmasak $H_{\mathfrak{N}}$ kiszámítására.

[6] $P_{\mathfrak{N}}$ az az operátor, amelyik a $\mathfrak{H}$ teret merőlegesen $\mathfrak{N}$-re vetíti.
A *δ)* állítás a továbbiakban sehol sem kerül felhasználásra. Mégis érdekes annyiban, hogy véges dimenziójú $\mathfrak{H}$ tér esetén a $H_{\mathfrak{N}}$ operátor alkalmas bázisra vonatkozó matrixa a H operátor megfelelő matrixából egyszerű racionális műveletek útján megkapható.

Először megjegyezzük, hogy egy $\varphi \in \mathfrak{H}$ elem akkor és csak akkor tartozik az $\mathfrak{R}(H^{\frac{1}{2}})$ altérhez, ha

$$|\psi| = \left(\int_0^l \frac{d|E(\lambda)\varphi|^2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

E feltétel teljesülése esetén

$$\varphi = H^{\frac{1}{2}}\psi,$$

ahol

(1. 6) $$\psi = \int_0^l \frac{dE(\lambda)\varphi}{\sqrt{\lambda}} \; (= H^{(-\frac{1}{2})}\varphi).$$

Legyen $\mathfrak{H}_0$ a H operátor összes zérushelyeinek a halmaza, $\mathfrak{H}_+$ pedig $\mathfrak{H}_0$ ortogonális komplementuma:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_+ \quad (H\mathfrak{H}_0 = 0, \quad H\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_+).$$

Az $\mathfrak{R}(H^{\frac{1}{2}}) \subset \mathfrak{H}_+$ halmazon az (1. 6) egyenlőséggel értelmezett (általában nem korlátos) $H^{(-\frac{1}{2})}$ operátor a $\mathfrak{H}_+$ altéren tekintett $H^{\frac{1}{2}}$ operátor inverze, és ha φ befutja az $\mathfrak{R}(H^{\frac{1}{2}})$ halmazt, akkor $\psi = H^{(-\frac{1}{2})}\varphi$ befutja az egész $\mathfrak{H}_+$ alteret.

Az $\mathfrak{R}(H^{\frac{1}{2}})$ lineáris sokaságon vezessünk be egy új $[\varphi, \chi]$ skaláris szorzatot a

$$[\varphi, \chi] = \int_0^l \frac{d(E(\lambda)\varphi, \chi)}{\lambda} \qquad (\varphi, \chi \in \mathfrak{R}(H^{\frac{1}{2}}))$$

képlet segítségével. Erre a skaláris szorzatra nézve az $\mathfrak{R}(H^{\frac{1}{2}})$ halmaz a $\mathfrak{H}_+$ térrel izometrikus teljes Hilbert-tér, mert

$$[\varphi, \chi] = (H^{(-\frac{1}{2})}\varphi, H^{(-\frac{1}{2})}\chi).$$

Jegyezzük meg, hogy a

$$[\varphi] = \sqrt{[\varphi, \varphi]} \geqq \frac{1}{\sqrt{l}}|\varphi| \qquad (\varphi \in \mathfrak{R}(H^{\frac{1}{2}}))$$

összefüggés folytán minden a $[\varphi]$ norma szerint konvergens $\{\chi_n\} \subset \mathfrak{R}(H^{\frac{1}{2}})$ sorozat a $|\varphi|$ normára vonatkozóan még inkább konvergál (és természetesen ugyanahhoz a határértékhez).

Jelölje $\mathfrak{L}_+$ azoknak az $f \in \mathfrak{H}_+$ vektoroknak a zárt halmazát, amelyekre $H^{\frac{1}{2}}f \in \mathfrak{N}$. Más szóval

$$\mathfrak{L}_+ = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{H}_+,$$

vagy még másképpen

$$\mathfrak{L}_+ = H^{(-\frac{1}{2})}\mathfrak{N}(H).$$

Ha $f \in \mathfrak{L}$, azaz $H^{\frac{1}{2}}f \in \mathfrak{N}$, akkor f-et $f = f_0 + f_+$ alakban előállítva, ahol $f_0 \in \mathfrak{H}_0$, $f_+ \in \mathfrak{H}_+$, kapjuk:

$$H^{\frac{1}{2}}f_0 = 0, \quad H^{\frac{1}{2}}f_+ = H^{\frac{1}{2}}f \in \mathfrak{N},$$

és innen $f_0 \in \mathfrak{L}$, $f_+ \in \mathfrak{L}_+ \subset \mathfrak{L}$.

Ezek szerint

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 \oplus \mathfrak{L}_+, \quad \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{H}_0$$

és

$$P_{\mathfrak{L}} = P_{\mathfrak{L}_0} + P_{\mathfrak{L}_+}.$$

Minthogy $\mathfrak{N}(H^{\frac{1}{2}}) \subset \mathfrak{H}_+$, fennáll

$$P_{\mathfrak{L}_0} H^{\frac{1}{2}} = 0, \quad P_{\mathfrak{L}} H^{\frac{1}{2}} = P_{\mathfrak{L}_+} H^{\frac{1}{2}},$$

és így a $H_{\mathfrak{N}}$ operátor (1. 1) kifejezése a következővel helyettesíthető:

$$H_{\mathfrak{N}} = H^{\frac{1}{2}} P_{\mathfrak{L}_+} H^{\frac{1}{2}}. \tag{1.7}$$

Legyen $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in N}$ teljes ortonormális rendszer $\mathfrak{N}(H)$-ban (a $[\varphi, \chi]$ skaláris szorzatra vonatkozóan):

$$[\varphi_\mu, \varphi_\nu] = \delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu \in N).$$

Megmutatjuk, hogy ekkor

$$H_{\mathfrak{N}} f = \sum_{\nu \in N}^{[\,]} (f, \varphi_\nu) \varphi_\nu, \tag{1.8}$$

és végtelen N halmaz esetén tetszés szerinti $f \in \mathfrak{H}$ vektorra az (f, φ_ν) $(\nu \in N)$ együtthatók közül csak megszámlálhatóan sok különbözik nullától, továbbá a jobb oldalon álló sor erősen konvergens az $[f]$ normára nézve[7], tehát az $|f|$ normára nézve még inkább.

Valóban, az $\mathfrak{N}(H)$ tér $\{\varphi_\nu\}$ teljes ortonormális rendszerének az $\mathfrak{L}_+$ tér egy (közönséges értelemben) teljes ortonormális $\{\psi_\nu\}$ rendszere felel meg, ahol

$$\psi_\nu = H^{(-\frac{1}{2})} \varphi_\nu, \quad \varphi_\nu = H^{\frac{1}{2}} \psi_\nu \quad (\nu \in N). \tag{1.9}$$

Ezek szerint

$$P_{\mathfrak{L}_+} H^{\frac{1}{2}} f = \sum_{\nu \in N} (H^{\frac{1}{2}} f, \psi_\nu) \psi_\nu = \sum_{\nu \in N} (f, \varphi_\nu) \psi_\nu; \tag{1.10}$$

másrészt figyelembe véve, hogy

$$\chi_n \to \chi \quad \text{esetén} \quad [H^{\frac{1}{2}} \chi_n - H^{\frac{1}{2}} \chi] \to 0,$$

az (1. 7), (1. 9), (1. 10) egyenlőségekből kapjuk:

$$H_{\mathfrak{N}} f = H^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\nu \in N} (f, \varphi_\nu) \psi_\nu \right) = \sum_{\nu \in N}^{[\,]} (f, \varphi_\nu) \varphi_\nu,$$

és ezt kellett bebizonyítani.

4. Időzzünk még annál az esetnél, amikor $\mathfrak{N}(H)$ véges dimenziójú.

ε) Ha $\mathfrak{N}(H)$ n-dimenziós tér és $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ ennek egy bázisa, akkor

$$H_{\mathfrak{N}} f = \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_{jk} (f, \varphi_j) \varphi_k \quad (f \in \mathfrak{H}), \tag{1.11}$$

ahol a $\Gamma_n = \|\gamma_{jk}\|_1^n$ *matrix a*

$$\Phi_n = \|[\varphi_j, \varphi_k]\|_1^n$$

matrix inverze.

[7] Ez úgy tüntetjük fel, hogy a Σ jel fölé [ ] jelet írunk.

Csakugyan, nem nehéz igazolni, hogy az (1. 11) egyenlőség jobb oldalán álló összeg nem változik meg, ha a $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ bázist valamilyen más bázissal helyettesítjük. Másrészt ha a $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ bázist úgy választjuk, hogy

$$[\varphi_j, \varphi_k] = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

akkor $\Gamma_n = \Phi_n^{-1}$ az egységmatrix lesz, és az (1. 11) egyenlőség jobb oldalán álló összeg a

$$\sum_{j=1}^{n} (f, \varphi_j) \varphi_j$$

összegbe megy át, amely az (1. 8) összefüggés értelmében a $H_{\mathfrak{N}} f$ elemmel egyenlő.

Megjegyezzük, hogy az (1. 11) képletet még a következőképpen is fel lehet írni:

$$(1.12) \qquad H_{\mathfrak{N}} f = -\frac{1}{|\Phi_n|} \begin{vmatrix} 0 & (f, \varphi_1) \ldots (f, \varphi_n) \\ \varphi_1 & \\ \vdots & \Phi_n \\ \varphi_n & \end{vmatrix}.$$

Ha $\mathfrak{N}$ egydimenziós, $\mathfrak{N}(H) = \mathfrak{N}$ és $\varphi \in \mathfrak{N}$ $(\varphi \neq 0)$, akkor azt kapjuk, hogy

$$(1.13) \qquad H_{\mathfrak{N}} f = \frac{(f, \varphi)}{[\varphi]^2} \varphi \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Ez a képlet abban az esetben is érvényes, amikor $\mathfrak{N}(H) = 0$ és így $H_{\mathfrak{N}} = 0$, mert ilyenkor $\varphi \notin \mathfrak{N}(H^{\frac{1}{2}})$ és úgy tekinthetjük, hogy

$$[\varphi]^2 = \int_0^l \frac{d|E(\lambda)\varphi|^2}{\lambda} = \infty.$$

Ha az (1. 13) formulát összevetjük azzal a ténnyel, hogy az 1. tétel szerint

$$H_{\mathfrak{N}} = \max C,$$

ahol C eleget tesz az

$$\mathfrak{N}(C) \subset \mathfrak{N}, \quad C \leqq H$$

feltételeknek, akkor könnyen nyerjük[8], hogy

$$(1.14) \qquad \sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{|(f, \varphi)|^2}{(Hf, f)} = \int_0^l \frac{d|E(\lambda)\varphi|^2}{\lambda} \quad (\varphi \in \mathfrak{H}).$$

[8] Valóban, ha $\mathfrak{N}(C) \subset \mathfrak{N}$, akkor $Cf = \alpha(f, \varphi)\varphi$; továbbá ha $C \leqq H$, akkor $\alpha|(f, \varphi)|^2 \leqq (Hf, f)$, azaz

$$\alpha \leqq \alpha_H = \inf \frac{(Hf, f)}{|(f, \varphi)|^2}$$

és innen

$$H_{\mathfrak{N}} f = \alpha_H (f, \varphi) \varphi.$$

Összehasonlítva ezt az (1.13) egyenlőséggel megkapjuk az (1.14) összefüggést.

Ezt az egyenlőséget nem nehéz közvetlenül is bebizonyítani, belőle pedig már következik (1. 13).

5. Most legyen $\{\varphi_j\}_1^\infty$ egy $\mathfrak{N}(H)$-beli elemekből álló sorozat, amelynek a lineáris burka sűrű $\mathfrak{N}(H)$-ban az $[f]$ normára nézve[9], és legyen

$$\Phi_n = \|[\varphi_j, \varphi_k]\|_1^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Az elmondottak után nem nehéz belátni, hogy

$$H_{\mathfrak{N}} f = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Phi_n|} \begin{vmatrix} 0 & (f, \varphi_1) \ldots (f, \varphi_n) \\ \varphi_1 & \\ \vdots & \Phi_n \\ \varphi_n & \end{vmatrix} \qquad (f \in \mathfrak{H}), \tag{1.15}$$

ahol a jobb oldalon álló határérték nemcsak a régi $|f|$ normára vonatkozóan, hanem az $[f]$ norma értelmében is létezik.

Valóban, minthogy a határérték jele után álló kifejezés nem változik meg, ha a $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ vektorokat tetszés szerinti egymástól lineárisan független és a $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ vektorokkal lineárisan kifejezhető $\varphi_1', \ldots, \varphi_n'$ vektorokkal helyettesítjük, a kifejezés akkor sem változik meg, ha a $\{\varphi_k\}_1^\infty$ sorozatot a belőle a $[\varphi, \psi]$ skaláris szorzatra vonatkozó lépésenkénti ortonormálással nyerhető $\{\varphi_k'\}_1^\infty$ sorozattal pótoljuk. Ezek szerint eleve feltehetjük, hogy

$$[\varphi_j, \varphi_k] = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots).$$

De ekkor az (1. 15) összefüggés a

$$H_{\mathfrak{N}} f = \sum_1^\infty (f, \varphi_j)\, \varphi_j \qquad (f \in \mathfrak{H})$$

összefüggésbe megy át, ezt pedig már igazoltuk a 3. pontban.

2. §. Az A_μ és az A_M operátor

1. *Ebben a paragrafusban korlátos hermitikus A operátorokat fogunk vizsgálni.* Az általánosság megszorítása nélkül mindig feltehetjük, hogy az ilyen operátorok $\mathfrak{D}(A)$ értelmezési tartománya zárt. Minket az az eset fog érdekelni, amikor $\mathfrak{D}(A)$ a $\mathfrak{H}$ tér valódi része (altere); ebben az esetben érvényes a következő

2. TÉTEL. *Minden korlátos hermitikus A operátornak van legalább egy önadjungált folytatása, amelynek a normája megegyezik A normájával.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\|A\| = 1$. Minthogy bármilyen $f \in \mathfrak{H}$ elemre

$$|(Ag, f)| \leqq \|A\| \cdot |g| \cdot |f| = |g|\,|f|,$$

[9] Ilyen sorozat létezése biztosítva van, ha $\mathfrak{L}$ szeparábilis, tehát még inkább, ha $\mathfrak{H}$ szeparábilis.

az (Ag,f) $(g\in\mathfrak{D}(A))$ kifejezés folytonos lineáris funkcionál a $\mathfrak{D}(A)$ halmazon. Következésképpen, RIESZ FRIGYES lemmája értelmében, tetszés szerinti $f\in\mathfrak{H}$ elemnek egyértelműen megfelel egy $h\in\mathfrak{D}(A)$ elem, amelyre

$$(Ag,f)=(g,h)\quad (g\in\mathfrak{D}(A)), \tag{2. 1}$$

és fennáll $|h|\leqq|f|$.

Legyen

$$h=A^{\circ}f\quad (f\in\mathfrak{H}, A^{\circ}f\in\mathfrak{D}(A)). \tag{2. 2}$$

Könnyen belátható, hogy az A° operátor lineáris, továbbá

$$|A^{\circ}f|\leqq|f|\quad (f\in\mathfrak{H}).$$

Legyen P a $\mathfrak{H}$ tér $\mathfrak{D}(A)$ altérre való merőleges vetítésének operátora. A (2. 1), (2. 2) egyenlőségek alapján $g,f\in\mathfrak{D}(A)$ esetén

$$(g, A^{\circ}f)=(Ag,f)=(g, Af)=(g, PAf),$$

és így

$$A^{\circ}f=PAf\quad (f\in\mathfrak{D}(A)).$$

Legyen $\mathfrak{N}$ a $\mathfrak{D}(A)$ altér ortogonális komplementuma $\mathfrak{H}$-ban:

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{D}(A)\oplus\mathfrak{N},$$

$\{e_\nu\}_{\nu\in N}$ pedig ortonormális bázis $\mathfrak{N}$-ben. Tetszés szerinti $f\in\mathfrak{D}(A)$ elemre

$$Af-A^{\circ}f=Af-PAf\in\mathfrak{N},$$

tehát

$$Af=A^{\circ}f+\sum_{\nu\in N}c_\nu(f)e_\nu\quad (f\in\mathfrak{D}(A)),$$

ahol

$$c_\nu(f)=(Af, e_\nu)\quad (\nu\in N).$$

Feltevés szerint $\|A\|=1$, úgyhogy

$$|Af|^2=|A^{\circ}f|^2+\sum_{\nu\in N}|c_\nu(f)|^2\leqq|f|^2\quad (f\in\mathfrak{D}(A)). \tag{2. 3}$$

Legyen

$$(g,f)_1=(g,f)-(A^{\circ}g, A^{\circ}f)\quad (g,f\in\mathfrak{H});$$

ekkor az $|A^{\circ}f|\leqq|f|$ $(f\in\mathfrak{H})$ összefüggés értelmében

$$(f,f)_1\geqq 0\quad (f\in\mathfrak{H}),$$

és így bevezethetjük az

$$|f|_1=\sqrt{(f,f)_1}=\sqrt{|f|^2-|A^{\circ}f|^2}\quad (\geqq 0) \tag{2. 4}$$

normát.

Azonosítva $\mathfrak{H}$-ban mindazon f,f' elempárokat, amelyekre $|f-f'|_1=0$, és teljessé téve a $\mathfrak{H}$ teret az új $|f|_1$ normára vonatkozóan, egy új $\mathfrak{H}_1$ *Hilbert*-teret kapunk.

Jelölje $\mathfrak{D}_1$ a $\mathfrak{D}(A)$ halmaz $\mathfrak{H}_1$-beli lezárását. A (2. 3) egyenlőtlenség következtében bármelyik $f\in\mathfrak{D}(A)$ elemre

$$\sum_{\nu\in N}|c_\nu(f)|^2\leqq|f|_1^2. \tag{2. 5}$$

Ebből adódik, hogy $c_\nu(f)$ $(\nu\in N)$ lineáris, korlátos (folytonos) funkcionál a $\mathfrak{H}_1$ részhalmazaként tekintett $\mathfrak{D}(A)$ halmazon; következésképpen $c_\nu(f)$ a folytonosság megtartásával egyértelműen folytatható $\mathfrak{D}_1$-re. Az is világos, hogy ennek során a (2. 5) összefüggés érvényes marad minden $f\in\mathfrak{D}_1$ elemre.

RIESZ FRIGYES lemmája alapján minden $\nu\in N$ index mellett található olyan $h_\nu\in\mathfrak{D}_1$, amelyre

$$c_\nu(f)=(f,h_\nu)_1 \quad (f\in\mathfrak{D}_1). \tag{2.6}$$

Vezessük be tetszés szerinti $\nu\in N$ indexre a

$$\gamma_\nu(f)=(f,h_\nu)_1 \quad (f\in\mathfrak{H}_1) \tag{2.7}$$

jelölést.

Legyen P_1 a $\mathfrak{H}_1$ tér $\mathfrak{D}_1$-re való merőleges vetítésének operátora. Ekkor a (2. 6), (2. 7) egyenlőségek értelmében

$$\gamma_\nu(f)=\gamma_\nu(P_1f)=c_\nu(P_1f) \quad (f\in\mathfrak{H}_1,\quad \nu\in N),$$

tehát, figyelembe véve a (2. 5) egyenlőtlenséget, kapjuk:

$$\sum_{\nu\in N}|\gamma_\nu(f)|^2=\sum_{\nu\in N}|c_\nu(P_1f)|^2\leqq|P_1f|_1^2\leqq|f|_1^2 \quad (f\in\mathfrak{H}). \tag{2.8}$$

Legyen

$$A_1f=A^\circ f+\sum_{\nu\in N}\gamma_\nu(f)e_\nu \quad (f\in\mathfrak{H}).$$

Ha $g\in\mathfrak{D}(A)$, akkor $\gamma_\nu(g)=c_\nu(g)$, ennélfogva

$$A_1g=Ag \quad (g\in\mathfrak{D}(A)); \tag{2.9}$$

ezenkívül a (2. 8), (2. 4) összefüggések értelmében

$$|A_1f|^2=|A^\circ f|^2+\sum_{\nu\in N}|\gamma_\nu(f)|^2\leqq|A^\circ f|^2+|f|_1^2=|f|^2,$$

vagyis

$$\|A_1\|=1.$$

Tekintsük az A_1 operátor A_1^* adjungált operátorát. Figyelembe véve a (2. 1), (2. 2) egyenlőségeket azt találjuk, hogy $g\in\mathfrak{D}(A)$ esetén

$$(A_1^*g,f)=(g,A_1,f)=(g,A^\circ f)=(Ag,f) \quad (f\in\mathfrak{H}),$$

és innen

$$A_1^*g=Ag \quad (g\in\mathfrak{D}(A)). \tag{2.10}$$

De akkor az

$$\tilde{A}=\frac{1}{2}(A_1+A_1^*)$$

önadjungált operátor az A operátor kívánt tulajdonságú folytatása lesz, mert (2. 6), (2. 7) és (2. 10) értelmében

$$\tilde{A}g=Ag \quad (g\in\mathfrak{D}(A)),$$

továbbá

$$1=\|A\|\leqq\|\tilde{A}\|\leqq\frac{1}{2}(\|A_1\|+\|A_1^*\|)=1,$$

azaz $\|\tilde{A}\|=1$. A tételt bebizonyítottuk.

2. *A továbbiakban mindig feltesszük, hogy A hermitikus operátor, amelyre*

$$\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(\overline{A}) \neq \mathfrak{H} \quad \text{és} \quad \|A\| = 1.$$

Az $\mathfrak{N}$ betűvel $\mathfrak{D}(A)$ ortogonális komplementumát fogjuk jelölni:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{D}(A) \oplus \mathfrak{N}.$$

$\mathfrak{B}(A)$-val fogjuk jelölni az A operátor összes olyan $\tilde{A}$ önadjungált folytatásainak a halmazát, amelyekre $\|\tilde{A}\| = 1$.

A 2. tétel értelmében a $\mathfrak{B}(A)$ halmaz nem üres; sőt, érvényes a következő

3. TÉTEL. *A $\mathfrak{B}(A)$ halmaznak van A_μ minimális eleme és A_M maximális eleme, és $\mathfrak{B}(A)$ azokból és csak azokból az A' korlátos önadjungált operátorokból áll, amelyek eleget tesznek az*

$$A_\mu \leqq A' \leqq A_M$$

feltételnek.

Bizonyítás. $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ esetén egy A' operátor akkor és csak akkor lesz A önadjungált folytatása, ha előállítható

$$A' = \tilde{A} + C$$

alakban, ahol C olyan önadjungált operátor, amely $\mathfrak{D}(A)$ elemein a nulla értéket veszi fel:

$$Cf = 0 \quad (f \in \mathfrak{D}(A)).$$

Az utóbbi feltétel ekvivalens azzal, hogy

$$\mathfrak{R}(C) \subset \mathfrak{N} \quad (\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{D}(A)). \tag{2.11}$$

Másrészt $\|A'\| \leqq 1$ akkor és csak akkor, ha

$$|(A'f, f)| \leqq |f|^2 \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

vagyis

$$-(f + \tilde{A}f, f) \leqq (Cf, f) \leqq (f - \tilde{A}f, f).$$

Az 1. tétel szerint az utóbbi egyenlőtlenségek a (2. 11) feltétel mellett akkor és csak akkor teljesülnek, ha

$$-(I + \tilde{A})_{\mathfrak{N}} \leqq C \leqq (I - \tilde{A})_{\mathfrak{N}}. \tag{2.12}$$

A (2. 11), (2. 12) feltételek fennállnak többek között akkor, ha C helyébe az $(I - \tilde{A})_{\mathfrak{N}}$ vagy a $-(I + \tilde{A})_{\mathfrak{N}}$ operátort írjuk.

Ennélfogva az

$$\begin{aligned} A_\mu &= \tilde{A} - (I + \tilde{A})_{\mathfrak{N}}, \\ A_M &= \tilde{A} + (I - \tilde{A})_{\mathfrak{N}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

operátorok $\mathfrak{B}(A)$-hoz tartoznak, és ha A' az A operátor valamelyik önadjungált folytatása, akkor az $A' \in \mathfrak{B}(A)$ összefüggés szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$A_\mu \leqq A' \leqq A_M \tag{2.14}$$

legyen.

A bizonyítás befejezése céljából már csak azt kell megmutatnunk, hogy minden a (2. 14) feltételt kielégítő A' önadjungált operátor A folytatása.

A (2. 14) egyenlőtlenségekből adódik, hogy

$$R = A' - A_\mu \geqq 0, \quad R \leqq A_M - A_\mu;$$

másrészt

$$A_\mu f = A_M f = Af \quad (f \in \mathfrak{D}(A))$$

miatt

$$0 \leqq (Rf, f) \leqq (A_M f, f) - (A_\mu f, f) = 0 \qquad (f \in \mathfrak{D}(A)),$$

azaz $(Rf, f) = 0$ $(f \in \mathfrak{D}(A))$, és innen $R \geqq 0$ felhasználásával

$$Rf = A'f - Af = 0.$$

A tételt bebizonyítottuk.

A (2. 13) képlet értelmében $\tilde{A} = A_\mu$ esetén

$$(I + \tilde{A})_{\mathfrak{N}} = 0; \tag{2. 15}$$

$\tilde{A} = A_M$ esetén pedig

$$(I - \tilde{A})_{\mathfrak{N}} = 0. \tag{2. 16}$$

Másrészt a $H_{\mathfrak{N}}$ operátor *β)* tulajdonsága (lásd 1. §) szerint a (2. 15), (2. 16) egyenlőségek rendre az

$$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}((I + \tilde{A})^{\frac{1}{2}}) = \{0\}, \quad \mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}((I - \tilde{A})^{\frac{1}{2}}) = \{0\} \tag{2. 17}$$

egyenlőségekkel ekvivalensek.

Ebből következik az alábbi

4. TÉTEL. *Legyen $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$, és az $\tilde{A}$ operátor spektrális felbontása*

$$\tilde{A}f = \int_{-1}^{1} \lambda dF(\lambda) f \quad (f \in \mathfrak{H}). \tag{2. 18}$$

Ekkor $\tilde{A} = A_\mu$ (ill. $\tilde{A} = A_M$) teljesüléséhez szükséges és elégséges, hogy a

$$J(\varphi, \tilde{A}) = \int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)\varphi|^2}{1+\lambda} \quad \textit{ill.} \quad J(\varphi, -\tilde{A}) = \int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)\varphi|^2}{1-\lambda}$$

integrál értéke ∞ legyen tetszés szerinti $\varphi \in \mathfrak{N}$ $(\varphi \neq 0)$ elemre.

Az $\tilde{A}$ operátor akkor és csak akkor lesz A egyetlen $\leqq 1$ normájú önadjungált folytatása, ha egyidejűleg

$$J(\varphi, \tilde{A}) = J(\varphi, -\tilde{A}) = \infty \qquad (0 \neq \varphi \in \mathfrak{N}).$$

Valóban, az $f \in \mathfrak{H}$ elem akkor tartozik az $\mathfrak{R}((I \pm \tilde{A})^{\frac{1}{2}})$ halmazhoz, ha a megfelelő $J(f, \pm\tilde{A}) < \infty$ feltétel teljesül; így a tétel első állításában szereplő feltételek rendre ekvivalensek a (2. 17) feltételekkel. A tétel második állítása viszont következik az elsőből, mert $\mathfrak{B}(A)$ akkor és csak akkor áll az egyetlen $\tilde{A}$ operátorból, ha egyidejűleg $\tilde{A} = A_\mu$ és $\tilde{A} = A_M$.

3. Minden A hermitikus operátorhoz $(\|A\| \leqq 1)$ hozzá fogunk rendelni egy „skaláris szorzatot" és egy „normát" a következőképpen:

$$(g,f)_A = (g,f)+(Ag,f), \quad |g|_A = \sqrt{(g,g)_A} \qquad (g,f \in \mathfrak{D}(A)).$$

Ekkor minden $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ folytatásnak ugyanezen képletek szerint megfelel egy $(g,f)_{\tilde{A}}$ skaláris szorzat és egy $|g|_{\tilde{A}}$ norma $(g,f \in \mathfrak{H})$, és ezek a $(g,f)_A$ skaláris szorzat ill. a $|g|_A$ norma folytatását képezik.

A (2. 17) képletek közül az elsőből könnyen következik az alábbi

5. TÉTEL. *Ahhoz, hogy egy $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ operátor megegyezzék az A_μ operátorral, szükséges és elégséges, hogy $\mathfrak{D}(A)$ sűrű legyen $\mathfrak{H}$-ban az $|f|_{\tilde{A}}$ normára vonatkozóan.*

Bizonyítás. A (2. 15) összefüggés értelmében az $\tilde{A} = A_\mu$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy

$$H_{\mathfrak{N}} = 0,$$

ahol $H = I + \tilde{A}$.

Másrészt tekintettel arra, hogy $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}$, az 1. tétel bizonyítása során tett megállapítás alapján tetszés szerinti $f \in \mathfrak{H}$ elemre

$$(H_{\mathfrak{N}} f, f) = \inf_{g \in \mathfrak{D}(A)} (H(f-g), f-g) = \inf_{g \in \mathfrak{D}(A)} |f-g|_{\tilde{A}}^2,$$

ebből pedig nyerjük a tételt.

4. Most olyan kritériumot fogunk adni arra, hogy csak egy $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ operátor létezzék, amelyben csak az A operátor szerepel (nem pedig valamelyik folytatása).

Előzetesen megjegyezzük, hogy ha az (1. 14) összefüggést a $H = I - \tilde{A}^2$ operátorra alkalmazzuk, ahol $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ spektrális felbontását a (2. 18) képlet szolgáltatja, akkor a következőt kapjuk:

$$\sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{|(f,\varphi)|^2}{|f|^2 - |\tilde{A}f|^2} = \int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)\varphi|^2}{1-\lambda^2} \qquad (\varphi \in \mathfrak{H}), \tag{2.19}$$

ha pedig itt φ helyébe az $\tilde{A}\varphi$ elemet írjuk, azt nyerjük, hogy

$$\sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{|(\tilde{A}f,\varphi)|^2}{|f|^2 - |\tilde{A}f|^2} = \int_{-1}^{1} \frac{\lambda^2\, d|F(\lambda)\varphi|^2}{1-\lambda^2} \qquad (\varphi \in \mathfrak{H}). \tag{2.20}$$

6. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az A hermitikus operátornak $(\|A\| \leqq 1)$ egyetlen olyan $\tilde{A}$ önadjungált folytatása legyen, amelynek a normája $\leqq 1$, szükséges és elégséges, hogy minden $\varphi \perp \mathfrak{D}(A)$ $(\varphi \neq 0)$ vektorra teljesüljön a*

$$\sup_{f \in \mathfrak{D}(A)} \frac{|(Af,\varphi)|^2}{|f|^2 - |Af|^2} = \infty \tag{2.21}$$

feltétel.

Bizonyítás. Először mutassuk meg, hogy $A_\mu < A_M$ esetén a (2. 21) feltétel nem teljesül minden $\varphi \perp \mathfrak{D}(A)$ (vagyis $\varphi \in \mathfrak{N}$) elemre.

Valóban, ha $A_\mu < A_M$, akkor az

$$\tilde{A} = \frac{1}{2}(A_\mu + A_M)$$

választás mellett (2. 13) alapján

$$\frac{1}{2}(A_M - A_\mu) = A_M - \tilde{A} = \tilde{A} - A_\mu = (I - \tilde{A})_{\mathfrak{N}} = (I + \tilde{A})_{\mathfrak{N}}.$$

Legyen a $\chi_0 \in \mathfrak{N}$ elem olyan, hogy

$$\varphi_0 = (I - \tilde{A})_{\mathfrak{N}} \chi_0 = (I + \tilde{A})_{\mathfrak{N}} \chi_0 \neq 0;$$

ekkor $\varphi_0 \in \mathfrak{N}$, és az 1. tétel értelmében

$$\varphi_0 \in \mathfrak{R}[(I - \tilde{A})^{\frac{1}{2}}], \quad \varphi_0 \in \mathfrak{R}[(I + \tilde{A})^{\frac{1}{2}}],$$

tehát

$$\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)\varphi_0|^2}{1 \pm \lambda} < \infty.$$

Ebből (2. 20) segítségével kapjuk:

$$\sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{|(\tilde{A}f, \varphi_0)|^2}{|f|^2 - |\tilde{A}f|^2} < \infty,$$

és így még inkább

$$\sup_{f \in \mathfrak{D}(A)} \frac{|(Af, \varphi_0)|^2}{|f|^2 - |Af|^2} < \infty. \tag{2.22}$$

Ezek szerint a tételben szereplő feltétel elégséges ahhoz, hogy $A_\mu = A_M$ legyen. Most be fogjuk bizonyítani, hogy a feltétel szükséges is. Ehhez azt kell megmutatni, hogy ha egy $\varphi_0 \in \mathfrak{N}$ $(\varphi_0 \neq 0)$ elemre teljesül a (2. 22) feltétel, akkor $A_\mu < A_M$.

Tetszés szerinti $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ operátorból kiindulva vezessünk be a $\mathfrak{H}$ térben egy új $(g, f)_1$ skaláris szorzatot és egy új $|g|_1$ normát a következőképpen:

$$(g, f)_1 = (g, f) - (\tilde{A}g, \tilde{A}f), \quad |g|_1 = \sqrt{(g, g)_1} \qquad (g, f \in \mathfrak{H}).$$

Minthogy $f \in \mathfrak{D}(A)$ esetén $\tilde{A}f = Af$, a (2. 22) feltétel azt jelenti, hogy a

$$c(f) = (Af, \varphi_0) \quad (f \in \mathfrak{D}(A))$$

funkcionál a $\mathfrak{D}(A)$ lineáris halmazon az $|f|_1$ normára nézve folytonos. Jelentse $\tilde{c}(f)$ $(f \in \mathfrak{H})$ ennek a funkcionálnak az egész $\mathfrak{H}$ térre való lineáris és az $|f|_1$ normára nézve folytonos kiterjesztését. Ekkor fennáll

$$|\tilde{c}(f)| \leqq \gamma |f|_1 \leqq \gamma |f| \quad (f \in \mathfrak{H}), \tag{2.23}$$

ahol $\gamma > 0$ állandó. Ebből következik, hogy a $\tilde{c}(f)$ funkcionál a régi normára nézve is folytonos, tehát található olyan $h \in \mathfrak{H}$ elem, hogy

$$\tilde{c}(f) = (f, h) \quad (f \in \mathfrak{H}). \tag{2.24}$$

De akkor (2. 19) és (2. 23) értelmében

$$\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)h|^2}{1-\lambda^2} = \sup \frac{|\tilde{c}(f)|^2}{|f|_1^2} \leqq \gamma^2,$$

és így

$$\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)h|^2}{1 \pm \lambda} < \infty. \tag{2.25}$$

Másrészt tekintettel arra, hogy

$$(f, h - \tilde{A}\varphi_0) = (f, h) - (Af, \varphi_0) = \tilde{c}(f) - c(f) = 0 \quad (f \in \mathfrak{D}(A)),$$

vagyis $h - \tilde{A}\varphi_0 \perp \mathfrak{D}(A)$, kapjuk:

$$h = \tilde{A}\varphi_0 - \varphi_1 \quad (\varphi_1 \in \mathfrak{N}).$$

Továbbá ha az

$$\left(\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)(g-h)|^2}{1 \pm \lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)g|^2}{1 \pm \lambda}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)h|^2}{1 \pm \lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$$

egyenlőtlenségben a

$$g = \tilde{A}\varphi_0 \pm \varphi_0, \quad g - h = \varphi_1 \pm \varphi_0$$

választással élünk, akkor a (2. 25) képlet és az

$$\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)g|^2}{1 \pm \lambda} = \int_{-1}^{1} (1 \pm \lambda)\, d|F(\lambda)\varphi_0|^2 < \infty$$

összefüggés felhasználásával azt nyerjük, hogy

$$\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)(\varphi_1 \pm \varphi_0)|^2}{1 \pm \lambda} < \infty.$$

Minthogy $\varphi_1 \pm \varphi_0 \in \mathfrak{N}$ és a $\varphi_1 \pm \varphi_0$ vektorok közül legalább az egyik nem nulla (mert $\varphi_0 \neq 0$), a 4. tétel szerint $\mathfrak{B}(A)$ tartalmaz $\tilde{A}$-tól különböző operátorokat, vagyis $A_\mu < A_M$.

A tételt bebizonyítottuk.

5. A $\mathfrak{D}(A) \neq \mathfrak{H}$ zárt halmazon értelmezett A hermitikus operátort **egyszerűnek** fogjuk nevezni, ha $\mathfrak{D}(A)$ nem tartalmaz egyetlen, A-ra nézve invariáns lineáris alteret sem.

Ha az A operátor nem egyszerű, akkor az összes $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{D}(A)$ invariáns alterek halmazelméleti összege maximális invariáns $\mathfrak{L}_M$ alteret alkot. Ebben az esetben a $\mathfrak{H}$ teret és a $\mathfrak{D}(A)$ alteret

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_M \oplus \mathfrak{H}_1, \quad \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{L}_M \oplus \mathfrak{D}_1 \quad (\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{H}_1)$$

alakú ortogonális direkt összegként előállítva az A operátor összes lehetséges $\tilde{A}$ önadjungált folytatásai ($\|\tilde{A}\| \leqq 1$) megkeresésének a feladatát visszavezethetjük a $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}(A_1)$ halmazon értelmezett és ott az A operátorral megegyező, tehát már $\mathfrak{H}_1$-beli értékkészlettel rendelkező A_1 operátor összes $\tilde{A}_1$ önadjungált folytatásainak ($\|\tilde{A}_1\| \leqq 1$) a megkeresésére.[10]

Természetes módon adódik a következő kérdés: van-e minden egyszerű A operátornak ($\|A\| \leqq 1$) egyszerű spektrumú $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ folytatása? Meg lehet mutatni, hogy a válasz tagadó. *Ha* azonban $\mathfrak{D}(A)$ *ortogonális komplementuma egydimenziós, akkor bármelyik*

$$\tilde{A}f = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dF(\lambda) f \quad (f \in \mathfrak{H})$$

önadjungált folytatásnak egyszerű spektruma van.

Valóban, legyen $\varphi \perp \mathfrak{D}(A)$ ($\varphi \neq 0$). Tekintsük az $F(\lambda)\varphi$ ($-\infty < \lambda < \infty$) halmaz $\mathfrak{H}_0$ zárt lineáris burkát és ennek ortogonális komplementumát, $\mathfrak{N}$-et: $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{N}$. Mint ismeretes, $\tilde{A}\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_0$ és $\tilde{A}\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}$. Másrészt $\varphi \in \mathfrak{H}_0$ miatt $\varphi \perp \mathfrak{N}$, és így $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{D}(A)$. De A egyszerű operátor, azaz $\mathfrak{N} = \{0\}$, $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$, és ebből következik az állítás helyessége.

A 4. tételre támaszkodva nem nehéz példát szerkeszteni olyan egyszerű hermitikus A operátorokra ($\|A\| \leqq 1$), amelyeknél az alábbi esetek egyike vagy másika áll fenn:

1) $A_\mu = A_M$, 2) $A_\mu < A_M$.

Először is megjegyezzük, hogy ha a $-1, 1$ pontok közül akár csak az egyik is nem tartozik valamilyen $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ folytatás spektrumához, akkor biztosan a 2) esettel van dolgunk. Csakugyan, ilyenkor tetszés szerinti $\varphi \in \mathfrak{H}$ elemre a $J(\varphi, \pm A)$ integrálok közül az egyik véges, tehát az állítás a 4. tételből adódik.

Ezek szerint ha $\|A\| < 1$, akkor mindig a 2) eset áll fenn, mert a 2. tétel értelmében van olyan $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ operátor, amelyre $\|\tilde{A}\| = \|A\| = l < 1$, és így $\tilde{A}$ spektruma a $[-l, l]$ intervallumban helyezkedik el.

Ha $\|A\| = 1$ és a $-1, 1$ pontok mindketten hozzátartoznak egy $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ spektrumához, akkor mindkét eset lehetséges.

Valóban, legyen B önadjungált operátor a

$$Bf = \int_{-1}^{1} \lambda \, dF(\lambda) f \quad (f \in \mathfrak{H})$$

spektrális felbontással, és tegyük fel, hogy a $-1, 1$ pontok B spektrumához tartoznak. Ekkor mindig található olyan $\varphi_0 \in \mathfrak{H}$, hogy egyidejűleg

$$J(\varphi_0, \pm B) = \int_{-1}^{1} \frac{d\,|F(\lambda)\,\varphi_0|^2}{1 \pm \lambda} = \infty.$$

[10] Speciálisan ez az oka annak, hogy az $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ operátorok általános alakjának a meghatározására vonatkozó feladat teljesen triviálisan oldható meg, ha $\mathfrak{D}(A)$ invariáns A-ra nézve, vagyis ha A önadjungált operátor $\mathfrak{D}(A)$-ban.

Jelöljük $\mathfrak{D}$-vel azoknak az f vektoroknak az összességét, amelyek ortogonálisak φ_0-ra, és értelmezzünk egy A operátort az $Af=Bf$ ($f\in\mathfrak{D}$) képlettel. Ekkor a 4. tétel szerint B az A operátor egyetlen olyan önadjungált folytatása lesz, amelynek a normája $\leqq 1$ $(A_\mu=A_M=B)$.

Megfordítva, ha a $\varphi_0\neq 0$ elemet úgy választjuk meg, hogy a $J(\varphi_0, \pm B)$ integrálok közül legalább az egyik véges legyen, akkor a 2) eset fog fennállni $(A_\mu<A_M)$.

Ha ezenkívül a B operátornak egyszerű spektruma van, akkor φ_0 egyik vagy másik esetnek megfelelő megválasztása során szorítkozhatunk azokra a $\varphi\in\mathfrak{H}$ elemekre, amelyekre az $F(\lambda)\varphi$ $(-1\leqq\lambda\leqq 1)$ halmaz zárt lineáris burka megegyezik $\mathfrak{H}$-val; így az A operátor egyszerű lesz.

Ennek az állításnak a belátása céljából megjegyezzük, hogy ha egy $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{D}$ zárt lineáris halmazra $A\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}$, tehát egyúttal $B\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}$, akkor fennállnak az $F(\lambda)\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}$ $(-1\leqq\lambda\leqq 1)$ összefüggések is. Másrészt a konstrukció alapján $\mathfrak{D}\perp\varphi_0$, és ennélfogva $\varphi_0\perp F(\lambda)\mathfrak{L}$ $(-1\leqq\lambda\leqq 1)$, azaz tetszés szerinti $f\in\mathfrak{L}$ elemre

$$(\varphi_0, F(\lambda)f)=(F(\lambda)\varphi_0, f)=0 \qquad (-1\leqq\lambda\leqq 1).$$

Ezek szerint ha a φ_0 elemet úgy választottuk, hogy az $F(\lambda)\varphi_0$ $(-1\leqq\lambda\leqq 1)$ elemek zárt lineáris burka az egész $\mathfrak{H}$ tér, akkor $\varphi_0=0$, tehát $\mathfrak{L}=\{0\}$, vagyis az A operátor egyszerű.

3. §. Pozitív operátorok pozitív önadjungált folytatásai

1. Az $S(\neq 0)$ (korlátos vagy nem korlátos) hermitikus operátort pozitívnak mondjuk (jelben: $S>0$), ha

$$(Sf,f)\geqq 0 \quad (f\in\mathfrak{D}(S)). \tag{3.1}$$

A (3. 1) képletből következik, hogy

$$\begin{aligned} |f+Sf|^2 &= |f|^2+2(Sf,f)+|Sf|^2 \geqq |f|^2, \\ |f+Sf|^2 &\geqq |f|^2-2(Sf,f)+|Sf|^2 = |f-Sf|^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ennélfogva az

$$A(f+Sf)=f-Sf \quad (f\in\mathfrak{D}(S)) \tag{3.3}$$

képlet útján az S operátorhoz hozzárendelhetünk egy $A=A(S)$ operátort, amelynek értelmezési tartománya

$$\mathfrak{D}(A)=(I+S)\mathfrak{D}(S),$$

és amely a következő két tulajdonsággal rendelkezik:

$$1)\ \|A\|\leqq 1, \qquad 2)\ Ag+g\neq 0 \qquad (g\in\mathfrak{D}(A),\ g\neq 0). \tag{3.4}$$

A (3. 2) egyenlőtlenségek közül az első azt mutatja, hogy $I+S$ a $\mathfrak{D}(S)$ halmazt kölcsönösen egyértelműen képezi le a $\mathfrak{D}(A)$ halmazra. Igazoljuk még az A operátor 2) tulajdonságát. Ha $g\in\mathfrak{D}(A)$, $g\neq 0$, akkor található olyan $f\in\mathfrak{D}(S)$, $f\neq 0$, hogy $g=f+Sf$, tehát (3. 3) értelmében

$$Ag+g=2f\neq 0.$$

Megjegyezzük azt is, hogy A, ugyanúgy mint S, hermitikus operátor. Valóban, ha $g_k \in \mathfrak{D}(A)$ $(k=1, 2)$, akkor

$$g_k = f_k + Sf_k \qquad (f_k \in \mathfrak{D}(S),\ k=1, 2),$$

tehát

$$(Ag_1, g_2) = (f_1 - Sf_1, f_2 + Sf_2) = (f_1, f_2) - (Sf_1, Sf_2) =$$
$$= (f_1 + Sf_1, f_2 - Sf_2) = (g_1, Ag_2).$$

Az A és az S operátor közt fennálló (3. 3) kapcsolatot a következőképpen is fel lehet írni:

$$A = (I - S)(I + S)^{-1}.$$

Könnyen belátható, hogy az A operátor ismeretében mindig meg lehet határozni S-et. Ha $f \in \mathfrak{D}(S)$, akkor a

$$g = f + Sf, \quad Ag = f - Sf$$

összefüggésekből

$$f = \frac{1}{2}(g + Ag), \quad Sf = \frac{1}{2}(g - Ag).$$

Felhasználva, hogy mialatt g befutja a $\mathfrak{D}(A)$ halmazt, azalatt f befutja a $\mathfrak{D}(S)$ halmazt, arra a következtetésre jutunk, hogy az S operátort teljesen meghatározza az

$$S(g + Ag) = g - Ag \quad (g \in \mathfrak{D}(A)) \tag{3. 5}$$

egyenlőség, amelyet még a következő alakban is felírhatunk:

$$S = (I - A)(I + A)^{-1}.$$

Most legyen A tetszés szerinti, a (3. 4) tulajdonságokkal rendelkező hermitikus operátor. Megmutatjuk, hogy a (3. 5) egyenlőség egy pozitív hermitikus S operátort definiál, amlyből A a (3. 3) képlet szerint nyerhető.

Valóban, a (3. 5) egyenlőség olyan S operátort értelmez, amelynek $\mathfrak{D}(S)$ értelmezési tartománya a $\mathfrak{D}(A)$ halmazból az $I + A$ operátor által létesített kölcsönösen egyértelmű leképezés során keletkezik, azaz

$$\mathfrak{D}(S) = (I + A)\mathfrak{D}(A).$$

Minthogy a (3. 5) egyenlőség csak abban különbözik a (3. 3) egyenlőségtől, hogy A és S szerepe fel van cserélve, azért S-re elvégezve ugyanazokat a megfontolásokat, mint amelyeket korábban A-ra alkalmaztunk, azt kapjuk, hogy S hermitikus operátor és fennáll a (3. 3) összefüggés.

Hátra van még annak az igazolása, hogy S-re teljesül a (3. 1) feltétel. Ennek érdekében megjegyezzük, hogy $f \in \mathfrak{D}(S)$ esetén található olyan $g \in \mathfrak{D}(A)$ elem, amelyre $f = g + Ag$, és ekkor a (3. 5) definíció szerint $Sf = g - Ag$; következésképpen

$$(Sf, f) = (g - Ag, g + Ag) = |g|^2 - |Ag|^2 \geqq 0.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A most bizonyított állítás és az 1. tétel segítségével nem nehéz bebizonyítani az alábbi tételt, amelyet sejtésként NEUMANN JÁNOS [1] mondott ki, majd M. H. STONE (lásd [7], 9. 21. tétel) és K. FRIEDRICHS [2] bizonyított be.

7. TÉTEL. *Minden a $\mathfrak{H}$ térben sűrű $\mathfrak{D}(S)$ értelmezési tartománnyal rendelkező S pozitív hermitikus operátornak van legalább egy pozitív önadjungált folytatása.*

Bizonyítás.[11] Képezzük az S operátor segítségével az $A = (I-S)(I+S)^{-1}$ hermitikus operátort, amelyre, mint tudjuk, $\|A\| \leqq 1$. Legyen $\tilde{A}$ az A operátor valamelyik önadjungált folytatása, amelyre $\|\tilde{A}\| \leqq 1$. Könnyű belátni, hogy

$$\tilde{A}g + g \neq 0, \quad \text{ha} \quad g \neq 0 \qquad (g \in \mathfrak{H}). \tag{3.6}$$

Csakugyan, ha feltesszük, hogy egy $\varphi \neq 0$ elemre $\tilde{A}\varphi + \varphi = 0$, akkor bármely $g \in \mathfrak{H}$ esetén $(\varphi, g+\tilde{A}g) = (\varphi+\tilde{A}\varphi, g) = 0$, tehát még inkább $(\varphi, g+Ag) = 0$, ha $g \in \mathfrak{D}(A)$, vagyis $\varphi \perp (I+A)\mathfrak{D}(A)$. De $(I+A)\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(S)$, a $\mathfrak{D}(S)$ halmaz pedig, mindenütt sűrű lévén $\mathfrak{H}$-ban, nem lehet ortogonális a $\varphi \neq 0$ elemre. Ellentmondásra jutottunk.

Minthogy $\tilde{A}$ rendelkezik a (3. 4) tulajdonságokkal, képezhető az $\tilde{S} = (I-\tilde{A})(I+\tilde{A})^{-1}$ pozitív hermitikus operátor, amely nyilvánvalóan az $S = (I-A)(I+A)^{-1}$ operátor folytatása. Minthogy továbbá az $\tilde{A}$ operátor önadjungált és a -1 pont (3. 6) értelmében nem tartozik $\tilde{A}$ pontspektrumához, azért az $(I+\tilde{A})^{-1}$ operátor, és vele együtt az

$$\tilde{S} = 2(I+\tilde{A})^{-1} - I$$

operátor is önadjungált.

A tételt bebizonyítottuk.

Az előbbi megfontolások alapján az is világos, hogy az

$$\tilde{S} = (I-\tilde{A})(I+\tilde{A})^{-1}$$

képlettel megadott folytatások, ahol

$$\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A), \quad A = (I-S)(I+S)^{-1},$$

kimerítik az $S > 0$ hermitikus operátor pozitív önadjungált folytatásainak az összességét. Ezt az összességet a továbbiakban a $\mathfrak{P}(S)$ jellel fogjuk jelölni.

Mielőtt áttérnénk a $\mathfrak{P}(S)$ halmaz tanulmányozására, megemlítjük, hogy a 7. tételt ki lehet mondani kissé általánosabb alakban is, félig korlátos operátorokra.

A T hermitikus operátort alulról félig korlátosnak nevezzük, ha

$$m(T) = \inf_{f \in \mathfrak{D}(T)} \frac{(Tf, f)}{(f, f)} > -\infty.$$

7'. TÉTEL. *Minden a $\mathfrak{H}$ térben sűrű $\mathfrak{D}(T)$ értelmezési tartománnyal rendelkező alulról félig korlátos hermitikus T operátornak van legalább egy alulról félig korlátos önadjungált $\tilde{T}$ folytatása, amelyre $m(\tilde{T}) = m(T)$.*

Valóban, az

$$S = T - m(T)I$$

[11] H. FREUDENTHAL [12] is ajánlott egy egyszerű bizonyítást. Ez K. FRIEDRICHS ötletein alapszik, és szintén nem teszi lehetővé az S operátor összes pozitív önadjungált folytatásainak leírását.

hermitikus operátor pozitív és $\overline{\mathfrak{D}(S)} = \overline{\mathfrak{D}(T)} = \mathfrak{H}$, tehát van pozitív önadjungált $\tilde{S}$ folytatása, és ekkor

$$\tilde{T} = \tilde{S} + m(T)I$$

a T operátor kívánt, alulról félig korlátos önadjungált folytatása lesz.

2. Az $\tilde{S} \in \mathfrak{P}(S)$ önadjungált folytatások tanulmányozása során az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az S hermitikus operátor zárt, vagyis a $\mathfrak{D}(S)$ értelmezési tartomány az

$$|f|_S = \sqrt{|f|^2 + |Sf|^2}$$

normára nézve teljes normált tér. Minthogy

$$|Sf+f|^2 = |Sf|^2 + 2(Sf, f) + |f|^2 \geqq |Sf|^2 + |f|^2,$$

$$|Sf+f|^2 \leqq |Sf|^2 + 2|Sf| \cdot |f| + |f|^2 \leqq 2(|Sf|^2 + |f|^2),$$

azért a

$$g = Sf + f \quad (f \in \mathfrak{D}(S))$$

lineáris transzformáció, amely a $\mathfrak{D}(S)$ halmazt kölcsönösen egyértelműen a $\mathfrak{D}(A)$ halmazra képezi le, rendelkezik az

$$|f|_S \leqq |g| \leqq \sqrt{2}\,|f|_S$$

tulajdonsággal, és így mindkét irányban folytonos megfeleltetést létesít az ($|f|_S$ normával ellátott) $\mathfrak{D}(S)$ és az ($|f|$ normával ellátott) $\mathfrak{D}(A)$ halmaz között. Ennélfogva ha S zárt operátor, akkor $\mathfrak{D}(A)$ zárt halmaz $\mathfrak{H}$-ban (egyébként ennek a megfordítása is igaz).

Ha $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{H}$, akkor A önadjungált operátor és S is ilyen.

Következésképpen ha $S \neq S^*$, akkor a $\mathfrak{D}(A)$ halmaz $\mathfrak{N}_{-1}$ ortogonális komplementumának n dimenziója nem egyenlő nullával.

Megjegyezzük, hogy $\mathfrak{N}_{-1}$ azonos az

$$S^*\varphi + \varphi = 0$$

egyenlet összes megoldásainak halmazával. Ezek szerint $\mathfrak{N}_{-1}$ az S^* operátor -1 sajátértékhez tartozó sajátaltere. Könnyen belátható, hogy ennek a dimenziója megegyezik az S^* operátor tetszés szerinti $z \notin [0, +\infty)$ komplex számhoz tartozó $\mathfrak{N}_z$ sajátalterének $n(\mathfrak{N}_z)$ dimenziójával.

Legyen $\tilde{S}$ az S operátor valamelyik pozitív önadjungált folytatása, és legyen $\tilde{S}$ spektrális felbontása

$$\tilde{S}f = \int_0^\infty \lambda\, dE(\lambda) f \qquad (f \in \mathfrak{D}(\tilde{S})).$$

Legyen $z \notin [0, +\infty)$ és

$$Vf = \int_0^\infty \frac{\lambda+1}{\lambda - z}\, dE(\lambda) f \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

Nyilvánvaló, hogy V folytonos és van folytonos V^{-1} inverz operátora, továbbá

$$V^{-1}f = \int_0^\infty \frac{\lambda - z}{\lambda+1}\, dE(\lambda)f, \quad V^*f = \int_0^\infty \frac{\lambda+1}{\lambda-\bar{z}}\, dE(\lambda)f \quad (f\in\mathfrak{H}).$$

Ha $\varphi\in\mathfrak{N}_z$, azaz $S^*\varphi - z\varphi = 0$, akkor

$$(Sf-\bar{z}f, \varphi) = 0, \quad (V^*(Sf-\bar{z}f), V^{-1}\varphi) = 0 \quad (f\in\mathfrak{D}(S)).$$

De

$$V^*(Sf-\bar{z}f) = Sf+f \quad (f\in\mathfrak{D}(S)),$$

és így

$$(Sf+f, V^{-1}\varphi) = 0 \quad (f\in\mathfrak{D}(S)).$$

Tehát

$$V^{-1}\varphi\in\mathfrak{N}_{-1}, \quad \text{vagyis} \quad V^{-1}\mathfrak{N}_z\subset\mathfrak{N}_{-1}.$$

Felcserélve -1 és z, valamint V^{-1} és V szerepét azt kapjuk, hogy

$$V\mathfrak{N}_{-1}\subset\mathfrak{N}_z.$$

Ennélfogva

$$V\mathfrak{N}_{-1}=\mathfrak{N}_z, \quad V^{-1}\mathfrak{N}_z=\mathfrak{N}_{-1},$$

vagyis a V operátor kölcsönösen egyértelmű folytonos lineáris megfeleltetést létesít az $\mathfrak{N}_{-1}$ és az $\mathfrak{N}_z$ zárt altér között, úgyhogy

$$\dim\mathfrak{N}_z = \dim\mathfrak{N}_{-1} \quad (z\notin[0,+\infty)).$$

Ezek szerint az S pozitív hermitikus operátor defektus-indexe mindig $(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$, ahol $\mathfrak{n}=\dim\mathfrak{N}_{-1}$.

3. Az $\tilde{S}\in\mathfrak{P}(S)$ önadjungált folytatások közül kitüntetünk két „szélső" önadjungált folytatást:

$$S_\mu = (I-A_\mu)(I+A_\mu)^{-1}, \quad S_M = (I-A_M)(I+A_M)^{-1},$$

ahol A_μ és A_M az

$$A = (I-S)(I+S)^{-1}$$

operátor $\leqq 1$ normájú minimális ill. maximális önadjungált folytatása.

Az S_μ operátort S durva folytatásának, az S_M operátort pedig S finom folytatásának fogjuk nevezni.

Ha $S_\mu=S_M$, és csak ekkor, S-nek egyetlen pozitív önadjungált folytatása van.

A 4. tételből egyszerű transzformációk segítségével nyerjük az alábbi tételt.

8. TÉTEL. *Legyen S $\left(\overline{\mathfrak{D}(S)}=\mathfrak{H}\right)$ pozitív hermitikus operátor, $\mathfrak{N}_{-a}$ (a tetszés szerinti pozitív szám) az*

$$S^*\varphi + a\varphi = 0$$

egyenlet összes φ megoldásaiból álló halmaz, továbbá $\tilde{S}$ egy $\mathfrak{P}(S)$-hez tartozó operátor, amelynek spektrális felbontása

$$\tilde{S}f = \int_0^\infty \lambda\, dE(\lambda)f \quad (f\in\mathfrak{D}(\tilde{S})). \tag{3.7}$$

Ekkor az $\tilde{S} = S_\mu$ ($\tilde{S} = S_M$) egyenlőség teljesüléséhez szükséges és elégséges, hogy bármelyik $\varphi \in \mathfrak{N}_{-a}$ elemre

$$\int_0^\infty \lambda\, d|E(\lambda)\varphi|^2 = \infty \qquad \left(\text{ill. } \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} d|E(\lambda)\varphi|^2 = \infty\right) \tag{3.8}$$

legyen.

Ennélfogva az $\tilde{S}$ operátor akkor és csak akkor lesz az S operátor egyetlen pozitív önadjungált folytatása, ha

$$\int_0^\infty \lambda\, d|E(\lambda)\varphi|^2 = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} d|E(\lambda)\varphi|^2 = \infty \qquad (\varphi \in \mathfrak{N}_{-a}).$$

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a = 1$, mert különben az S operátort helyettesíthetjük az $S_1 = \frac{1}{a} S$ operátorral, amelyre $\mathfrak{N}_{-1}(S_1) = \mathfrak{N}_{-a}(S)$.

De $a = 1$ esetén $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{-a}$ megegyezik $\mathfrak{D}(A)$ ortogonális komplementumával. Másrészt a 4. tétel értelmében az

$$\tilde{A} = (I - \tilde{S})(I + \tilde{S})^{-1}$$

operátor akkor azonos A_μ-vel, ha

$$J(\varphi; \tilde{A}) = 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{N}), \tag{3.9}$$

és akkor azonos A_M-mel, ha

$$J(\varphi; -\tilde{A}) = 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{N}). \tag{3.9'}$$

Minthogy pedig a (3. 7) felbontás alapján

$$\tilde{A}f = \int_0^\infty \frac{1-\lambda}{1+\lambda} dE(\lambda) f = \int_{-1}^1 \mu\, dF(\mu) f \qquad (f \in \mathfrak{H}),$$

ahol

$$F(\mu) = I - E(\lambda) \qquad \left(\mu = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad 0 \leqq \lambda < \infty\right),$$

azért

$$J(\varphi; \pm\tilde{A}) = \int_{-1}^1 \frac{d|F(\mu)\varphi|^2}{1 \pm \mu} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \lambda^{\pm 1}) d|E(\lambda)\varphi|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} |\varphi|^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \lambda^{\pm 1} d|E(\lambda)\varphi|^2.$$

Ily módon a (3. 9), (3. 9') feltételek rendre ekvivalensek a (3. 8) alatti feltételekkel. A tételt bebizonyítottuk.

4. A 6. tétel lehetővé teszi, hogy egészen egyszerű kritériumot adjunk arra, hogy S-nek egyetlen pozitív önadjungált folytatása létezzék.

9. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az S pozitív operátornak $(\overline{\mathfrak{D}(S)}=\mathfrak{H},\ S\neq S^*)$ csak egyetlen $\tilde{S}$ pozitív önadjungált folytatása legyen, szükséges és elégséges, hogy tetszés szerinti $\varphi\in\mathfrak{N}_{-a}$ elemre (a bárhogyan választott pozitív szám) fennálljon az*

$$\inf_{f\in\mathfrak{D}(S)}\frac{(Sf,f)}{|(f,\varphi)|^2}=0 \tag{3.10}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a=1$.

A 9. tétel be lesz bizonyítva, ha megmutatjuk, hogy $A=(I-S)(I+S)^{-1}$ esetén (3. 10) ekvivalens a 6. tételben szereplő (2. 21) feltétellel. De ha $S^*\varphi+\varphi=0$, akkor $\varphi\perp f+Sf$ minden $f\in\mathfrak{D}(S)$ elem mellett, következésképpen

$$(Sf,\varphi)=-(f,\varphi),\quad (f,\varphi)=-\frac{1}{2}(Sf-f,\varphi)=\frac{1}{2}(Ag,f),$$

ahol $g=f+Sf$. Másrészt $g=f+Sf$ $(Ag=f-Sf)$ esetén

$$4(Sf,f)=|g|^2-|Ag|^2.$$

Visszaemlékezve még arra, hogy ha f befutja $\mathfrak{D}(S)$-et, akkor $g=f+Sf$ befutja a $\mathfrak{D}(A)$ halmazt, nyerjük:

$$\sup_{f\in\mathfrak{D}(S)}\frac{|(f,\varphi)|^2}{(Sf,f)}=\sup_{g\in\mathfrak{D}(A)}\frac{|(Ag,\varphi)|^2}{|g|^2-|Ag|^2}\qquad(\varphi\in\mathfrak{N}_{-1}).$$

A tételt bebizonyítottuk.

5. A 9. tételből következik, hogy ha az S operátorra $(\overline{\mathfrak{D}(S)}=\mathfrak{H};\ S\neq S^*)$ az

$$m(S)=\inf_{f\in\mathfrak{D}(S)}\frac{(Sf,f)}{(f,f)}$$

mennyiség pozitív, akkor $S_\mu\neq S_M$. Valóban,

$$\sup_{f\in\mathfrak{D}(S)}\frac{|(f,\varphi)|^2}{(Sf,f)}\leqq|\varphi|^2\sup_{f\in\mathfrak{D}(S)}\frac{(f,f)}{(Sf,f)}=\frac{|\varphi|^2}{m(S)}.$$

Ily módon az $m(S)=0$ feltétel szükséges ahhoz, hogy az S operátornak csak egy pozitív önadjungált folytatása legyen.

Ez a feltétel azonban nem elégséges, még abban az esetben sem, amikor az S operátor egyszerű[12]. Ezt könnyen ki lehet mutatni a 4. § végén példaként ismer-

[12] Nem egyszerű S hermitikus operátorra az állítás triviális (lásd [12]). Az $S(\neq S^*)$ hermitikus operátort akkor nevezik e g y s z e r ű n e k, ha $\mathfrak{H}$ nem tartalmaz olyan $\mathfrak{L}$ alteret, amely redukálja S-et és amelyben S önadjungált operátor.

tetett A operátorok felhasználásával, mi azonban ezektől függetlenül fogjuk a bizonyítást elvégezni.

Legyen H egy nem korlátos pozitív önadjungált operátor, amelynek a 0 pontot tartalmazó egyszerű folytonos spetkruma van, és legyen H spektrális felbontása

$$Hf = \int_0^\infty \lambda \, dE(\lambda) f \quad (f \in \mathfrak{D}(H)).$$

Válasszunk $\varphi(|\varphi| = 1)$ gyanánt egy olyan vektort, amelyre az $E(\lambda)\varphi$ $(0 \leqq \lambda < \infty)$ halmaz zárt lineáris burka megegyezik $\mathfrak{H}$-val és

$$\int_0^\infty \lambda \, d|E(\lambda)\varphi|^2 = \infty, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \, d|E(\lambda)\varphi|^2 < \infty. \tag{3.11}$$

Legyen $\mathfrak{D}(S)$ mindazoknak az $f \in \mathfrak{D}(H)$ elemeknek az összessége, amelyekre

$$(f + Hf, \varphi) = 0, \tag{3.12}$$

és legyen

$$Sf = Hf, \quad \text{ha} \quad f \in \mathfrak{D}(S).$$

A (3. 11) alatti első feltétel értelmében $\varphi \notin \mathfrak{D}(H)$; ebből könnyen adódik, hogy $\mathfrak{D}(S)$ sűrű $\mathfrak{H}$-ban.

Csakugyan, ha feltesszük az ellenkezőt, vagyis hogy létezik olyan $h \in \mathfrak{H}$ $(h \neq 0)$ elem, amelyre

$$(f, h) = 0, \quad \text{ha} \quad f \in \mathfrak{D}(S),$$

akkor a

$$\psi = (H + I)^{-1} h, \qquad h = H\psi + \psi$$

jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$(f, H\psi + \psi) = (Hf + f, \psi) = 0$$

minden a (3. 12) feltételnek eleget tevő f elemre. Ebből, felhasználva, hogy mialatt f befutja a $\mathfrak{D}(H)$ halmazt, azalatt $f + Hf$ végigfutja az egész $\mathfrak{H}$ teret, az adódik, hogy $\psi = c\varphi$ $(c \neq 0)$. De $\psi \in \mathfrak{D}(H + I) = \mathfrak{D}(H)$, tehát $\varphi \in \mathfrak{D}(H)$. Ellentmondásra jutottunk.

Az olvasóra bízva annak az igazolását, hogy S egyszerű operátor, megmutatjuk még, hogy $m(S) = 0$.

A 0 pont a H operátor folytonos spektrumához tartozik, ezért tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ számhoz található két lineárisan független f_k $(k = 1, 2)$ vektor, amelyre

$$E(\lambda) f_k = f_k, \quad \text{ha} \quad \lambda > \varepsilon \qquad (k = 1, 2). \tag{3.13}$$

Ekkor valamilyen α-ra az

$$f = \cos\alpha \; f_1 + \sin\alpha \; f_2$$

vektor teljesíteni fogja a (3. 12) feltételt, azaz $f \in \mathfrak{D}(S)$, és (3. 13) értelmében fennáll az

$$(Sf, f) = (Hf, f) = \int_0^\varepsilon \lambda \, d(E(\lambda) f, f) \leqq \varepsilon(f, f)$$

egyenlőtlenség, innen pedig $m(S) = 0$. Másrészt a (3. 11) összefüggések alapján az S operátornak végtelen sok különböző pozitív önadjungált folytatása van.

4. §. Az $\tilde{S}_\mu$, $\tilde{S}_M$ önadjungált folytatások extremális tulajdonságairól

1. Legyen T $(\overline{\mathfrak{D}(T)} = \mathfrak{H})$ zárt hermitikus operátor, amely alulról félig korlátos, vagyis

$$m(T) = \inf_{f \in \mathfrak{D}(T)} \frac{(Tf,f)}{(f,f)} > -\infty.$$

K. FRIEDRICHS [2] nyomán vizsgálni fogjuk azt a $\mathfrak{D}[T] \subset \mathfrak{H}$ halmazt, amely az alábbi módon értelmezhető.

Az f elem akkor és csak akkor tartozik $\mathfrak{D}[T]$-hez, ha van olyan $\{f_n\} \subset \mathfrak{D}(T)$ sorozat, hogy

$$1)\quad f_n \to f, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

$$(4.1)\qquad 2)\quad (T(f_m - f_n), f_m - f_n) \to 0, \quad \text{ha} \quad m, n \to \infty.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathfrak{D}(T) \subset \mathfrak{D}[T].$$

A most következő megfontolásokból ki fog derülni, hogy nem korlátos T operátor esetében (és minket éppen ez az eset fog csak érdekelni) $\mathfrak{D}(T)$ a $\mathfrak{D}[T]$ halmaznak mindig valódi része. Az is világos, hogy

$$\mathfrak{D}[T] = \mathfrak{D}[T + aI] \quad (-\infty < a < \infty).$$

Állapodjunk meg abban, hogy ha egy $f \in \mathfrak{D}[T]$ elemre és $\{f_n\} \subset \mathfrak{D}(T)$ sorozatra fennállnak az 1), 2) összefüggések, akkor azt mondjuk, hogy az $\{f_n\}$ sorozat T-konvergál az f elemhez, és ezt a következőképpen jelöljük:

$$(4.2)\qquad f_n \xrightarrow{T} f.$$

Nyilvánvaló, hogy ha fennáll (4. 2), akkor érvényes az

$$f_n \xrightarrow{T+aI} f$$

összefüggés is, ahol a tetszés szerinti valós szám.

1. LEMMA (K. FRIEDRICHS). *Ha $g, f \in \mathfrak{D}[T]$, továbbá $\{g_n\}$ és $\{f_n\}$ $\mathfrak{D}(T)$-beli elemekből álló sorozatok, amelyek T-konvergálnak a g ill. f elemhez, akkor a*

$$(4.3)\qquad \lim_{n \to \infty} (Tg_n, f_n)$$

határérték létezik és csak g-től és f-től függ.

Bizonyítás. Nyilván elég az állítást valamilyen $T' = aI + T$ operátorra bebizonyítani. Ennélfogva az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy T pozitív operátor: $T > 0$.

Legyen $\tilde{T}$ a T operátor valamelyik pozitív önadjungált folytatása $(\tilde{T} \in \mathfrak{P}(T))$, és legyen $\tilde{T}$ spektrális előállítása

$$(4.4)\qquad \tilde{T}f = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda \quad .$$

Tekintsük a $\tilde{T}^{\frac{1}{2}}$ önadjungált operátort:

$$\tilde{T}^{\frac{1}{2}} f = \int_0^\infty \lambda^{\frac{1}{2}} dE(\lambda) f \quad (f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}^{\frac{1}{2}})),$$

ahol $\mathfrak{D}(\tilde{T}^{\frac{1}{2}})$ azoknak az $f \in \mathfrak{H}$ elemeknek az összessége, amelyekre

$$\int_0^\infty \lambda d|E(\lambda)f|^2 < \infty. \tag{4.5}$$

Nyilván

$$\mathfrak{D}(\tilde{T}) \subset \mathfrak{D}(\tilde{T}^{\frac{1}{2}})$$

és

$$(\tilde{T}g, f) = (\tilde{T}^{\frac{1}{2}} g, \tilde{T}^{\frac{1}{2}} f) \qquad (g, f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})).$$

Ezek szerint az, hogy egy $\{f_n\} \subset \mathfrak{D}(T)$ sorozat eleget tesz a 2) feltételnek, ekvivalens azzal, hogy

$$|\tilde{T}^{\frac{1}{2}} f_m - \tilde{T}^{\frac{1}{2}} f_n| \to 0, \quad \text{ha} \quad m, n \to \infty;$$

ha pedig még az 1) feltétel is teljesül, akkor a $\tilde{T}^{\frac{1}{2}}$ operátor zártsága miatt

$$f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}^{\frac{1}{2}}); \quad \tilde{T}^{\frac{1}{2}} f_n \to \tilde{T}^{\frac{1}{2}} f.$$

Tehát ha

$$g_n \xrightarrow{T} g, \quad f_n \xrightarrow{T} f,$$

akkor $g, f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}^{\frac{1}{2}})$, és a $\{\tilde{T}^{\frac{1}{2}} g_n\}$, $\{\tilde{T}^{\frac{1}{2}} f_n\}$ sorozatok tartanak rendre a $\tilde{T}^{\frac{1}{2}} g$, $\tilde{T}^{\frac{1}{2}} f$ határértékekhez; de ekkor

$$\lim_{n\to\infty} (Tg_n, f_n) = \lim_{n\to\infty} (\tilde{T}^{\frac{1}{2}} g_n, \tilde{T}^{\frac{1}{2}} f_n) = (\tilde{T}^{\frac{1}{2}} g, \tilde{T}^{\frac{1}{2}} f).$$

A lemmát bebizonyítottuk.

A (4. 3) határértéket a $T[g, f]$ jellel fogjuk jelölni.

Ilyen módon $T[g, f]$ minden $g, f \in \mathfrak{D}[T]$ elempárra értelmezett hermitikus bilineáris funkcionál.

Egyúttal bebizonyítottuk a következő lemmát:

2. LEMMA. *Ha $T > 0$ és $\tilde{T} \in \mathfrak{P}(T)$, akkor*

$$\mathfrak{D}[T] \subset \mathfrak{D}(\tilde{T}^{\frac{1}{2}}) \tag{4.6}$$

és

$$T[g, f] = (\tilde{T}^{\frac{1}{2}} g, \tilde{T}^{\frac{1}{2}} f) \qquad (g, f \in \mathfrak{D}[T]). \tag{4.7}$$

3. LEMMA. *Ha bevezetjük a*

$$(g, f)_T = (g, f) + T[g, f], \quad |g|_T = \sqrt{(g, g)_T} \quad (g, f \in \mathfrak{D}[T])$$

jelöléseket, akkor $\mathfrak{D}[T]$ teljes Hilbert-tér lesz (a $(g, f)_T$ skaláris szorzatra nézve), amelyben a $\mathfrak{D}(T)$ részhalmaz mindenütt sűrű.

Ennek a belátása céljából elegendő megjegyezni, hogy ha $\{f_n\} \subset \mathfrak{D}(T)$ és $f \in \mathfrak{D}[T]$, akkor az

$$f_n \xrightarrow{T} f$$

és az

$$|f_n - f|_T \to 0$$

állítás egymással ekvivalens.

Szintén nehézség nélkül igazolható a

4. LEMMA. *Ha T pozitív önadjungált operátor, akkor*

$$\mathfrak{D}[T] = \mathfrak{D}(T^{\frac{1}{2}}) \tag{4.8}$$

és

$$T[g, f] = (T^{\frac{1}{2}} g, T^{\frac{1}{2}} f) \quad (g, f \in \mathfrak{D}[T]). \tag{4.9}$$

Bizonyítás. Minthogy a 4. lemma feltevései mellett $T = \tilde{T}$, azért a (4. 9) egyenlőség (4. 7) következménye, a (4. 8) összefüggés bebizonyításához pedig a (4. 6) képlet értelmében csak azt kell belátni, hogy

$$\mathfrak{D}(T^{\frac{1}{2}}) \subset \mathfrak{D}[T]. \tag{4.10}$$

Legyen $f \in \mathfrak{D}(T^{\frac{1}{2}})$; ekkor, feltéve, hogy a $T = \tilde{T}$ operátor spektrális felbontását a (4. 4) képlet szolgáltatja, fennáll a (4. 5) összefüggés.

Az

$$f_n = \int_0^n dE(\lambda) f = E(n) f \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

jelölés mellett

$$f_n \in \mathfrak{D}(T) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad f_n \to f,$$

továbbá

$$(T(f_{n+p} - f_n), f_{n+p} - f_n) = \int_n^{n+p} \lambda d|E(\lambda) f|^2 \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty, \quad p > 0;$$

vagyis $f \in \mathfrak{D}[T]$.

A (4. 10) összefüggést és vele együtt a 4. lemmát bebizonyítottuk.

2. Ugyanúgy, ahogy az előző paragrafusban, *a továbbiakban is mindig jelentsen S zárt pozitív hermitikus operátort, amelyre*

$$\overline{\mathfrak{D}(S)} = \mathfrak{H}, \quad S^* \neq S.$$

A bebizonyított lemmák alapján könnyen igazolható az S operátor S_μ durva folytatásának alábbi jellemzése.

10. TÉTEL. *Az S operátor összes lehetséges alulról félig korlátos önadjungált folytatásai között pontosan egy olyan $\tilde{S}$ folytatás található, amelyre $\mathfrak{D}(\tilde{S}) \subset \mathfrak{D}[S]$. Ez a folytatás S_μ, és fennáll a*

$$\mathfrak{D}[S_\mu] = \mathfrak{D}[S] \tag{4.11}$$

összefüggés.

Bizonyítás. Tekintsünk először egy $\tilde{S}\in\mathfrak{P}(S)$ folytatást, amelyet a következő képlet értelmez:

$$\tilde{S} = (I-\tilde{A})(I+\tilde{A})^{-1},$$

ahol

$$A = (I-S)(I+S)^{-1}.$$

Ha erre a folytatásra

$$\mathfrak{D}(\tilde{S})\subset\mathfrak{D}[S], \tag{4. 12}$$

akkor a 3. lemma szerint a $\mathfrak{D}(S)$ halmaz $\tilde{S}$-sűrű (vagyis az $|f|_{\tilde{S}}$ normára nézve sűrű) a $\mathfrak{D}(\tilde{S})$ halmazban.

Másrészt ha $f\in\mathfrak{D}(\tilde{S})$, akkor

$$f = \frac{1}{2}(g+\tilde{A}g), \quad \text{ahol} \quad g = f+\tilde{S}f,$$

és így

$$(f,f)+(\tilde{S}f,f) = \frac{1}{2}((g,g)+(\tilde{A}g,g)) \quad \text{azaz} \quad |f|_{\tilde{S}} = \frac{1}{2}|g|_{\tilde{A}}.$$

Ennélfogva ha a $\mathfrak{D}(S)$ halmaz $\tilde{S}$-sűrű $\mathfrak{D}(\tilde{S})$-ban, akkor $\mathfrak{D}(A) = (I+S)\mathfrak{D}(S)$ a $|g|_{\tilde{A}}$ normára vonatkozóan sűrű a $\mathfrak{D}(\tilde{A}) = (I+\tilde{S})\mathfrak{D}(\tilde{S}) = \mathfrak{H}$ térben. De ekkor az 5. tétel szerint $\tilde{A}=A_{\mu}$, tehát

$$\tilde{S} = S_{\mu}.$$

Megfordítva, ha $\tilde{S}=S_{\mu}$ (vagyis $\tilde{A}=A_{\mu}$), akkor az 5. tétel alapján $\mathfrak{D}(A)$ sűrű $\mathfrak{H}$-ban a $|g|_{\tilde{A}}$ normára nézve, következésképpen a $\mathfrak{D}(S)$ halmaz $\tilde{S}$-sűrű $\mathfrak{D}(\tilde{S})$-ban. Minthogy pedig a 3. lemma értelmében $\mathfrak{D}[S]$ a $\mathfrak{D}(S)$ halmaz $\tilde{S}$-lezárása, azért $\mathfrak{D}(\tilde{S})\subset\mathfrak{D}[S]$ és a $\mathfrak{D}(\tilde{S})$ halmaz $\tilde{S}$-lezárása $\mathfrak{D}[S]$. Másrészt, szintén a 3. lemma szerint, ez a lezárás megegyezik a $\mathfrak{D}[\tilde{S}]$ halmazzal. Ennélfogva

$$\mathfrak{D}[S] = \mathfrak{D}[\tilde{S}] \quad (\tilde{S} = S_{\mu}).$$

Ilyen módon a (4. 11) összefüggést bebizonyítottuk.

Hátravan még annak a megmutatása, hogy a (4. 11) egyenlőségből nemcsak $\tilde{S}\in\mathfrak{P}(S)$ esetén következik, hogy $\tilde{S}=S_{\mu}$, hanem abban az általánosabb esetben is, amikor $\tilde{S}$ az S operátor tetszés szerinti alulról félig korlátos önadjungált folytatása.

Az utóbbi esetben válasszuk meg az $a>0$ számot úgy, hogy $\tilde{S}+aI > 0$ legyen; ekkor a (4. 12) összefüggésből kapjuk:

$$\mathfrak{D}(\tilde{S}+aI) = \mathfrak{D}(\tilde{S})\subset\mathfrak{D}[S] = \mathfrak{D}[S+aI],$$

tehát a már bebizonyítottak értelmében

$$\tilde{S}+aI = (S+aI)_{\mu}.$$

Minthogy (4. 12) speciálisan $\tilde{S}=S_{\mu}$ esetén is érvényes, fennáll

$$S_{\mu}+aI = (S+aI)_{\mu}$$

is, és innen $\tilde{S}=S_{\mu}$. A tételt bebizonyítottuk.

3. A 10. tétel lehetővé teszi, hogy a T hermitikus operátor durva folytatásának a fogalmát természetes módon kiterjesszük arra az esetre, amikor a T operátor alulról félig korlátos.

A T félig korlátos operátor $(\overline{\mathfrak{D}(T)}=\mathfrak{H})$ alulról félig korlátos önadjungált T' folytatását a T operátor durva folytatásának nevezzük, ha

$$\mathfrak{D}(T')\subset\mathfrak{D}[T]. \tag{4.13}$$

Minthogy bármilyen a számra $(-\infty < a < \infty)$

$$\mathfrak{D}(T') = \mathfrak{D}(T'+aI), \quad \mathfrak{D}[T] = \mathfrak{D}[T+aI],$$

azért a (4. 13) összefüggés ekvivalens azzal, hogy

$$\mathfrak{D}(T'+aI) \subset \mathfrak{D}[T+aI]. \tag{4.14}$$

Ha most az a számot úgy választjuk meg, hogy $T+aI$ is, $T'+aI$ is pozitív legyen, akkor a 10. tétel szerint a (4. 14) összefüggésből következik, hogy

$$T'+aI = (T+aI)_\mu. \tag{4.15}$$

Megfordítva, ha $T+aI > 0$, akkor a (4. 15) képlettel értelmezett T' operátor a T operátor durva folytatása.

Ily módon a T félig korlátos operátor durva folytatása mindig létezik és egyértelmű. Jele T_μ lesz. A T_μ folytatás egyértelműsége miatt a (4. 14) képletből, ahol $T'=T_\mu$, kapjuk:

$$(T+aI)_\mu = T_\mu+aI \qquad (-\infty < a < \infty). \tag{4.16}$$

Ennek az összefüggésnek az értelmében $T+aI > 0$ esetén $T_\mu+aI > 0$; tehát

$$m(T_\mu)=m(T). \tag{4.17}$$

Az is nyilvánvaló, hogy a T operátor bármely más félig korlátos $\tilde{T}$ folytatására

$$m(\tilde{T}) \leqq m(T).$$

4. A továbbiakhoz szükségünk lesz a következő két lemmára.

5. LEMMA. *Legyen H_1 és H_2 két pozitív önadjungált korlátos operátor, és legyen $H_1 \leqq H_2$, vagyis*

$$(H_1f,f)\leqq(H_2f,f) \quad (f\in\mathfrak{H}). \tag{4.18}$$

Ekkor

$$\mathfrak{R}(H_1^{\frac{1}{2}})\subset\mathfrak{R}(H_2^{\frac{1}{2}}). \tag{4.19}$$

Ha ezenkívül a H_1 operátornak a 0 *szám nem sajátértéke, akkor a* (4. 18) *egyenlőtlenség ekvivalens a*

$$\|H_2^{-\frac{1}{2}}f\|^2 \leqq \|H_1^{-\frac{1}{2}}f\|^2 \quad (f\in\mathfrak{D}(H_1^{-\frac{1}{2}}) = \mathfrak{R}(H_1^{\frac{1}{2}})) \tag{4.20}$$

egyenlőtlenséggel.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy

$$H_2f \neq 0, \quad \text{ha} \quad f \neq 0. \tag{4.21}$$

A (4. 18) egyenlőtlenség ekvivalens a

(4.22) $$|H_1^{\frac{1}{2}}f| \leqq |H_2^{\frac{1}{2}}f| \quad (f \in \mathfrak{H})$$

egyenlőtlenséggel.

Értelmezzünk az $\mathfrak{R}(H_2^{\frac{1}{2}})$ halmazon egy B operátort a

$$BH_2^{\frac{1}{2}}f = H_1^{\frac{1}{2}}f \quad (f \in \mathfrak{H})$$

egyenlőséggel. A (4. 22) összefüggés folytán $|Bf| \leqq |f|$; a (4. 21) feltevés miatt $\mathfrak{R}(H_2^{\frac{1}{2}})$ sűrű $\mathfrak{H}$-ban, úgyhogy a B folytonos operátor egyértelműen folytatható az egész $\mathfrak{H}$ térre. A

(4.23) $$H_1^{\frac{1}{2}} = BH_2^{\frac{1}{2}}$$

egyenlőségben áttérve az adjungált operátorokra kapjuk:

(4.24) $$H_1^{\frac{1}{2}} = H_2^{\frac{1}{2}}B^*,$$

és innen

$$\mathfrak{R}(H_1^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{R}(H_2^{\frac{1}{2}}B^*) \subset \mathfrak{R}(H_2^{\frac{1}{2}}).$$

Most tekintsük azt az esetet, amikor a (4. 21) feltétel nem teljesül. Ebben az esetben a $\mathfrak{H}$ tér felbontható $\mathfrak{L}$ és $\mathfrak{H}_1$ ortogonális összegére, ahol $\mathfrak{L}$ a H_2 operátor zérushelyeinek összessége. De ha $H_2\mathfrak{L} = \{0\}$, akkor (4. 18) szerint $H_1\mathfrak{L} = \{0\}$ is fennáll. A $H_k\mathfrak{L} = \{0\}$ $(k = 1, 2)$ összefüggésekből következik, hogy $\mathfrak{R}(H_k) \subset \mathfrak{H}_1$ $(k = 1, 2)$, és a lemma bebizonyítása céljából elegendő a H_1, H_2 operátorokat $\mathfrak{H}_1$-en tekinteni — de ekkor visszajutunk a már vizsgált esetre.

Ha most a H_1 operátornak a 0 szám nem sajátértéke, akkor H_2-nek sem sajátértéke; következésképpen léteznek a H_1^{-1}, H_2^{-1} önadjungált operátorok és így a $H_1^{-\frac{1}{2}}$, $H_2^{-\frac{1}{2}}$ operátorok is, és fennáll

$$\mathfrak{D}(H_1^{-\frac{1}{2}}) = \mathfrak{R}(H_1^{\frac{1}{2}}).$$

A (4. 24) egyenlőségből könnyen nyerjük:

$$H_2^{-\frac{1}{2}}f = B^*H_1^{-\frac{1}{2}}f \quad (f \in \mathfrak{D}(H_1^{-\frac{1}{2}})),$$

minthogy pedig

(4.25) $$\|B^*\| = \|B\| \leqq 1,$$

vagyis $|B^*g| \leqq |g|$ $(g \in \mathfrak{H})$, azért

$$|H_2^{-\frac{1}{2}}f|^2 = |B^*H_1^{-\frac{1}{2}}f|^2 \leqq |H_1^{-\frac{1}{2}}f|^2 \quad (f \in \mathfrak{D}(H_1^{-\frac{1}{2}})).$$

Megfordítva, ha teljesül a (4. 20) egyenlőtlenség, akkor a

(4.26) $$B^*H_1^{-\frac{1}{2}}f = H_2^{-\frac{1}{2}}f \quad (f \in \mathfrak{D}(H_1^{-\frac{1}{2}}))$$

képlet korlátos lineáris B^* operátort definiál, amelynek értelmezési tartománya az egész $\mathfrak{H}$ tér (ugyanis $\mathfrak{R}(H_1^{-\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}(H_1^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{H}$) és normája $\leqq 1$.

A (4. 26) egyenlőségben elvégezve az $f = H_1^{\frac{1}{2}}g$ $(g \in \mathfrak{H})$ helyettesítést és mindkét oldalra alkalmazva a $H_2^{\frac{1}{2}}$ operátort, a (4. 24) összefüggést kapjuk, és egyúttal (4. 23)-at is, ahol B a B^* operátor adjungáltja. A (4. 23) összefüggésből (4. 25) felhasználásával adódik:

$$(H_1 f, f) = |H_1^{\frac{1}{2}} f|^2 = |BH_2^{\frac{1}{2}} f|^2 \leqq |H_2^{\frac{1}{2}} f|^2 = (H_2 f, f) \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

A lemmát bebizonyítottuk.

4. 1. megjegyzés. Érdemes megemlíteni az 5. lemma következő folyományát: *Ha* $H_1 \leqq H_2$ *és* $m(H_1) > 0$, *akkor* $H_2^{-1} \leqq H_1^{-1}$.

Valóban, ha $m(H_1) > 0$, akkor H_k^{-1}, $H_k^{-\frac{1}{2}}$ $(k = 1, 2)$ korlátos operátorok, és

$$|H_k^{-\frac{1}{2}} f|^2 = (H_k^{-1} f, f) \quad (f \in \mathfrak{H};\; k = 1, 2);$$

ezek szerint a (4. 20) egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy $H_2^{-1} \leqq H_1^{-1}$.

6. Lemma. *Legyen* S_1 *és* S_2 *pozitív önadjungált operátor és* a *tetszés szerinti pozitív szám. Ekkor az*

$$(S_1 + aI)^{-1} \leqq (S_2 + aI)^{-1} \tag{4. 27}$$

egyenlőtlenség fennállásához szükséges és elégséges, hogy teljesüljön a következő két feltétel:

1) $\mathfrak{D}[S_1] \subset \mathfrak{D}[S_2]$,

2) $S_1[f, f] \geqq S_2[f, f]$, *ha* $f \in \mathfrak{D}[S_1]$.

Bizonyítás. A

$$H_k = (S_k + aI)^{-1} \quad (k = 1, 2)$$

operátorok korlátosak, önadjungáltak és pozitívok $(0 < H_k \leqq a^{-1} I;\; k = 1, 2)$. Ennélfogva ha fennáll (4. 27), azaz $H_1 \leqq H_2$, akkor az 5. lemma értelmében

$$\mathfrak{R}(H_1^{\frac{1}{2}}) \subset \mathfrak{R}(H_2^{\frac{1}{2}}), \qquad |H_2^{-\frac{1}{2}} f|^2 \leqq |H_1^{-\frac{1}{2}} f|^2 \quad (f \in \mathfrak{D}(H_1^{-\frac{1}{2}}) = \mathfrak{R}(H_1^{\frac{1}{2}})), \tag{4.28}$$

minthogy pedig

$$\mathfrak{R}(H_k^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{R}((S_k + aI)^{-\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}((S_k + aI)^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}[S_k + aI] = \mathfrak{D}[S_k] \quad (k = 1, 2)$$

és

$$|H_k^{-\frac{1}{2}} f|^2 = |(S_k + aI)|^{\frac{1}{2}} f|^2 = S_k[f, f] + a|f|^2 \quad (f \in \mathfrak{D}[S_k];\; k = 1, 2),$$

azért éppen az 1), 2) feltételekhez jutunk.

Megfordítva, ha teljesülnek az 1), 2) feltételek, akkor érvényesek a (4. 28) összefüggések, ezek viszont az 5. lemma szerint ekvivalensek a $H_1 \leqq H_2$ egyenlőtlenséggel, vagyis a (4. 27) relációval.

A lemmát bebizonyítottuk.

4. 2. megjegyzés. Könnyű belátni, hogy a 6. lemma érvényes marad akkor is, ha az $a > 0$ feltételt az $a > -m(S_k)$ $(k = 1, 2)$ feltétellel helyettesítjük.

11. TÉTEL. *Legyen S pozitív hermitikus operátor $(\mathfrak{D}(S)=\mathfrak{H},\ S\neq S^*)$, továbbá $\tilde{S}$ ennek egy pozitív önadjungált folytatása; ekkor bármilyen $a>0$ számra*

$$(S_\mu+aI)^{-1}\leqq(\tilde{S}+aI)^{-1}\leqq(S_M+aI)^{-1}, \tag{4.29}$$

tehát

$$\mathfrak{D}[S_\mu]\subset\mathfrak{D}[\tilde{S}]\subset\mathfrak{D}[S_M]$$

és

$$S_M[f,f]\leqq\tilde{S}[f,f]\qquad(f\in\mathfrak{D}[\tilde{S}]).$$

Az S_μ-re és $\tilde{S}$-ra vonatkozó megfelelő egyenlőtlenséget nem írjuk ki, mert a 2. és 4. lemma alapján

$$S[f,f]=S_\mu[f,f]=\tilde{S}[f,f]\qquad(f\in\mathfrak{D}[S_\mu]).$$

Bizonyítás. Mint tudjuk, az S_μ, $\tilde{S}$, S_M operátoroknak megfelelően az A_μ, $\tilde{A}$, A_M operátorok, és ezek közt fennállnak az

$$A_\mu\leqq\tilde{A}\leqq A_M \tag{4.30}$$

egyenlőtlenségek. Mivel továbbá

$$\tilde{A}=(I-\tilde{S})(I+\tilde{S})^{-1}=2(I+\tilde{S})^{-1}-I,$$

és analóg egyenlőségek érvényesek A_μ-re és A_M-re, azért a (4. 30) képletből adódik (4. 29) az $a=1$ esetben. De ekkor az 5. lemma értelmében teljesül (4. 28), amelyből viszont következik a (4. 29) összefüggés tetszés szerinti $a>0$ szám mellett.

A tételt bebizonyítottuk.

Megemlítjük, hogy ha a (4. 29) egyenlőtlenségnek az $a=1$ esetben való érvényessége már be van bizonyítva, akkor bármilyen $a>1$ szám esetén való érvényessége nehézség nélkül adódik a 4. 1. megjegyzésben megfogalmazott állításból.

5. A (4. 29) alatt szereplő első egyenlőtlenség fennáll az $\tilde{S}$ operátorra vonatkozó általánosabb feltevések mellett is.

Legyen $\tilde{S}$ az S operátor egy alulról félig korlátos folytatása (az S operátorról is feltehetjük, hogy alulról félig korlátos). Ekkor

$$(S_\mu+aI)^{-1}\leqq(\tilde{S}+aI)^{-1},\quad\text{ha}\quad a>-m(\tilde{S}). \tag{4.31}$$

Erről úgy győződhetünk meg, hogy a (4. 29) bal oldalán álló egyenlőtlenséget alkalmazzuk az

$$S_\mu-m(S)I,\quad\tilde{S}-m(S)I$$

operátorokra, amelyek közül az első az $S-m(S)I$ operátor durva folytatása, a második pedig tetszés szerinti pozitív önadjungált folytatás.

5. §. Az $m(S)>0$ eset

1. Ebben az esetben a (4. 31) egyenlőtlenség érvényes speciálisan az $a=0$ választás mellett, vagyis

$$S_\mu^{-1}\leqq\tilde{S}^{-1}.$$

Megmutatjuk, hogy ezenfelül igaz a következő állítás:

12. TÉTEL. *Ha* $m(\tilde{S})>0$, *akkor*

$$S_\mu^{-1} = \tilde{S}^{-1} - (\tilde{S}^{-1})_{\mathfrak{N}_0}, \tag{5.1}$$

ahol $\mathfrak{N}_0$ *az*

$$S^*\varphi = 0 \tag{5.2}$$

egyenlet összes φ *megoldásaiból álló halmaz.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$m(\tilde{S}) > 1$$

és így egyúttal $m(S)>1$.

Vezessük be az

$$S_1 = S-I, \quad \tilde{S}_1 = \tilde{S}-I$$

jelöléseket; ekkor

$$S_{1\mu} = S_\mu - I.$$

Legyen továbbá

$$A = (I-S_1)(I+S_1)^{-1};$$

ebben az esetben az

$$\begin{cases} A_\mu = (I-S_{1\mu})(I+S_{1\mu})^{-1} = 2S_\mu^{-1}-I, \\ \tilde{A} = (I-\tilde{S}_1)(I+\tilde{S}_1)^{-1} = 2\tilde{S}^{-1}-I \end{cases} \tag{5.3}$$

operátorok közül az első az A operátor minimális, a második az A operátor valamilyen korlátos ($\|\tilde{A}\| \leqq 1$) önadjungált folytatását szolgáltatja.

A (2. 13) képlet értelmében

$$A_\mu = \tilde{A} - (I+\tilde{A})_{\mathfrak{N}_0}, \tag{5.4}$$

ahol $\mathfrak{N}_0$ a

$$\mathfrak{D}(A) = (I+S_1)\mathfrak{D}(S) = S\mathfrak{D}(S)$$

halmazra merőleges vektorok összessége, vagy ami ugyanaz, az (5. 2) egyenlet összes megoldásaiból álló halmaz.

Az (5. 3) összefüggések értelmében (5. 4) ekvivalens azzal, hogy

$$2S_\mu^{-1} - I = 2\tilde{S}^{-1} - I - (2\tilde{S}^{-1})_{\mathfrak{N}_0},$$

ez viszont az (5. 1) egyenlőséggel ekvivalens.

A tételt bebizonyítottuk.

Emlékezzünk vissza arra, hogy (1. 8) alapján az (5. 1) összefüggés a következő alakban is felírható:

$$S_\mu^{-1}f = \tilde{S}^{-1}f - \sum_{\nu\in N}(f,\varphi_\nu)\varphi_\nu \quad (f\in\mathfrak{H}), \tag{5.5}$$

ahol a $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in N}$ vektorrendszert az alábbi módon nyerjük.

Az

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{N}\cap\mathfrak{D}(\tilde{S}^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{N}\cap\mathfrak{D}[\tilde{S}] \tag{5.6}$$

halmazt *Hilbert*-térré tesszük azáltal, hogy két $g, f \in \mathfrak{L}$ elem skaláris szorzatát az

$$\tilde{S}[g, f] = (\tilde{S}^{\frac{1}{2}} g, \tilde{S}^{\frac{1}{2}} f) \tag{5.7}$$

képlettel definiáljuk. Ekkor $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in N}$ rendszernek választhatunk bármilyen $\mathfrak{L}$-beli teljes ortonormális rendszert, amelyre tehát

$$\tilde{S}[\varphi_\nu, \varphi_\mu] = \delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu \in N). \tag{5.8}$$

Emlékeztetünk arra, hogy az (5. 5) összefüggés jobb oldalán álló összeg legfeljebb megszámlálhatóan sok nullától különböző tagot tartalmaz és erősen konvergens; ezenfelül tetszés szerinti $f \in \mathfrak{H}$ elemre

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}\left[f - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_{\nu_k})\varphi_{\nu_k},\ f - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_{\nu_k})\varphi_{\nu_k}\right] = 0,$$

ahol $\{\nu_k\}_1^\infty$ azoknak a $\nu \in N$ értékeknek a sorozata, amelyekre $(f, \varphi_\nu) \neq 0$.

2. A tekintett $(m(S) > 0)$ esetben az S_M operátort igen egyszerűen lehet jellemezni.

13. TÉTEL. *Ha $m(S) > 0$, akkor $\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{D}(S_M)$ és*

$$S_M \varphi = 0 \quad (\varphi \in \mathfrak{N}_0).$$

Az S operátor semmilyen más $\tilde{S}$ önadjungált folytatása nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Bizonyítás. Legyen $\tilde{S}$ valamilyen $\mathfrak{P}(S)$-beli operátor, amelyre $m(\tilde{S}) = m(S) > 0$. Az $\tilde{S}$ operátor ilyen megválasztása esetén az

$$\tilde{A} = (I - \tilde{S})(I + \tilde{S})^{-1} \in \mathfrak{B}(A) \qquad (A = (I - S)(I + S)^{-1})$$

operátor spektruma az 1 pontot nem tartalmazza, tehát az $(I - \tilde{S})^{-1}$ önadjungált operátor korlátos. De ekkor az 1. §-ban szereplő $\gamma)$ állítás értelmében

$$(I - \tilde{A})\varphi = (I - \tilde{A})_{\mathfrak{N}_{-1}} \varphi \quad (\varphi \in (I - \tilde{A})^{-1} \mathfrak{N}_{-1}), \tag{5.9}$$

ahol $\mathfrak{N}_{-1}$ mindazoknak a ψ vektoroknak az összessége, amelyek ortogonálisak a

$$\mathfrak{D}(A) = (I + S)\mathfrak{D}(S) \tag{5.10}$$

halmazra. Másrészt, mint tudjuk (lásd a (2. 13) képletet),

$$A_M = \tilde{A} + (I - \tilde{A})_{\mathfrak{N}_{-1}},$$

és így az (5. 9) egyenlőség alapján

$$A_M \varphi = \varphi \qquad (\varphi \in (I - \tilde{A})^{-1} \mathfrak{N}_{-1}). \tag{5.11}$$

Minthogy pedig

$$\mathfrak{D}(S_M) = (I + A_M)\mathfrak{H},$$

azért (5. 11) értelmében

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi + A_M \varphi) \in \mathfrak{D}(S_M) \qquad (\varphi \in (I - \tilde{A})^{-1} \mathfrak{N}_{-1}), \tag{5.12}$$

továbbá

$$(5.13)\quad S_M\varphi = \frac{1}{2}S_M(\varphi + A_M\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi - A_M\varphi) = 0 \qquad (\varphi\in(I-\tilde{A})^{-1}\mathfrak{N}_{-1}).$$

Most vegyük tekintetbe, hogy $\mathfrak{N}_{-1}$ a $\mathfrak{D}(A)$ halmaz ortogonális komplementuma, és ennélfogva $(I-\tilde{A})^{-1}\mathfrak{N}_{-1}$ az $(I-\tilde{A})\mathfrak{D}(A)$ halmaz ortogonális komplementuma. Másrészt az (5. 10) összefüggés folytán

$$(I-\tilde{A})\mathfrak{D}(A) = (I-\tilde{A})(I+S)\mathfrak{D}(S) = (I-\tilde{A})(I+\tilde{S})\mathfrak{D}(S) =$$
$$= \big(I+\tilde{S}-\tilde{A}(I+\tilde{S})\big)\mathfrak{D}(S) = 2\tilde{S}\,\mathfrak{D}(S) = S\mathfrak{D}(S),$$

úgyhogy $(I-\tilde{A})^{-1}\mathfrak{N}_{-1}$ az $S\mathfrak{D}(S)$ halmaz ortogonális komplementuma, azaz

$$(I-\tilde{A})^{-1}\mathfrak{N}_{-1} = \mathfrak{N}_0.$$

Ha ezt az egyenlőséget összekapcsoljuk az (5. 12), (5. 13) képletekkel, megkapjuk a 13. tétel első részét.

Most legyen S_1 az S operátor tetszés szerinti önadjungált folytatása, amelyre

$$(5.14)\qquad \mathfrak{N}_0\subset\mathfrak{D}(S_1),\quad S_1\varphi = 0 \quad (\varphi\in\mathfrak{N}_0).$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy $S_1 = S_M$.

E célból megjegyezzük, hogy bármelyik $f\in\mathfrak{H}$ vektor előállítható ortogonális összegként:

$$f = \varphi + g,\quad \text{ahol}\quad \varphi\in\mathfrak{N}_0,\quad g\in\mathfrak{M} = \mathfrak{H}\ominus\mathfrak{N}_0,$$

továbbá $f\in\mathfrak{D}(S_1)$ esetén (5. 14) értelmében $g\in\mathfrak{D}(S_1)$ és

$$S_1 f = S_1 g.$$

Az (5. 14) képletből az is következik, hogy

$$(5.15)\qquad \mathfrak{R}(S_1)\perp\mathfrak{N}_0,\quad \text{vagyis}\quad \mathfrak{R}(S_1)\subset\mathfrak{M}.$$

Tehát $\mathfrak{M}$ redukálja az S_1 operátort, és az $\mathfrak{M}$-en tekintett S_1 operátor $\mathfrak{D}_0(S_1)$ értelmezési tartományára[13]

$$\mathfrak{D}_0(S_1) = P_{\mathfrak{M}}\mathfrak{D}(S_1) = \mathfrak{D}(S_1)\cap\mathfrak{M}.$$

Másrészt tekintettel arra, hogy S_1 az S operátor folytatása, $\mathfrak{R}(S_1)\supset\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{M}$[14], és ezt egybevetve az (5. 15) összefüggéssel nyerjük:

$$S_1\mathfrak{D}_0(S_1) = \mathfrak{R}(S_1) = \mathfrak{M}.$$

A kapott egyenlőség azt mutatja, hogy az S_1 operátornak $\mathfrak{M}$-ben létezik $S_1^{(-1)}$ inverze, amely ráadásul korlátos is.

Most legyen $\tilde{S}$ az S operátor tetszés szerinti önadjungált folytatása, amelyre $m(\tilde{S})>0$.

[13] $P_{\mathfrak{M}}$ az $\mathfrak{M}$-re való merőleges vetítés operátora.

[14] Minthogy $\mathfrak{N}_0$ az $\mathfrak{R}(S)$ halmaz ortogonális komplementuma, $\mathfrak{R}(S)$ sűrű $\mathfrak{M}$-ben. Másrészt mivel feltevés szerint $m(S)>0$, könnyű belátni, hogy $\mathfrak{R}(S)$ zárt. Ennélfogva $\mathfrak{R}(S)=\mathfrak{M}$.

Minden egyes $g \in \mathfrak{M}$ vektornak megfelel egy

(5. 16) $$f = S_1^{(-1)} g \in \mathfrak{M}$$

vektor, amelyre $S_1 f = g$. Másrészt $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{M}$ miatt g-nek megfelel egy $f_1 \in \mathfrak{D}(S)$ vektor is, amelyre

$$\tilde{S} f_1 = S f_1 = S_1 f_1 = g \quad (= S_1 f);$$

innen

$$f_1 = \tilde{S}^{-1} g, \quad S^*(f_1 - f) = S_1(f_1 - f) = 0,$$

tehát

$$f_1 = f + \varphi \qquad (\varphi \in \mathfrak{N}_0);$$

minthogy pedig $f \in \mathfrak{M}$, azért

$$f = P_{\mathfrak{M}} f_1 = P_{\mathfrak{M}} \tilde{S}^{-1} g.$$

Ezt egybevetve az (5. 16) egyenlőséggel látjuk, hogy

$$S_1^{(-1)} g = P_{\mathfrak{M}} \tilde{S}^{-1} g \quad (g \in \mathfrak{M}).$$

Ezek szerint $S_1^{(-1)}$ nem függ az (5. 14) tulajdonságú S_1 önadjungált folytatás megválasztásától, következésképpen az (5. 14) tulajdonság az S_1 operátort egyértelműen meghatározza, vagyis $S_1 = S_M$.

A tételt bebizonyítottuk.

Egyúttal azt is bebizonyítottuk, hogy az S_M operátornak $\mathfrak{M}$-ben létezik $S_M^{(-1)}$ korlátos inverz operátora és

(5. 17) $$S_M^{(-1)} g = P_{\mathfrak{M}} \tilde{S}^{-1} g \qquad (g \in \mathfrak{M}),$$

ahol $\tilde{S}$ az S operátornak, az egyetlen $m(\tilde{S}) > 0$ feltételtől eltekintve, tetszés szerinti önadjungált folytatása.

3. Most már azt sem nehéz kideríteni, melyik a $\mathfrak{D}[S_M]$ halmaz.

Ehhez megjegyezzük, hogy ha $f \in \mathfrak{D}(S_M)$, akkor

$$h = S_M f \in \mathfrak{M}.$$

Másrészt az $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{M}$ egyenlőség miatt található olyan $g \in \mathfrak{D}(S)$ elem, hogy

$$S_M g = S g = h,$$

következésképpen

$$S_M(f - g) = 0, \quad \varphi = f - g \in \mathfrak{N}_0.$$

Ilyen módon az $f \in \mathfrak{D}(S_M)$ elem mindig előállítható

(5. 18) $$f = g + \varphi \qquad (g \in \mathfrak{D}(S), \ \varphi \in \mathfrak{N}_0)$$

alakban.

Az szintén nyilvánvaló, hogy megfordítva is, ha egy $f \in \mathfrak{H}$ elem előállítható (5. 18) alakban, akkor $f \in \mathfrak{D}(S_M)$.

Az $\mathfrak{N}_0 \perp \mathfrak{R}(S)$ reláció következtében az (5. 18) előállításban

$$\varphi \perp S g = S_M g = S_M f,$$

és így

(5. 19) $$(S_M f, f) = (S g, g).$$

Most legyen

$$f \in \mathfrak{D}[S], \quad \{f_n\} \subset \mathfrak{D}(S) \quad \text{és} \quad f_n \xrightarrow{S} f.$$

Az utóbbi, mint ismeretes (lásd a 4. 1. pontot), azt jelenti, hogy

1) $f_n \to f$, ha $n \to \infty$,

2) $(S_M(f_m - f_n), f_m - f_n) \to 0$, ha $m, n \to \infty$.

Az (5. 18) képlet szerint elvégezve az

$$f_n = g_n + \varphi_n \qquad (g_n \in \mathfrak{D}(S),\ \varphi_n \in \mathfrak{N}_0,\ n = 1, 2, \ldots)$$

felbontásokat, az (5. 19) egyenlőség alapján azt kapjuk, hogy

$$(S_M(f_m - f_n), f_m - f_n) = (S(g_m - g_n), g_m - g_n) \geqq m(S)|g_m - g_n|^2 \qquad (m, n = 1, 2 \ldots),$$

tehát ha az $\{f_n\}$ sorozatra teljesül a 2) feltétel, akkor van olyan $g \in \mathfrak{H}$ elem, hogy

1′) $g_n \to g$ ha $n \to \infty$,

és ezenkívül

2′) $(S(g_m - g_n), g_m - g_n) \to 0$ ha $m, n \to \infty$.

Az 1′), 2′) feltételek azt jelentik, hogy $g_n \xrightarrow{S} g$ és így $g \in \mathfrak{D}[S]$.
Másrészt az 1) és az 1′) feltételből adódik, hogy

$$\varphi_n \to \varphi = f - g.$$

Minthogy $\mathfrak{N}_0$ zárt halmaz, innen $\varphi \in \mathfrak{N}_0$.
Ennélfogva

(5.20) $$f = g + \varphi \quad (g \in \mathfrak{D}[S],\ \varphi \in \mathfrak{N}_0).$$

Mivel

$$\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{D}(S_M) \subset \mathfrak{D}[S_M], \quad \mathfrak{D}[S] \subset \mathfrak{D}[S_M],$$

azért fordítva is, ha egy $f \in \mathfrak{H}$ elem előállítható (5. 20) alakban, akkor $f \in \mathfrak{D}[S]$.
Ezzel bebizonyítottuk a következőt.

14. TÉTEL. *Ha $m(S) > 0$, akkor*

$$\mathfrak{D}(S_M) = \mathfrak{D}(S) + \mathfrak{N}_0, \quad \mathfrak{D}[S_M] = \mathfrak{D}[S] + \mathfrak{N}_0.$$

Ennek a tételnek a megfogalmazásánál azt a jelölési módot alkalmazzuk, amely szerint $E_1 + E_2 + \ldots + E_p$ összegen, ahol $E_k \subset \mathfrak{H}$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$, a $g = g_1 + g_2 + \ldots + g_p$ alakú elemek összessége értendő, ahol $g_k \in E_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$.

7. LEMMA. *Ha $m(S) > 0$, akkor*

(5.21) $$\mathfrak{D}(S^*) = \mathfrak{D}(S_\mu) + \mathfrak{N}_0.$$

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathfrak{D}(S^*)$ és

$$S^* f = h, \quad g = S_\mu^{-1} h.$$

Ekkor

$$g \in \mathfrak{D}(S_\mu) \quad \text{és} \quad S_\mu g = h.$$

Másrészt S^* az S_μ operátor folytatása, tehát

$$S^*g = h, \quad S^*(f-g) = 0,$$

és így $\varphi = f-g \in \mathfrak{N}_0$. Ennélfogva

$$f = g+\varphi \quad (\varphi \in \mathfrak{N}_0, \quad g \in \mathfrak{D}(S_\mu)),$$

azaz

$$\mathfrak{D}(S^*) \subset \mathfrak{D}(S_\mu) + \mathfrak{N}_0.$$

Másrészt fennáll

$$\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{D}(S^*), \quad \mathfrak{D}(S_\mu) \subset \mathfrak{D}(S^*), \quad \mathfrak{N}_0 + \mathfrak{D}(S_\mu) \subset \mathfrak{D}(S^*),$$

és ebből következik (5. 21).

15. Tétel. *Ha $m(S)>0$, akkor az S operátor bármelyik $\tilde{S}$ félig korlátos folytatására*

$$\mathfrak{D}[\tilde{S}] = \mathfrak{D}[S] + \mathfrak{N}_0', \quad \textit{ahol} \quad \mathfrak{N}_0' = \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[\tilde{S}]. \tag{5.22}$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $m(S) \geqq 0$. Ekkor a 11. és a 14. tétel értelmében

$$\mathfrak{D}[\tilde{S}] \subset \mathfrak{D}[S_M] = \mathfrak{D}[S] + \mathfrak{N}_0, \tag{5.23}$$

és innen a

$$\mathfrak{D}[S] \subset \mathfrak{D}[\tilde{S}] \tag{5.24}$$

inklúzió felhasználásával nyerjük az (5. 22) összefüggést.

Most legyen $m(S)<0$. Ekkor választva egy $a>-m(S)$ számot, az $S+aI$, $\tilde{S}+aI$ operátorokra alkalmazhatjuk az (5. 23) relációt és így a következőt kapjuk:

$$\mathfrak{D}[\tilde{S}] = \mathfrak{D}[\tilde{S}+aI] \subset \mathfrak{D}[S+aI] + \mathfrak{N}_a = \mathfrak{D}[S] + \mathfrak{N}_a, \tag{5.25}$$

ahol $\mathfrak{N}_a$ az

$$S^*\psi + a\psi = 0$$

egyenlet ψ megoldásainak az összessége. Minthogy $\mathfrak{N}_a \subset \mathfrak{D}(S^*)$, azért a 7. lemma és a 10. tétel alapján

$$\mathfrak{N}_a \subset \mathfrak{D}(S_\mu) + \mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{D}[S] + \mathfrak{N}_0,$$

ami az (5. 25) összefüggéssel egybevetve azt adja, hogy

$$\mathfrak{D}[\tilde{S}] \subset \mathfrak{D}[S] + \mathfrak{N}_0.$$

Ebből és (5. 24)-ből viszont adódik az (5. 22) egyenlőség.

A tételt bebizonyítottuk.

8. Lemma. *Ha $\tilde{S}$ az S $(m(S)>0)$ operátor alulról félig korlátos folytatása és*

$$g \in \mathfrak{D}[S], \quad \varphi \in \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[\tilde{S}],$$

akkor

$$\tilde{S}[g, \varphi] = 0.$$

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$m(\tilde{S}) > -1.$$

Ekkor a 3. lemma értelmében $\mathfrak{D}[S]$ Hilbert-tér a

$$(g,f)_S = (g,f)+S[g,f] \qquad (g,f\in\mathfrak{D}[S])$$

skaláris szorzattal, továbbá $\mathfrak{D}(S)$ sűrűn helyezkedik el ebben a térben.

Következésképpen a $g\in\mathfrak{D}[S]\subset\mathfrak{D}[\tilde{S}]$ elemhez található olyan $\{g_n\}\subset\mathfrak{D}(S)$ sorozat, hogy

$$(5.26) \qquad (g-g_n, g-g_n)_S\to 0, \qquad g_n\to g.$$

Mivel pedig a 4. lemma szerint $\tilde{T} = \tilde{S}+I$ esetén

$$(g,f)_{\tilde{S}} = \tilde{T}[g,f] = (\tilde{T}^{\frac{1}{2}}g, \tilde{T}^{\frac{1}{2}}f),$$

azért (5. 26) azt jelenti, hogy

$$\tilde{T}_{\frac{1}{2}}g_n\to\tilde{T}^{\frac{1}{2}}g,$$

és így

$$(5.27) \qquad \tilde{S}[g,\varphi]+(g,\varphi) = \tilde{T}[g,\varphi] = (\tilde{T}^{\frac{1}{2}}g, \tilde{T}^{\frac{1}{2}}\varphi) = \lim_{n\to\infty}(\tilde{T}^{\frac{1}{2}}g_n, \tilde{T}^{\frac{1}{2}}\varphi).$$

Másrészt

$$\{g_n\}\subset\mathfrak{D}(S) = \mathfrak{D}(T)\subset\mathfrak{D}(\tilde{T})$$

miatt az (5. 27) egyenlőségből tovább adódik, hogy

$$\tilde{S}[g,\varphi]+(g,\varphi) = \lim_{n\to\infty}(\tilde{T}g_n,\varphi) = \lim_{n\to\infty}(Tg_n,\varphi) = \lim_{n\to\infty}[(Sg_n,\varphi)+(g_n,\varphi)] = (g,\varphi),$$

mert $\varphi\perp\mathfrak{R}(S)$.

A lemmát bebizonyítottuk.

16. TÉTEL[15]. *Ha $\tilde{S}$ az S $(m(S)>0)$ operátor alulról félig korlátos folytatása, akkor ahhoz, hogy $\tilde{S}$ pozitív legyen, szükséges és elégséges az*

$$(5.28) \qquad \tilde{S}[\varphi,\varphi]\geqq 0 \quad (\varphi\in\mathfrak{N}_0\cap\mathfrak{D}[S])$$

feltétel.

Bizonyítás. Valóban, $\tilde{S}>0$ akkor és csak akkor, ha

$$(5.29) \qquad \tilde{S}[f,f]\geqq 0 \quad (f\in\mathfrak{D}[S]).$$

Ily módon az (5. 28) feltétel szükséges; de elégséges is, ugyanis ha $f\in\mathfrak{D}[S]$, akkor a 15. tétel értelmében

$$f = g+\varphi \quad (g\in\mathfrak{D}[S], \quad \varphi\in\mathfrak{N}_0\cap\mathfrak{D}[\tilde{S}]),$$

és így a 8. lemma alapján

$$\tilde{S}[f,f] = \tilde{S}[g,g]+\tilde{S}[\varphi,\varphi]\geqq\tilde{S}[\varphi,\varphi],$$

következésképpen az (5. 28) egyenlőtlenségből adódik (5. 29).

A tételt bebizonyítottuk.

17. TÉTEL. *Ha S_k $(k=1,2)$ az S $(m(S)>0)$ operátor két alulról félig korlátos folytatása, akkor ahhoz, hogy legalább egy $a>m(S_k)$ $(k=1,2)$ számra (és így minden*

[15] Az $\mathfrak{n}<\infty$ esetre $((\mathfrak{n},\mathfrak{n})$ az S operátor defektusindexe) később általánosabb állítást fogunk bebizonyítani (lásd 6. §, 19. tétel).

ilyen a-ra) fennálljon az

$$(S_1+aI)^{-1} \leqq (S_2+aI)^{-1}$$

egyenlőtlenség, szükséges és elégséges a következő feltételek teljesülése:

$$\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[S_1] \subset \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[S_2] \tag{5.30}$$

és

$$S_2[\varphi, \varphi] \leqq S_1[\varphi, \varphi] \qquad (\varphi \in \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[S_1]). \tag{5.31}$$

Bizonyítás. A 4. §-ban szereplő 6. lemma szerint a tétel bebizonyítása céljából elég megmutatni, hogy az (5. 30) feltétel ekvivalens a

$$\mathfrak{D}[S_1] \subset \mathfrak{D}[S_2] \tag{5.32}$$

összefüggéssel, és hogy (5. 32) fennállása esetén az (5. 31) feltétel ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel:

$$S_2[f,f] \leqq S_1[f,f] \quad (f \in \mathfrak{D}[S_1]). \tag{5.33}$$

Hogy (5. 30) és (5. 32) ekvivalens egymással, az a 15. tétel alapján nyilvánvaló. Másrészt ha $f \in \mathfrak{D}[S_1] \subset \mathfrak{D}[S_2]$, akkor, ismét a 15. tétel felhasználásával,

$$f = g + \varphi \quad (g \in \mathfrak{D}[S], \quad \varphi \in \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[S_1]),$$

tehát a 8. lemma értelmében

$$S_1[f,f] - S_2[f,f] = S_1[\varphi, \varphi] - S_2[\varphi, \varphi].$$

A tételt bebizonyítottuk.

Fordította: Bognár János

IRODALOM

[1] J. VON NEUMANN, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Mathematische Annalen* **102** (1929) 49—131.

[2] K. FRIEDRICHS, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, *Mathematische Annalen* **109** (1934) 465—487.

[3] M. KREIN, Sur les opérateurs différentiels autoadjoints et leurs fonctions de Green symétriques, *Recueil Mathématique* **2** (1937) 1023—1072.

[4] M. KREIN, Sur les développements des fonctions arbitraires en séries de fonctions fondamentales d'un problème aux limites quelconque, *Recueil Mathématique* **2** (1937) 923—933.

[5] M. Крейн, О самосопряженных расширениях ограниченных и полуограниченных эрмитовых операторов, *Доклады Академии наук СССР* **48** (1945) 303—306.

[6] M. Крейн, О резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (*m*, *m*), *Доклады Академии наук СССР* **52** (1946) 651—654.

[7] M. H. STONE, Linear transformations in Hilbert space, *American Mathematical Society Colloquium Publications*, **15** (1932).

[8] H. BATEMAN, *Messengers of mathematics*, **37** (1908).

[9] J. W. CALKIN, Symmetric transformations in Hilbert space, *Duke Mathematical Journal* **7** (1940) 504—508.

[10] H. L. HAMBURGER, Contributions to the theory of closed hermitian transformations of deficiency index (*m*, *m*), *Annals of Mathematics* **45** (1944) 59—99.

[11] M. Крейн, Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице, II, *Доклады Академии наук СССР* **44** (1944) 131—134.

[12] H. FREUDENTHAL, Über die Friedrichssche Fortsetzung halbbeschränkter Operatoren, *Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings, ser. A.*, **39** (1936) 832—833.

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1968. X. 14. – Terjedelem 8,50 (A/5) ív, 20 ábra

68-6083 – Szegedi Nyomda

Ára: 19,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

INDEX

FROM THE FOREIGHN LITERATURE

Megjelent 1968. XII. 29.

Index: 26498